Digitized by the Internet Archive
in 2016 with funding from
Getty Research Institute

https://archive.org/details/gothofrediguille03leib

GOTHOFREDI GUILLELMI
LEIBNITII

S. Cæſar. Majeſtatis Conſiliarii, & S. Reg. Majeſt. Britanniarum a Conſiliis Juſtitiæ intimis, nec non a ſcribendâ Hiſtoriâ,

OPERA OMNIA,

Nunc primum collecta, in Claſſes diſtributa, præfatio-
nibus & indicibus exornata, ſtudio

LUDOVICI DUTENS.

TOMUS TERTIUS,

CONTINENS OPERA MATHEMATICA.

GENEVÆ,
Apud FRATRES DE TOURNES.

MDCCLXVIII.

INDEX
OPERUM TOMI TERTII.

L. DUTENS præfatio in Partem Mathematicam. Pag. I
L. Hiſtoria Inventionis Differentialis, ex hiſtoriâ vitæ *Leibnitii* à Dn. *Jaucourt* excerpta. XII
Hiſtoire de l'Invention du Calcul Différentiel, tirée de l'hiſtoire des Mathématiques par M. Montucla Tom. 2. XLI

N°. I. G. G. LEIBNITII Diſputatio Arithmetica de Complexionibus. (Kortholti Collectio.) pag. 1
II. Epiſtola ad Benedict. De Spinoſa, cum Spinoſæ reſponſione. (Loc. Cit.) 11
III. Notitia Opticæ Promotæ (Edit. Ffurti a. 1671.) 14
IV. Excerpta ex Epiſtolis G. G. Leibnitii, in Commercio epiſtolico a Joanne Collins edito. (Commercium Epiſtolicum &c. 4. Lond. 1712.) 16
V. Commercium Epiſtolicum G. G. Leibnitii, H. Oldenburgii, Joh. Collinii, & Iſaaci Newtoni. (Joan. Walliſii Operum Tom. III. fol. Oxoniæ 1699.) 25
VI. Commercium Epiſtolicum G. G. Leibnitii, & Joan. Walliſii.

liſii. (Loc. Cit.) p. 89
VII. Extraits de diverſes lettres à l'auteur du Journal des Savans. 135
N. 1. Touchant le principe de juſteſſe des horloges portatives de ſon invention. (Journal des Savans Mars 1675.)
2. Obſervation nouvelle de la maniére d'eſſayer ſi un nombre eſt primitif. (Loc. Cit. Février 1678.)
3. Touchant la quadrature d'une portion de la roulette. (Loc. Cit. May 1678.)
VIII. De Verâ proportione Circuli ad quadratum circumſcriptum in numeris rationalibus. (Act. Erud. Lipſ. ann. 1682.) 140
IX. Unicum Opticæ, Catoptricæ & Dioptricæ principium. (Loc. Cit.) 145
X. Meditatio Juridico-Mathematica de Interuſurio ſimplice. (Loc. Cit. 1683.) 151
XI. De Dimenſionibus Figurarum inveniendis. (Loc. Cit. 1684.) 158
XII. Demonſtrationes novæ de Reſiſtentiâ ſolidorum. (Loc. Cit.) 161
XIII. Nova methodus pro Maximis & Minimis, itemque tangentibus, quæ nec fractas, nec irrationales quantitates moratur, & ſingulare pro illis calculi genus. (Loc. Cit.) 167
XIV. De Dimenſionibus Curvilineorum, additio ad Numerum XI. (Loc. Cit.) 173
XV. Demonſtratio Geometrica Regulæ apud Staticos receptæ *de momentis gravium in planis inclinatis*, nuper in dubium vocatæ: & ſolutio caſus elegantis, in Actis Novemb. 1684. propoſiti, *de globo duobus planis angulum rectum facientibus ſimul incumbente*; quantum unumquodque planorum prematur, determinans. (Loc. Cit. 1685.) 175
XVI. Brevis Demonſtratio Erroris memorabilis *Carteſii*, & aliorum circa legem naturalem, ſecundùm quam volunt a Deo, eamdem ſemper quantitatem motûs conſervari; qua & in re mechanicâ abutuntur. (Loc. Cit. 1686.) 180
XVII.

XVII. Courte remarque de M. l'Abbé Conti, où l'on montre à M. Leibniz le paralogiſme contenu dans le numero précédent. (Nouvelles de la République des Lettres Septembre 1686.) pag. 182
XVIII. Meditatio nova de naturâ anguli contactûs & oſculi, horumque uſu in practica matheſi, ad figuras faciliores ſuccedaneas difficilioribus ſubſtituendas. (Act. Erud. 1686.) 185
XIX. De Geometria reconditâ, & analyſi indiviſibilium atque infinitorum. (Loc. Cit.) 188
XX. Replique de M. Leibniz à M. l'Abbé Conti touchant ce qu'a dit M. Deſcartes, que Dieu conſerve toujours la même quantité de mouvement. V. N°. XVI. & XVII. (Nouvelles de la République des Lettres Février 1687.) 194
XXI. Nouvelle réponſe de M. Leibniz à une remarque de M. l'Abbé Conti, où celui-ci prétend toujours ſoutenir la loi de la nature avancée par M. Deſcartes. V. N°. XVI. XVII. & XX. (Loc. Cit.) 200
XXII. De Lineis Opticis, & alia. (Act. Erud. 1689.) 202
XXIII. De Reſiſtentia medii, & motu projectorum gravium in medio reſiſtente. (Loc. Cit.) 205
XXIV. Tentamen de Motuum Cæleſtium cauſis. (Loc.Cit.) 213
XXV. De Linea Iſochrona, in qua grave ſine acceleratione deſcendit, & de controverſiâ cum Dn. Abbate *De Conti*. (Loc. Cit.) 225
XXVI. De Cauſâ gravitatis, & defenſio ſententiæ Auctoris, de veris naturæ legibus contra Carteſianos. (L. C. 1690.) 228
XXVII. Reſponſio ad ea quæ J. Bernoulli, menſe Maio a. 1690. in Act. Erud. publicavit. (Loc. Cit.) 237
XXVIII. Additio ad Num. XXIII. de reſiſtentiâ medii. (Loc. Cit. a. 1691.) 239
XXIX. Quadratura Arithmetica communis ſectionum conicarum, quæ centrum habent, indeque ducta Trigonometria Canonica ad quantamcunque in numeris exactitudinem a Tabularũ neceſſitate liberata: cum uſu ſpeciali ad lineam Rhomborum nauticam, aptatumque illi planiſphærium. (L.C.) 241

XXX. De Lineâ in quam flexile ſe pondere proprio curvat; ejuſque uſu inſigni ad inveniendas quotcumque medias proportionales, & logarithmos. (Loc. Cit.) pag. 245
XXXI. De ſolutionibus problematis catenarii, vel funicularis a Dn. J. Bernoullio propoſiti. (Loc. Cit.) 249
XXXII. De Legibus naturæ, & verâ æſtimatione virium motricium contra Carteſianos; Reſponſio ad rationes a Dn. *Papino* in Act. Erud. anni 1691. propoſitas. (Loc. Cit.) 253
XXXIII. Additiuncula ad conſiderationes Dn. *Lichtſcheidii*. (Loc. Cit.) 259
XXXIV. De la Chainette, ou ſolution d'un problême fameux, propoſé par *Galilei*, pour ſervir d'eſſai d'une nouvelle analyſe des infinis, avec ſon uſage pour les logarithmes, & une application à l'avancement de la navigation. (Journal des Savans année 1692.) 260
XXXV. De lineâ ex lineis, numero infinitis ordinatim ductis inter ſe concurrentibus formata, eaſque omnes tangente, ac de novo eâ in re Analyſis infinitorum uſu. (Act. Erud. 1692.) 264
XXXVI. Conſtructio Teſtudinis quadrabilis hemiſphæricæ. (Loc. Cit.) 267
XXXVII. Nouvelles remarques, touchant l'analyſe des Tranſcendantes, différentes de celle de la Géométrie de M. *Deſcartes*. (Journal des Savans 1692.) 271
XXXVIII. Generalia de Naturâ linearum, anguloque contactûs, & oſculi, provolutionibus, aliiſque cognatis, & eorum uſibus nonnullis. (Acta Erud. 1692.) 273
XXXIX. Additio ad ſolutionem Problematis in Actis ann. 1692. propoſiti. (Loc. Cit. 1693.) 278
XL. Supplementum Geometriæ practicæ ſeſe ad problemata tranſcendentia extendens, ope novæ methodi generaliſſimæ per ſeries infinitas. (Loc. Cit.) 279
XLI. Ad problema in Actis Erudit. ann. 1693. menſe Maio propoſitum. (Loc. Cit.) 282
XLII. Régle générale de la compoſition des mouvemens. (Journal des Savans 1693.) 283

XLIII. Deux problêmes conſtruits par l'auteur, en employant ſa régle générale de la compoſition des mouvemens. (Loc. Cit.) pag. 285
XLIV. Supplementum Geometriæ Dimenſoriæ, ſeu generaliſſima omnium Tetragoniſmorum effectio per motum &c. Similiterque multiplex conſtructio lineæ ex data tangentium conditione. (Act. Erud. 1693.) 287
XLV. C. Hugenii Z. De problemate Bernoulliano, in Actis Lipſienſ. anni 1693. propoſito, cum additione Leibnitii. (Loc. Cit.) 293
XLVI. Nova Calculi differentialis applicatio & uſus ad multiplicem linearum conſtructionem, ex datâ tangentium conditione. (Loc. Cit. 1694.) 296
XLVII. Conſidérations ſur la différence qu'il y a entre l'Analyſe ordinaire, & le nouveau calcul des tranſcendantes. (Journal des Savans 1694.) 301
XLVIII. Conſtructio propria problematis de curvâ Iſochrona paracentrica. Ubi & generaliora quædam de naturâ, & calculo differentiali oſculorum, & de conſtructione linearum tranſcendentium, una maximè geometrica, altera mechanica quidem, ſed generaliſſima. Acceſſit modus reddendi inventiones tranſcendentium linearum univerſales, ut quemvis caſum comprehendant, & tranſeant per punctum datum. (Act. Erud. 1694.) 303
XLIX. C. Hugenii Z. Conſtructio univerſalis problematis a J. Bernoullio menſe Maio ann. 1693. in Actis Erud. propoſiti, cum additione Leibnitii. (Loc. Cit.) 312
L. Specimen Dynamicum pro admirandis naturæ legibus circa corporum vires, & mutuas actiones detegendis, & ad ſuas cauſas revocandis. (Loc. Cit. 1695.) 315
LI. Notatiuncula ad conſtructiones Lineæ in quâ Sacoma, æquilibrium cum pondere moto faciens incedere debet, menſe Feb. ann. 1695. in Actis datas; Et quædam de quadraturis. (Loc. Cit.) 325
LII. Reſponſio ad nonnullas difficultates, a Dn. Bernardo
 Nieuwen-

Nieuwentyt circa methodum differentialem ſeu infiniteſimalem motas. (Loc. Cit.) pag. 327
LIII. De novo uſu centri gravitatis ad dimenſiones, & ſpeciatim pro areis inter curvas parallelas deſcriptas, ſeu rectangulis curvilineis; ubi & de parallelis in univerſum. (L.C.) 334
LIV. Notatiuncula ad Acta Decembris ann. *1695*. (Loc. Cit. ann. *1696*.) 336
LV. Epiſtola ad Dn. Vagetium, Profeſſorem mathematum Gieſſenſem. (Otium Hanover.) 338
LVI. Communicatio ſuæ pariter, duarumque alienarum ad edendum ſibi primum a D. *Jo. Bernoullio*, deinde a D. Marchione *Hoſpitalio* communicatarum ſolutionum problematis curvæ celerrimi deſcenſûs, a D. *Jo. Bernoullio* Geometris publicè propoſiti, unà cum ſolutione ſua problematis alterius, ab eodem poſtea propoſiti. (Act. Erud. *1697*.) 340
LVII. Excerpta ex Epiſtola Leibnitii ad Actorum Eruditorum collectores. (Loc. Cit.) 344
LVIII. De inventione Arithmeticæ Binariæ a G. G. Leibnitio. (Vit. Leibnitii a Dn. Jaucourt.) 346
LIX. Epiſtolæ duæ ad Joh. Chr. Schulenburgium de arithmeticâ Dyadicâ. (Schulenburgii method. indicandi dies feſtos, 4. Ffurti & Lipſ. 1724.) 349
LX. Animadverſio ad Davidis Gregorii Schediaſma de catenariâ, quod habetur in Actis Erudit. A. *1698*. (Act. Erud. A. *1699*.) 355
LXI. Reſponſio ad Dn. Nic. Fatio Duillierii imputationes: Acceſſit nova artis analyticæ promotio ſpecimine indicata; dum deſignatione per numeros aſſumptitios loco literarum, Algebra ex combinatoriâ arte lucem capit. (L. C. 1700.) 359
LXII. Declaratio, occaſione epiſtolæ a Dn. Jac. Bernoullio ad Dn. Johannem fratrem ſcriptæ, & typis editæ, expreſſa. (Loc. Cit. 1701.) 368
LXIII. Mémoire de M. Leibniz touchant ſon ſentiment ſur le calcul différentiel. (Journal de Trevoux A. 1701.) 369
LXIV. Extrait d'une lettre à M. Varignon, contenant l'explication de ce qu'on a rapporté dans les Mémoires de Trevoux
des

des mois de Novembre & Décembre 1701. (Journal des Savans 1702.) pag. 370
LXV. Specimen novum analyſeos pro ſcientiâ Infiniti, circa ſummas & quadraturas. (Act. Erud. A. 1702.) 373
LXVI. Continuatio Analyſeos Quadraturarum Rationalium. (Loc. Cit. 1703.) 381
LXVII. Remarque ſur un endroit des nouveaux Elémens d'Algèbre de M. Ozanam. (Journal des Savans A. 1703.) 387
LXVIII. Explication de l'Arithmétique Binaire, qui ſe ſert des ſeuls caractères o. & 1 : avec des remarques ſur ſon utilité, & ſur ce qu'elle donne le ſens des anciennes figures Chinoiſes de *Fohy*. (Mémoires de l'Acad. des Sciences A. 1703.) 390
LXIX. De Lineæ ſuper lineâ inceſſu, ejuſque tribus ſpeciebus, motu radente, motu provolutionis, & compoſito ex ambobus. (Act. Erud. 1706.) 395
LXX. Excerptum ex Epiſtolâ Auctoris, quam pro ſua hypotheſi phyſicâ motus planetarii ad amicum ſcripſit. V. Num. XXIV. (Loc. Cit.) 400
LXXI. Lettre à M. Varignon, ſur les inclinations centrales. (Communiquée par M. D'Alembert.) 404
LXXII. Epiſtola ad D. Chriſt. Wolfium, circa ſcientiam Infiniti. (Act. Erud. Suppl. Tom. V. ad ann. 1713.) 406
LXXIII. Remarques ſur l'art. V. des Nouvelles de la République des Lettres du mois de Février 1706. (Nouvelles de la Rep. &c. Novembre 1706.) 411
LXXIV. Brevis deſcriptio Machinæ Arithmeticæ. (Miſcellan. Berol.) 413
LXXV. Monitum de characteribus Algebraicis. (Loc. Cit.) 416
LXXVI. Symboliſmus Memorabilis Calculi Algebraici & Infiniteſimalis, in comparatione potentiarum & differentiarum; & de Lege Homogeneorum Tranſcendentali. (Loc. Cit.) 421
LXXVII. Conſtructio Problematis ducendi rectas quæ tangunt Lineas Centrorum gravitatis. (Loc. Cit.) 426
LXXVIII. Tentamen de Naturâ & Remediis Reſiſtentiarum in machinis, quæ a corporum ſuperinceſſu oriuntur, occaſione diſſertationis præcedentis ejuſdem argumenti. (Loc. Cit.) 428

LXXIX. Epiſtolæ III. ad Chr. Goldbachium. (Korth. Coll.) p. 436
LXXX. Obſervatio quòd rationes, ſive proportiones non habeant locum circa quantitates nihilo minores, & de vero ſenſu methodi infiniteſimalis. (Act. Erud. A. 1712.) 439
LXXXI. Lettre au R. P. Tournemine, ſur le livre intitulé *Commercium Epiſtolicum.* (Journal de Trevoux A. 1715.) 441
LXXXII. Recueil de diverſes piéces ſur la diſpute entre MM. Leibniz & Newton. (Recueil de M. Des-Maiſeaux T. II.) 443
LXXXIII. Problema poſthumum a G. G. Leibnitio ante mortem ſuam miſſum & commiſſum ſolutioni R. P. *Auguſtini Thomæ a S. Joſepho*, Ordinis Scholarum piarum Decani. (Act. Erud. 1717.) 493
LXXXIV. Lettre à M. Dangicourt, ſur les monades & le calcul infiniteſimal. (Kortholti Collectio.) 499
LXXXV. Remarques ſur les horloges. (Journal de Trevoux A. 1718.) 502
LXXXVI. Additio G. G. Leibnitii oſtendens explanationem ſuperficiei conoidalis cujuſcunque; & ſpeciatim explanationem ſuperficiei Coni Scaleni, ita ut ipſi vel ejus portioni cuicunque exhibeatur rectangulum æquale, interventu extenſionis in rectam curvæ, per Geometriam ordinariam conſtruendæ. (Miſcell. Berolin. T. II.) 505
LXXXVII. Epiſtolæ XXVII. ad D. Joh. Jac. Hermannum, & unica ad J. Bernoullium. (Memor. Acad. Berol. a. 1757.) 507
LXXXVIII. Commercium Epiſtolicum G. G. Leibnitii, A. Eckhardi, Abb. Molani, & ejus Fratris, de Methodo Carteſianâ. (Sylloge Nov. Epiſtol. Norimb. A. 1761. edit.) 549
LXXXIX. Fragmens de diverſes lettres de M. Leibniz à M. De la Loubere. (De la réſolution des Equations par de la Loubere 4. Paris 1732.) 653
XC. Deux Lettres de M. Leibniz à M. Nicolas Fatio de Duillier, avec une réponſe de celui-ci. (Communiquées par M. Le Sage de Genève.) 657

Finis Indicis Opuſculorum Tomi tertii.

LUDOV.

LUDOVICI DUTENS

PRÆFATIO

IN MATHEMATICAM PARTEM.

EQUIDEM Præfationem *Ludovici De la Grange* in hoc volumen pollicitus fueram: verùm quum aliis ille neceſſariis negotiis diſtentus promiſſis ſatisfacere nullo modo potuerit, has ego partes ſuſcipere coactus ſum, ac deſtituitur Literaria Reſpublica iis fructibus, quos ex præſtantiſſimi hujus Mathematici opera percepiſſet. Interea quum inſtituerem, quantum in me eſſet, eam jacturam quoquomodo reparare, putavi, majorem gratiam apud Matheſeos ſtudioſos me initurum, ſi unicè eorum utilitati conſulens, non tam de operum Auctoris noſtri natura in Præfatione hac diſſererem, quàm ſimplici, atque hiſtorico modo ob oculos ponerem Mathematica ejus inventa, atque ad hoc ipſum ſubſidiis uterer doctorum hominum, qui jam de eodem argumento ſcripſere (a). Neque enim ego fruſtra gloriam captaverim quidpiam novi huc afferendi, ubi vel peritiſſimis omnium

(a) *Montucla*, *Eques Jaucourtius* &c.

ea tantùm laus relicta eſt, ut diſtinctiùs, ac clariùs, quàm alii antea, loqui poſſint.

Hoc etiam Lectores præmoneo, non velle me judicium meum ferre ſuper celebri quæſtione illa, quæ de Calculi Differentialis auctore exorta eſt, atque ab amicis, ac fautoribus *Leibnitii*, ac *Neutoni* tanta contentione agitata. Rem disjudicandam neque licet ſuſcipere, nec lubet. Hinc enim Editoris nomen, ac munus nimium propenſi in *Leibnitianam* cauſam animi, tametſi injuria, efficere me poſſent; inde verò patriæ amor, ſtudiumque erga Britannos populares meos, atque alia præterea vincula, quæ me Nationi illi quàm arctiſſimè devinciunt (b), fortaſſe præjudicatæ opinionis ſpeciem judicio meo afferre poſſent, ſi quid pro *Neutono* pronunciavero. Itaque hac de re etiam ſilebo quidem; at detrimentum, ſi quod ab hoc ſilentio oriri poteſt, ſatis ſuperque rependent duo ſuper hoc argumento opuſcula, quæ ad hujus Præfationis calcem ponere conſtitui. Eorum unum a *Leibnitii* vita ab Equite *Jaucourtio* conſcripta, alterum ab eximia *Montuclæ* Hiſtoria Mathematicorum, excerptum eſt. Uterque aliâ a *Leibnitio*, ac *Neutono* patria eſt, & quantum rei dijudicandæ par, tantumdem omni præjudicatæ opinionis, nimiique partium ſtudii ſuſpicione caret (c).

Venio ad Auctorem noſtrum. Minimè opus eſt, ut longo ſermone perſequar, quàm de omnibus Matheſeos partibus meritus ſit. Inutile hoc planè, ac ſupervacaneum eſſet. Nemo vel mediocriter eruditus ignorat, quantum ſibi nomen

(b) Magnæ Britanniæ Regis Ablegatus. Editor erat apud Sardiniæ Regem, quo tempore hanc editionem curabat.

(c) Vide etiam elogium Auctoris noſtri a *Fontenellio* conſcriptum, ejuſdemque vitam a Cl. *Bruckero*, quæ ſub initium primi. vol. horum Collectaneorum extant; Commentarios etiam Academiæ ſcientiarum ann. 1704. p. 129. Conſule pariter Encyclopædiæ articulum *Differentiel* celeb. *D'Alembert*. Promiſſa item nuper fuit nova *Commercii Epiſtolici* editio cum notis *Leibnitii*.

men in hac ſcientia *Leibnitius* comparaverit. Periodica illius temporis opera omnia graviſſimum ipſi impertiuntur, ac præclariſſimum teſtimonium, ejuſque nomen præſeferunt ſublimiſſima, difficillimaque problemata. Compendiaria eorum enumeratio, quæ nova, ac præclara brevi, feliciſſimeque reperit, ſatis hoc loco eſſe debet ad declarandam Leibnitianorum operum præſtantiam, atque utilitatem ad Literariam Rempublicam ex eorum Collectione redundaturam.

Tempeſtivè admodum ſe ad Matheſeos ſtudia natum *Leibnitius* prodidit. Viceſimum nondum annum attigerat, quum ſemi-mathematicam Theſin Lipſiæ propugnavit (d), quæ jam inde omnem ingenii ſui perſpicacitatem prænunciare videbatur. Verùm hoc ejus in Matheſin ſtudium non omnino prodiit, niſi quum Pariſios profectus arctiſſimam anno 1672 junxit cum *Hugenio* conſuetudinem. Ipſemet fatetur, eximii hujus viri Libro *de Horologio Oſcillatorio*, totum ingenium ſuum ad eam ſcientiam perſequendam excitatum fuiſſe, cui ſe ſe deinceps maxima alacritate devovit. Multa quoque ex lectione *Gregorii a S. Vincentio* ſibi paravit, e quibus plurima deduxit Scientiarum progreſſioni utiliſſima. Unus ex iis ſcriptoribus ille fuit, quibus credebat *Leibnitius* debere ſe plurimum, eidemque, quotieſcumque occurrit occaſio, præclariſſima dat grati animi ſui teſtimonia. Sub idem ferè tempus plura in Analyſi invenit, quæ ei ad inventum omnium pulcherrimum, *Calculi* nempe *differentialis*, viam ſtraverunt. Reperit, præ cæteris, Arithmeticam circuli quadraturam, criditque, ſe omnium primum, circuli valorem exhibuiſſe per ſeriem numerorum rationalium (e). Verùm ab *Oldenburgio* certior deinde factus fuit, *Neutonum* jam plura ejuſdem generis non de circulo tantùm, verùm etiam de figuris aliis tradidiſſe. Iiſdem quoque temporibus

a 2 novam

(d) Diſputatio Arithmetica de Complexionibus 1666. Vid. N. I.

(e) De vera proportione circuli, & quadratum circumſcriptum in numeris rationalibus. Anno 1678. Vid. N. VIII.

novam a ſe excogitatam rationem propoſuit perficiendæ horologiorum, quæ *portatilia* appellantur (Gallicè *montres de poche*) conſtructionis, per elaterem ſpiralis figuræ, ab *Hugenio* inventum, cujus ars præcipua in *rectificando*, ope ejuſmodi elateris, Libramenti motu, admodum per ſe inæquali, ſita erat. Propoſuerat ſibi *Leibnitius* duo libramenta in motu adhibere, duoſque elateres, qui alternatim, ſine intermiſſione ulla ſe intenderent, & remitterent (f). Circa idem quoque tempus præter propter celeberrimam illam ſuam Arithmeticam machinam invenit, quam cum Academia Scientiarum Pariſienſi communicavit (g), *Tſchirnauſio*, *Hugenio*, & *Thevenotio* probatam, utpote *Paſchalii* machinâ perfectiorem, commodioremque. In ea, cujus deſcriptio, ac delineatio in hoc volumine reperietur, excogitanda, diverſis temporibus, iteratoque ſtudio elaboravit; multas item, ut executioni mandaretur, impenſas fecit. Poſt ejus mortem diu neglecta jacuit, quin & adeo perturbata, ac confuſa, ut nulli jam uſui eſſe poſſet. Sed Literis Hanovera datis certior factus ſum, eam non ita pridem ad Cl. *Kaſtnerum* Matheſeos in Academia Gottingenſi Profeſſorem, miſſam fuiſſe, a quo in priſtinum ſtatum reſtituta fuit.

Non multo poſt operam poſuit in inquirenda planetarum vi, quod ſpectat ad orbitas ab iis deſcriptas (h); ac primus cum Equite *Neutono* materiam hanc attingere auſus fuit; & quum ab hoc viro *principia Philoſophiæ* edita eſſent, ex primis item fuit, qui medii reſiſtentiam, qua motus retardatur, accuratiùs expenderunt (i).

Rationem ipſe quoque invenit metiendi vivas corporum vires, ſeu vim corporis moti; ac demonſtravit vivas vires, quas

(f) Extrait d'une lettre touchant le principe de juſteſſe des Horloges portatives de ſon invention 1675. Vid. N. LXIV.

(g) Brevis deſcriptio machinæ arithmeticæ. Vid. N. LXXIV.

(h) Tentamen de motuum cœleſtium cauſis 1689. Vid. N. XXIV.

(i) Schediaſma de reſiſtentia medii, & motu projectorum gravium in medio reſiſtente. Jan. 1689. Vid. N. XXIII.

quas corpora cadendo acquirunt, proportionales eſſe producto eorum maſſæ per quadrata velocitatum: Quod poſtmodum experimentis confirmatum fuit, & totum ipſi acceptum eſt referendum. Motûs accelerati conſideratio eum ad hanc inquiſitionem perduxit. En qua via ratiocinando progreditur: Quodlibet corpus cadens acquirit cadendo velocitatis gradus, qui ſunt ut tempora, dum altitudines, ac ſpatia percurſa ſunt ut quadrata temporum, ac velocitatum. Jam verò vires corporis moti metiuntur per ſpatia percurſa, atque hoc ſpatium eſt ut quadratum velocitatis: ergo vires corporis moti ſunt uti quadrata velocitatum (k).

Perſuaſum item habebat *Leibnitius*, ſemper eſſe in rerum natura eamdem virium quantitatem, non verò eamdem motûs, quemadmodum putaverat *Carteſius*. Ex hoc uno principio ea deduxit, quæ experientiâ docemur de motu, ac corporum percuſſionibus, contra *Carteſii* regulas; eodemque principio novam ſcientiam ſuperſtruxit ab eo Dynamicam appellatam, cujus ſpecimen in Actis Lipſienſibus dedit (l).

Sed ejus in re Mathematica famam confirmarunt, quæ de Calculo Differentiali commentatus eſt, quorum primum ſpecimen edidit anno 1684 (m). Ampliſſimum hoc invento campum aperuit peritiorum Algebriſtarum operationibus, viamque peculiarem illis ad difficiliora problemata Geometrica munivit. Concipiuntur in nova Geometria magnitudines omnes finitæ reſolvi in magnitudines infinitè parvas. Jam verò calculus differentialis appellatur ars inveniendi has magnitudines infinitè parvas, de iis operationes inſtituendi,

 atque

(k) Brevis demonſtratio erroris memorabilis *Carteſii*, & aliorum circa legem naturalem, ſecundùm quam eamdem ſemper quantitatem conſervari à Deo volunt &c. Vid. N. XVI.

(l) Specimen Dynamicum pro admirandis naturæ legibus circa corporum vires, & mutuas actiones detegendis, & ad ſuas cauſas revocandis 1695. Vid. N. L.

(m) Nova methodus pro maximis, & minimis, itemque tangentibus, quæ non fractas, nec irrationales quantitates moratur, & ſingulare pro illis calculi genus. Vid. N. XIII.

atque earum ope inveniendi magnitudines alias finitas. Inde Calculus Integralis rationem docet inveniendarum per magnitudines infinitè parvas, magnitudinum finitarum, ad quas illæ pertinent: atque ita magnitudinem, quam calculus differentialis decompoſuerat, reſtituit.

Illam calculi hujus expoſitionem hoc loco afferam, quæ eſt apud *Montuclam*, in Hiſtoria Mathematicorum, vol. ſecund. pag. 352. quam ut hic inſeram, facit ejus perſpicuitas, ac brevitas.

„ Supponit *Leibnitius*, eſſe magnitudines aliquas infinitè „ parvas, relatè ad alias magnitudines, adeo ut priores negligi poſſint habita ratione ſecundarum, ſine ſenſibili errore. Hic tamen non conſiſtit. Sunt in hoc ſyſtemate „ infinitè parva infinitè parvorum, ſeu infiniteſima ſecundi „ ordinis, quæ pariter *negligibilia* ſunt, relatè ad infiniteſima primi. Ita ſumendo in curva tres ordinatas infinitè „ proximas, differentia cujuſque a proxima ſua, eſt quid infinitè parvum primi ordinis; quod efficit duas differentias „ infinitè parvas, & ſucceſſivas. Jam verò hæc duo infinitè „ parva differunt inter ſe quantitate infinitè parva, relatè ad „ illa; en, juxta *Leibnitium*, infinitè parvum ſecundi ordinis. Atque hæc eſt cauſa, quamobrem hic calculus *infiniteſimalis* appellatus fuerit. Sed ſi quid hoc principium, „ ejuſque notiones exhibent auribus Geometricis durius, „ tantummodo in terminis eſt. Nihil eſt aliud, quàm modus „ loquendi ad circumlocutiones vitandas adhibitus, qui tamen in nullum errorem inducere poteſt. Quod demonſtrabitur poſt indicatum ratiocinandi modum, quo calculus „ differentialis conficitur.

„ Propoſita quantitate variabili x, deſignatur ejus incrementum infinitè parvum, vel ejus differentialis per dx. „ Hoc poſito, quæratur incrementum infinite parvum quantitatis x^2, v. gr. dum x fit $x + dx$, patet x^2 evaſurum „ $(x + dx)^2$ ſeu $x^2 + 2xdx + dx^2$. Igitur incrementum „ quantitatis x^2 erit $2x\,dx + dx^2$. At verò, ait *Leibnitius*,

„ dx^2

„ dx^2 eſt infinitè parvum, ſi comparetur cum $2x\,dx$, quo„niam prius eſt rectangulum duarum dimenſionum infinitè „parvarum, dum ſecundum unam tantùm habet hujus generis: „Ergo negligi poteſt dx^2 ſine errore; ita incrementum hu„jus x^2 eſt $2xdx$. Demonſtratur item, differentialem quan„titatis xy eſſe $y\,dx + x\,dy$, non autem $y\,dx + xdy + dxdy$. „Nam $dx\,dy$ eſt infinitè parvum relatè ad $y\,dx$, aut $x\,dy$. „Ea omnia, etſi ſpecie tenus contra rigorem Geometricum, „non ideo tamen minùs vera ſunt, quemadmodum demon„ſtrabimus.

„Re enim vera *Leibnitius* quaſdam magnitudines negli„gens, nihil præterea fecit, quod familiare jam non eſſet „Analyſtis, atque Geometris. Quæcumque quantitas in qui„buſdam circumſtantiis fieret minor aliqua magnitudine aſ„ſignabili, utcumque parva, nulla in iiſdem circumſtantiis „cenſebatur. Ita continuè duplicando numerum laterum „polygoni circulo inſcripti, cenſebantur circulus, & poly„gonum tamquam ſe invicem tandem confundentia; nulla „ratione habita exiguorum ſegmentorum, quæ utriuſque „differentiam conſtituunt. Namque demonſtrabatur, ſum„mam omnium horum ſegmentorum decreſcere, quouſque „fieret minor quacumque quantitate aſſignabili. Eadem pla„nè eſt ſpecies, ac ratio infinitè parvorum *Leibnitii*. Prout „dx minuitur in præcedenti exemplo, ratio quam habet „dx^2 ad $2x\,dx$, minuitur, ac tandem fit minor quacumque „ratione aſſignabili, quum dx fit minor quacumque quan„titate data. Cenſeri igitur nequit dx^2 niſi tamquam nihil „comparatum cum $2x\,dx$; adeoque dx, $2x\,dx$ exprimunt „reſpectivè incrementa quantitatum x, & x^2, quando hæc „incrementa ſunt infinitè parva, hoc eſt quum in nihilum „abeunt. Cæterum omnia ita ſe habent in calculo differen„tiali, ut in calculo fluxionum: Neque enim differunt niſi „notatione, & modo, quo eorum auctores fundamentale „illorum principium intuiti ſunt. Tantum mutandi eſſent „$\dot{x}$, $\dot{y}$, $\ddot{x}$ &c. in dx, dy, ddx &c. atque ita eædem con„ſequentiæ, eædem calculi regulæ habebuntur.“ Dif-

Difficilia problemata, quæ *Leibnitius* aliis quandoque, & quæ ei viciſſim præſtantiſſimi illius ætatis Geometræ propoſuerunt, ab eo ſemper feliciſſimè ſoluta, conſtantem ei gloriam pepererunt tamdiu duraturam, quamdiu ſcientiæ ipſæ vivent, quas præclariſſimis commentationibus ſuis auxit, atque ditavit. En de tot unum ab ipſo propoſitum eo conſilio, ut confidentiam minueret Carteſianorum, qui Geometriæ ab Auctore ſuo traditæ principiis nimium fidebant, neque ſatis æſtimabant nova *Leibnitii* inventa, aliorumque excellentium illius ævi Calculatorum (n). Conſtat apud omnes, corpus ſibi relictum percurrere ſive in perpendiculari linea, ſive ſuper planum inclinatum quodcumque ſpatia æquali tempore eo majora, quo longiùs recedit ab eo puncto, unde deſcendere cœpit. Conſtat quoque, corpus tanto plus temporis inſumere ad eamdem lineam percurrendam determinata quadam velocitate, quanto illa magis ad horizontem inclinata eſt. Igitur curva eſt quædam ejuſmodi, ut, obliquitate differentium ejus partium compenſante velocitatem, qua eæ percurrerentur, mobile per eam uniformi gradu ab horizontali recedet, ſive ſpatia æqualia ad perpendicularem lineam exacta, percurret. Hæc eſt curva, quam *Leibnitius* *Iſochronam* appellavit; atque de ejus natura invenienda in hoc problemate agebatur. Contigit verò re ipſa, quod *Leibnitius* præviderat, ut Carteſiani problema ſolvere non poſſent; atque ipſemet, poſteaquam diu, ac fruſtra exſpectaſſet, ſolutionem exhibuit (o). Reperitur quidem menſ. Octobr. 1687. ejuſdem problematis ſolutio, ſed non ab aliquo eorum data, quibus negotium faceſſere voluerat

(n) Nouvelles de la République des Lettres Sept. 1687. Vide N. XXI. Schediaſma, cui titulus: Réponſe de Mr. de *Leibniz* à la remarque de Mr. l'*Abbé de Conti*, où il prétend ſoutenir une Loi de la Nature avancée par Mr. *Deſcartes* Sept. 1687.

(o) De Linea Iſochrona in qua grave ſine acceleratione deſcendit, & de controverſia cum Domino *Abbate Conti* April. 1689. Vid. N. XXV.

voluerat *Leibnitius*. Tradidit eam celeberrimus *Hugenius*, calculo differentiali non adhibito.

Vivianus inſignis Italus Geometra, & *Galilæi* diſcipulus, quum ſui temporis Analyſtas provocare vellet, problema propoſuit non minùs novum, quàm difficile: Teſtudinem hemiſphæricam quatuor æqualibus feneſtris ita perfodere, ut reliqua teſtudinis ſuperficies abſolutè quadrabilis eſſet; addiditque eam ſolutionem ab arcana ſcientia illuſtrium ejus ætatis Analyſtarum exſpectari. Et re quidem vera nova methodus, hac oblata occaſione, enituit. Pluribus enim modis, quo die ipſo primum vidit, problema ſolvit *Leibnitius* (p).

Eodem fermè tempore celebri *catenulæ* problemati a *Jac. Bernoullio* propoſito, auctor noſter ſatisfecit: Invenire quamnam curvam deſcriberet chorda infinitè tenuis, quæ laxè extremis ſuis ſuſpenſa eſſet. Hoc erat problema longè difficillimum, neque quiſpiam fuit, præter *Leibnitium*, *Hugenium*, & *Jo. Bernoullium*, qui illud, non fruſtra, tentare auſus fuerit (q).

Aliam item quæſtionem non minus implicatam ſolvit a *Jo. Bernoullio* propoſitam, in qua agebatur de curva invenienda ejuſmodi, ut omnes ejus tangentes ad axem terminatæ, ſemper in data ratione eſſent cum partibus axis interceptis inter curvam, ac tangentes (r).

Denique ex paucorum illorum numero fuit, qui ſolutionem invenerunt celebris problematis (a *Joanne Bernoullio* pariter propoſiti) celerrimi, vel breviſſimi deſcenſus. Duobus punctis datis, quæ nec in eadem perpendiculari, neque in

 eadem

(p) Conſtructio teſtudinis quadrabilis hemiſphæricæ 1692. Vid. N. xxxvi.

(q) De ſolutionibus problematis Catenarii 1691. Et de la Chainette, ou ſolution d'un Problême fameux pour ſervir d'eſſai à une nouvelle analyſe des infinis. Mars 1692. & ſchediaſm. de linea, in quam flexile &c. Vid. NN. xxx. xxxi. xxxiv.

(r) Communicatio ſuæ pariter, duarumque alienarum ſolutionum problematis curvæ celerrimi deſcenſus, unà cum ſolutione ſua Problematis alterius. Maji 1697. Vid. N. lvi.

eadem horizontali eſſent, quærebatur linea, per quam corpus ab uno puncto ad alterum cadens, quàm minimum poſſet, tempus inſumeret. Eam ſolutionem in eodem ſchediaſmate mox citato Maji 1697 exhibuit, ſtatim ac ferè problema cognovit. Et quamquam illam edens intra præſcriptum tempus, poſſet aliis eruditis illius ævi gloriam præripere reſoluti problematis nequicquam a *Galilæo* tentati, tantùm publicam utilitatem ſuis privatis rationibus antepoſuit, ut etiam *Bernoullium* rogarit, tempus ad ſex menſes proferret; quod in cauſa fuit, cur *Neutonus*, Marchio *Hoſpitalis*, ac *Bernoullius* ſenior ſolutionem quiſque ſuam exhiberet. Juvat hic animadvertere, ſolutiones ferè omnes horum problematum, quæ fruſtra antea Mathematicorum ingenia exercuerant, fructus novæ Analyſeos fuiſſe a *Neutono*, ac *Leibnitio* repertæ.

Silentio hic prætereunda non eſt Arithmetica Binaria, quam in uſum vocare Auctor noſter conſtituerat in calculis quibuſdam; de qua plura Lector in hoc volumine reperiet. Duas tantum hæc Arithmetica notas habet 0, & 1, per quas numeri omnes ſcribi poſſunt; rationemque variandi exhibet omnium ſimpliciſſimam, quum duo tantum notæ adſint. Juxta novam hanc Arithmeticam 1 eſſet 1, 10 valeret 2, 11 eſſet 3, 100 autem 4, 101 exprimeret 5, atque ita porrò. Eam utiliſſimam cenſebat noſter ad numerorum ſcientiam perficiendam, quia cuncta in ea per periodos progrediuntur, atque hoc maximi momenti credebat eſſe, quod potentiæ ejuſdem gradus factæ per elevationem numerorum rationalium (omnibus ordine poſitis, utcumque elevatus hic gradus ſit) periodos majores non haberent, quam numeri ipſi naturales, qui eorum radices ſunt. Quum *Leibnitius* hanc arithmeticam communicavit cum P. *Bouveto* apud Sinenſes Miſſionario, agnovit hic continuo, explicari per eam characteres Imperatori *Fohi*, conſtantes pluribus integris, ac fractis lineis. Reperit lineas haſce nihil fuiſſe aliud, quàm ſeriem numerorum juxta principia novæ *L ibnitianæ*

nitianæ arithmeticæ expreſſorum ; integra linea —— notæ 1, lineaque fracta — — notæ o reſpondentibus.

Volumen integrum ſcribendum eſſet, ſi hiſtoriam perſequi vacaret eorum, quæ in re Mathematica Auctor noſter commentatus eſt. Non ſolùm vulgata omnia hujus generis ſcripta in hoc volumine congeſta reperientur, ſed plura alia inſuper nec nominata, nec cognita iis ipſis, qui vel vitam ejus literariam literis mandarunt, vel Leibnitianorum operum catalogum edidere. Omnia diſpoſita ſunt ordine temporum, quibus ab Auctore in lucem emiſſa fuere. Hæc enim methodus omnium utiliſſima viſa eſt ad indicandam progreſſuum ſeriem, quibus in hac diſciplina longiùs in dies proceſſit. Jam verò ſi eruditi animum velint advertere ad *Leibnitiani* nominis celebritatem, utilitatemque omnem ex ejus lucubrationibus unà collectis ad Matheſeos ſtudia redundaturam, opuſculorum, quæ hic continentur, multitudinem, ad eam demum, quam Editor curam adhibuit.

HISTORIA INVENTIONIS
CALCULI DIFFERENTIALIS,

ex vitâ Leibnitii *a Dn.* Jaucourt *ſcripta.*

METhodus calculi differentialis cognitionem noſtram evehit in infinitum, & longè ſupra limites, quibus antiqua Geometria incluſa erat. Eſt ſcientia planè nova, ſub finem ſæculi præteriti enata, admodum ampla, admodum ſubtilis & tuta. Eſt detectio novi mundi, hactenus incogniti, aditu difficilis, & ex quo immenſæ perceptæ ſunt divitiæ. Nolo nunc exponere commoda hujus calculi; gloria, illius inventioni conſecrata, longè maxima eſt, & æmulatio, quam excitavit inter duos primarios noſtri ſæculi Mathematicos, *Leibnitium* & *Neutonum*, vel potiùs inter Germaniam atque Angliam, plus ipſi laudis adfert, quàm ornatiſſimæ diſputationes unquam polliceri queunt. Limites, quibus operam meam circumſcripſi, non concedunt notiſſimam hancce diſputationem per partes tractare: acquieſcam in ſuccinctæ Hiſtoriæ traditione, ſepoſiturus omnes conſiderationes, omnes peregrinas digreſſiones, enarrationemque ex meris monumentis, hactenus ab utraque parte productis, mutuo accepturus.

Fortè non opus eſt adnotare, duos hos illuſtres Geometras eadem uti methodo Analyſeos ſub nominibus & characteribus diverſis; factum in omnium ore verſatur. *Neutonus* & Mathematici Angli poſt eum, nuncupant methodum hanc METHODUM FLUXIONUM; & *Leibnitius* nomen illi indidit CALCULI DIFFERENTIALIS, in quo ipſum ſecuti ſunt Geome-

træ-

træ ferè omnes terrarum peregrinarum. Cæterùm uterque eadem ratione utitur in operationibus Geometricis, & via progreſſionum in infinitum, cum hoc tantèm diſcrimine, ut *Leibnitius* ſtatim amplexaretur Syſtema infinitè parvorum in omni rigore Geometrico, eaque re deinceps ipſe, ut videtur, perterritus, quantitates infiniteſimales haud amplius ſumeret pro notis excurrentibus, quemadmodum ſemper fecit *Neutonus*, ſed pro quantitatibus incomparabiliter, aut indefinitè parvis; mitigatio rei ab illis ipſis rejecta, qui calculum ab eó mutuati ſunt.

Primus calculi regulas edidit in Actis Lipſienſibus anni MDCLXXXIV (s) *Leibnitius*. Anno MDCLXXXVII. adparuit præclarum Opus Latinum *Neutoni* de Principiis Mathematicis Philoſophiæ Naturalis (t), Opus fere in totum eodem calculo nixum. Ibi in ſpecie reperiuntur Principia Methodi Fluxionum in ſecundo Lemmate Libri II. in Lemmate, cui ſequens Scholium adnectere Auctori placuit (u). » In litteris, quæ mihi cum Geometra peritiſſimo, *G. G. Leibnitio*, annis abhinc decem intercedebant (x), cùm ſignificarem, me compotem eſſe methodi determinandi Maximas & Minimas, ducendi tangentes, & ſimilia peragendi, quæ in terminis ſurdis æquè ac in rationalibus procederet, & litteris tranſpoſitis, hanc ſententiam involventibus, (data æquatione, quotcunque fluentes quantitates involvente, fluxiones invenire & vice verſa) eandem celarem; reſcripſit Vir Clariſſimus, ſe quoque in ejuſmodi methodum incidiſſe: methodum ſuam communicavit, a mea vix abludentem, præterquam in verborum & nota-

(s) Octobr. ſub. hoc tit. *Nova Methodus pro maximis & minimis, itemque tangentibus, quæ nec fractas, nec irrationales quantitates moratur, & ſingulare pro illis Calculi genus.* Vid. N. XIII.

(t) *Philoſophiæ Naturalis Principia Mathematica, ab Iſ. Newtono.* Londini, 1687. in 4.

(u) Pag. 253. & 254.

(x) Nimirum ope *Oldenburgii*.

„ rum formulis. “

Epiſtolæ, quibus *Neutonus Leibnitio* aperuit, ſe poſſidere methodum determinandi quantitates maximas aut minimas, ducendi tangentes, &c. ſcriptæ ſunt anno MDCLXXVI. & quidem altera die XIII. Junii & altera d. XXIV. Octobr. (y). Sed ultima harum epiſtolarum oſtendit, *Neutonum* jam quinque annis ante, hoc eſt, anno MDCLXXI. operam dediſſe Tractatui, cui Methodus Fluxionum, & conſequentiarum adjuncta erat.

Interim vox publici communis *Leibnitio* gloriam inventi calculi differentialis adjudicabat. Nemo eſt neſcius, qua celeritate calculus hic in orbe erudito ſe expanderit. In Gallia illuſtris Marchio *de l'Hôpital* uſque ad tentorium ſuum huic ſtudio incubuit, & in tradendis ejus myſteriis ſecretiſſimis laboravit (z). In Batavia *Hugenius*, qui Geometriam infinitè parvorum tum nondum tractaverat, & tamen ſplendidiſſimam nominis exiſtimationem ſibi paraverat, non poterat non fateri, ſe, in quamcunque etiam partem verſet oculos, cum admiratione intueri amplitudinem & fœcunditatem Algorithmi Infiniteſimalis. In Helvetia, celeberrimi Fratres, *Jacobus* & *Joannes Bernoullii*, cùm inter primos omnes Artis hujus uſus pervidiſſent, ſtatim arcanum illius ſcrutando attingere ſtuduerunt, ipſoque *Leibnitio* calcar addente, quàm feliciſſimè & ſplendidiſſimè in eo verſati ſunt, ita ut anno MDCXCV. methodus differentialis eorum ope jam in tota Europa invaleſceret ſub nomine *Leibnitii*, & cum characteribus ab eo inventis. Nominabatur hæc methodus etiam communiter Calculus *Leibnitii*, uti dicere conſuevimus Spiralem *Archimedis*, Conchoidem *Nicomedis*, Ciſſoidem *Dioclis*, Devolutas *Hugenii*.

Geometræ Angli tam ſingulares prærogativas, *Leibnitio* colla-

(y) Utraque reperiuntur in N. v. celebratiſſimo ſuo Opere de Analyſi

(z) Executus iſta eſt A. 1696. in Infinitè Parvorum.

collatas, intueri ſine angore nolebant, ut quæ manifeſtè detrahere videbantur meritis, quæ in hoc certamine *Neutonus* ſibi poſcebat. Accidit inde, ut *Joannes Walliſius*, magnus Mathematicus, & quem jam elegans Tractatus Algebraicus (aa) publico non ignotum eſſe ſivit, cùm anno MDCXCV. duo prima volumina Operum ſuorum Mathematicorum (bb) edidiſſet, expreſsè in additione quadam, Præfationi primi Tomi adnexa, ſignificare haud vereretur, methodum fluxionum in fundo rerum methodo differentiarum Leibnitianarum, uti communiter vocaretur, ſimilem, a *Neutono* inventam eſſe ante annum MDCLXXI. nec verò determinaret ſimul Epocham methodi Leibnitianæ, neque decideret, uter primus illius inventor eſſet, contentus, ejus rei ſaltem aliquam mentionem facere in gratiam *Neutoni.*

Sed aliquot annis poſt, *Nicolaus Fatio Duillierius*, qui ex patria ſua, Geneva, in Angliam ſe recepit, ibique ſtudium Mathematum non ſine laude tractavit, majore cum adſeveratione & fiducia de ea cauſa loquebatur. Namque in Scripto de Linea breviſſimi deſcenſus (cc) anno MDCXCIX. edito, ita mentem ſuam expreſſit: „*Neutonum*, ait (dd), primum „ac pluribus annis vetuſtiſſimum hujus Calculi inventorem, „ipſa rerum evidentia coactus, agnoſco; a quo utrum quic„quam mutuatus ſit *Leibnitius*, ſecundus ejus Inventor, ma„lo eorum, quàm meum ſit judicium, quibus viſæ fuerint „*Neutoni* litteræ, aliique quidam Manuſcripti Codices.«

Certa hæc diſtinctio primi & ſecundi Inventoris, & inprimis conjectura, quam adſperſerat, non ſivit *Leibnitium* prorſus rem premere ſilentio, quamvis ipſi in aprico eſſe videre-

(aa) *Treatiſe of Algebra both Hiſtorical and Practical, by* John Wallis. London. 1685. in folio.

(bb) Joh. Wallis, *S. T. D. Geometriæ Prof. Saviliani in Acad. Oxon. Opera Mathematica.* Oxoniæ 1695. in fol.

(cc) Tit. Nicolai Fatio Duillierii, R. S. S. *Lineæ breviſſimi deſcenſus Inveſtigatio Geometrica duplex; Cui addita eſt Inveſtigatio Geometrica ſolidi rotundi, in quo minima fit reſiſtentia.* Londini 1699. in 4. pag. 24.

(dd) Pag. 3.

videretur, lecto *Fatii* libro, Auctorem longè plus in eo adfectus & invidiæ contra *Leibnitium* & *Bernoullios* oſtendere, quàm amoris erga veritatem & ardoris quoque pro cauſa Newtoniana.

Igitur *Leibnitius* hunc ultimum tantùm provocare eam ob rem voluit in ingenioſiſſima & politiſſima ſua reſponſione (ee) quam *Fatio* dedit. „ Certè, (inquit ſermonem ad „ *Neutonum* flectens) Vir egregius aliquoties locutus amicis „ meis, ſemper bene de me ſentire viſus eſt, neque un- „ quam, quod ſciam, querelas jecit: publicè autem ita me- „ cum egit, ut iniquus ſim, ſi querar. Ego verò libenter „ ejus ingentia merita, oblatis occaſionibus, prædicavi; & „ ipſe ſcit unus omnium optimè, ſatiſque indicavit publicè, „ cùm ſua Mathematica Naturæ Principia publicaret, anno „ MDCLXXXVII. nova quædam Inventa Geometrica, quæ ipſi „ communia mecum fuere, neutrum luci ab altero accep- „ tæ, ſed meditationibus quemque ſuis debere, & a me „ jam decennio ante expoſita fuiſſe. Certè cùm Elementa „ Calculi mea edidi anno MDCLXXXIV. ne conſtabat quidem „ mihi aliud de inventis ejus in hoc genere, quàm quod „ ipſe olim ſignificaverat in Litteris, poſſe ſe tangentes in- „ venire non ſublatis irrationalibus; quod *Hugenius* quoque „ ſe poſſe mihi ſignificavit poſtea, etſi cæterorum iſtius Cal- „ culi adhuc expers: ſed majora multo conſecutum *Neuto-* „ *num*, viſo demum libro Principiorum ejus, ſatis intellexi. „ Calculum tamen, Differentiali tam ſimilem, ab eo exer- „ ceri, non antè didicimus, quàm cùm non ita pridem, „ magni Geometræ, *Jo. Walliſii*, Operum volumina pri- „ mum & ſecundum prodiere. “

In hoc ſtatu res manſerunt inter *Leibnitium* & *Fatium*, liſque viſa eſt finem ſortita; at ſuſpenſa tantùm erat uſque ad annum MDCCV, quo tempore denuò exarſit caſu, quem rela-

(ee) Inſerta legitur Actis Lipſienſibus, Maj. 1700. ſub tit. *G. G. L. Reſponſio ad Nicol. Fatii Duillierii Imputationes*. Pag. 203.

relaturus ſum, quique cauſa aut prætextus belli multo acerbioris evaſit, quàm fuit ſuperius, quod, cum hoc collatum, ſpeciem tantùm levis cujuſdam velitationis habuit.

Calculus infiniteſimalis, manibus celeberrimorum Geometrarum ſubjectus, ad tantum perfectionis gradum in dies properabat, ut res ipſis ſuis inventoribus admirationi eſſet. Atque *Leibnitius*, qui, uti jam ſuprà edocui, primus illius editor, cujuſque methodus characteriſtica ferè paſſim adoptabatur, is etiam erat, quem maxima pars elogiorum petebat, detectioni huic certatim a viris eruditis deſtinatorum. Collectores celebres Actorum Lipſienſium in hac facundia non erant poſtremi. At ſemper tamen *Neutoni* partes cautè obſervabant, qua in re *Leibnitius* illis exemplo fuit. Enimverò cùm nihil non in hoc orbe relationem habeat ad aliud, gloriaque meritorum, ſi quid aliud unquam, huc pertinere videatur; difficile profectò eſt, ſæpe verſari in laudibus, ſine comparatione inſtituenda; comparationes autem ſunt paſſus lubrici, quæque ad elogia progrediuntur, parum tenent leges æquilibrii: en infortunium.

Neutonus imprimi curavit anno MDCCIV. ſub finem Optices ſuæ, Anglicè primitùs ſcriptæ, Tractatum Latinum de Quadratura Curvilinearum (ff); Tractatum Methodo Fluxionum innitentem, quam Auctor in introductione hujus Libri adſeverat ſe inveniſſe anno MDCLXV., ſeu MDCLXVI. Recenſuerunt hoc Opus in Diario ſuo, menſe Januario A. MDCCV. Conditores Actorum Eruditorum, quos ſtatim adlegare placet (gg).

Ibi, fortaſſe paullo minùs attenti circa ſuam ipſorum mentem, vel circa cogitationes privatas, Methodum Fluxionum cùm Methodo Differentiarum ita compararunt. » Cujus Calculi Elementa ab Inventore D. *Godefrido Guilielmo Leibnitio* in his Actis ſunt tradita, variique uſus tum ab ipſo, » tum

(ff) Iſaaci Newtoni *Tractatus duo, de Speciebus & Magnitudine Figurarum Curvilinearum.* Lond. 1704. in 4.

(gg) Pag. 30.

„ tum a D. *Fratribus Bernoulliis*, tum & D. Marchione *Hoſ-*
„ *pitalio*, (cujus nuper exſtincti immaturam mortem omnes
„ magnopere dolere debent, qui profundioris doctrinæ pro-
„ fectum amant) ſunt oſtenſi. Pro differentiis igitur Leib-
„ nitianis Dominus *Neutonus* adhibet, ſemperque adhibuit
„ fluxiones, quæ ſint quàm proximè ut fluentium augmenta
„ æqualibus temporis particulis quàm minimis genita; iiſque
„ tum in ſuis Principiis Naturæ Mathematicis, tum in aliis
„ poſtea editis eleganter eſt uſus, quemadmodum & *Hono-*
„ *ratus Fabrius* in ſua Synopſi Geometrica motuum progreſ-
„ ſus Cavallerianæ Methodo ſubſtituit. «

Hæc comparatio, utut fortè ſatis innocua, ſignum belli fuit. Adſeclæ Newtoniani inde collegerunt, quemadmodum *P. Honoratus Fabrius* non ſit ſuæ Methodi inventor, ſed a *Cavallerio* illam mutuo acceperit, ita etiam Conditores Actorum Lipſienſium voluiſſe innuere, *Neutonum* non magis eſſe Inventorem Calculi Fluxionum, ſed illam a *Leibnitio* ſumſiſſe.

Interim *Leibnitius* reſpondit, pro ſua ſententia ne vocabulum quidem in toto citato loco reperiri, quod dicat, *Neutonum* Calculum ſuum Leibnitiano ſuperinduxiſſe. Nudas hasce loquendi formas, *Dominus Neutonus adhibet, ſemperque adhibuit*, videri de induſtria adjectas eſſe, ut ſignificarent, *Neutonum* jam ante editionem ſui Calculi uſum fuiſſe Fluxionibus; quando verò additum fuerit, ſermone ad *P. Fabrium* converſo, qui *Cavallerium* excipiens, expreſſionibus illius mutatis *ſubſtituerit* Hypotheſin ſuam, diſcrimen in eo ſe oſtendere, quòd D. *Neutonus* ſemper adhibuerit ſuam Methodum, cùm contra *P. Fabrius* ſuam tantùm ad imitationem alterius conflaverit. Addidit, ſi verba hæc viſa fuerint obſcuriora, potuiſſe, antequàm ipſi lis intentaretur, eorum rogari explicationem; atque Auctores Actorum faciles ſine dubio futuros fuiſſe in repetendis iis, quæ alias multoties dixerint, credi *Neutonum* ad hanc inventionem ſuo marte perveniſſe. Denique profeſſus eſt, ſe Auctorem hu-

jus comparationis non eſſe, nec adoptare ſenſum illi in Anglia tribui ſolitum, ſed, ſi aliquo modo illum ſibi ſumeret, fieri id animo, a ſtudio ſeminandi diſſidia prorſus alieno.

Quicquid horum verò fuerit, ignis, ut videbatur, non bene exſtinctus, redintegravit vires ſuas; ventum eſt ad bellum, in quo *Joannes Keillius*, Medicinæ Doctor & Profeſſor Aſtronomiæ Oxonienſis, Anglorum anteſignanus, non defendere ſuos ſolùm, ſed laceſſere etiam contrariæ partis alumnos cœpit. Neque enim ſatis habebat in Commentatione quadam Latina de Legibus Virium Centripetarum, Tranſactionibus Philoſophicis anni MDCCVIII. (hh) inſerta, contendere, Equitem *Neutonum* eſſe Inventorem originarium, aut primum Inventorem Methodi Fluxionum; verùm is inſuper adſeveravit firmiter, *Leibnitium* ab illo Methodum hanc derivaſſe, mutatis ejus nomine & characteribus.

Videns *Leibnitius* ſcriptum Keillianum, in quo tam apertè plagii inſimulabatur, iterato hoc impetu haud parum commotus eſt, cùm nihil minus cogitaret, in ipſum facto ab homine in Anglia celebri, nec apud exteros incognito. Neceſſarium hinc judicavit, & ingenium ſuum, & animum, & gloriam inventionis, & exiſtimationem probitatis ſibi vindicare. Ictum enim, quem ita acceperat, videbatur moleſtiſſimè ferre, quemadmodum ipſe fatetur, ſeque ea re non parum offenſum fuiſſe nunquam diſſimulavit. Teſtem itaque citavit candorem ſuum, Publicum, *Neutonum* ipſum, qui juxta illius verba de gloria inventionis cum eo controverſiam nunquam habuit. Poſtremò, cùm uterque, & *Leibnitius*, & *Keillius*, membra eſſent Societatis Regiæ, querelas de adcuſatore ſuo ad hanc eruditam Societatem detulit, epiſtola IVto Non. Mart. MDCCXI. N. S. data, & concredita *Joanni Sloane*, tum Secretario, nunc Præſidi Societatis, homini ob amorem ſcientiarum, ob fervidum illis inſerviendi ſtudium, ob præclarum Hiſtoriæ Naturalis Jamai-

(hh) Septembr. & Octobr. pag. 174. & ſeq. ſub indice: *J. Keill De Legibus Virium Centripetarum.*

cæ Opus, magnificumque raritatum armarium, in tota Europa celebratiſſimo.

Keillius, cum quo communicabatur epiſtola Leibnitiana, ſententiam ſuam defendit, noviſque etiam rationibus eam roborare promiſit. Facile eſt divinare, quantopere controverſia invaluerit. Eventus is fuit, ut duobus rem verbis complectar: ſermones apologetici in forma epiſtolari quotidie ardentiores ſe excipiebant, & primùm inter *Keillium* & *Leibnitium*, poſtea verò & inter hunc atque *Neutonum*, qui palam in arenam deſcendit. Societas Regia, quæ judicare cauſam debebat, conſtituit Commiſſarios Anglos & ex nationibus exteris, ut ſub examen illi revocarent priſcas eruditorum Mathematicorum litteras, quæ reperiri in hac materia poſſent, inprimis verò Manuſcripta *Collinſii*, cui cum ſummis ſui temporis Geometris interceſſit commercium. Mandavit inſuper Societas Commiſſariis ſuis, ut ad ipſam commentationes mitterent, ad hanc, de qua ſermo fuit, materiam pertinentes, illiſque ſententiam ſuam adjungerent.

Finito examine, Commiſſarii pronunciarunt judicium hoc modo. Methodum Differentialem perfectè æqualem eſſe Methodo Fluxionum, exceptis ejus nomine & characteribus. Non videri, *Leibnitio* de hac methodo quidquam innotuiſſe ante *Neutoni* epiſtolam, ſub finem anni MDCLXXII. ſcriptam, quæ ad ipſum a *Collinſio* Pariſios miſſa, & in qua Calculus Fluxionum ſatis explicatè traditus fuerit, ad virum tam intelligentem omnibus requiſitis neceſſariis inſtruendum. Monſtrare epiſtolam *Neutoni* d. XIII. Jun. MDCLXXVI. ipſum poſſediſſe Methodum fluxionum quinque & quod excedit, annis ante, quàm data hæc epiſtola fuiſſet: quin & conſtare illius Tractatu prodeunte ſub indice, *Analyſis per æquationes numero terminorum infinitas*, (ii) quem *Barrovius* communicavit cum *Collinſio*, Auctorem Methodum ſuam inve-

(ii) Tractatus hic Newtonianus eodem anno 1711. per *Jones* vulgatus eſt, in Collectione, cui titulus: *Analyſis per Quantitatum Series, Fluxiones, ac Differentias, cum enumeratione Linearum tertii ordinis.* in 4.

invenіſſe ante annum MDCLXIX. ſicque quindecim annos ante, quàm *Leibnitius* quidquam de hoc argumento Actis Lipſienſibus inſeruiſſet. Ex omnibus hiſce rationibus collegerunt tandem, *Neutonum* primum inventorem eſſe, nec *Keillium*, hoc tuentem, *Leibnitii* famæ detraxiſſe.

Societas vero Regia ad finem anni MDCCXII. judicium hoc, ſeu relationem Commiſſariorum integram cum additione ſynoptica omnium huc ſpectantium Commentationum, typis imprimi curavit (kk).

Audivit hæc *Leibnitius*, Viennæ tum agens, priuſquàm libri ipſius copia daretur, &, dum comperit, celeberrimo *Joanni Bernoullio*, qui inventionis hujus peritiſſimus, plus, quàm reliqui ferè omnes, elegantiſſimis ſuis detectionibus eam valere fecit, libri exemplar aliquod miſſum eſſe, rogavit ipſum, ut ſibi, quid ſentiat, aperiret.

Bernoullius, uti *Leibnitius* Comiti *Bothmerio* (ll) indicavit, reſponſum illi dedit litteris, Baſileæ d. VII. Jun. MDCCXIII. exaratis, in quibus oſtendit, vero videri ſimile, *Neutonum* condidiſſe Calculum ſuum, poſtquàm differentialem jam vidiſſet, quod multoties in Operibus ſuis occaſionem habuerit adhibendi iſtius Calculi, cujus tamen ne veſtigium quidem adparuiſſet; immò verò commiſiſſe ipſum errores, qui a vera Calculi intelligentia quàm maximè alieni eſſe viderentur.

(kk) Inſcriptio: *Commercium Epiſtolicum* D. Joh. Collins *& aliorum de Analyſi promota, juſſu Societatis Regiæ in lucem editum.* Londini, 1712. in 4. p. 112. Tranſactiones Philoſophicæ ſuppeditant id in compendio, ex quibus deinceps in linguam Gallicam migravit, & Londini iterum prodiit. Tit. Epitome Libri, qui inſcribitur: *Commercium Epiſtolicum Collinſii & aliorum de Analyſi promota*, publicatum mandato Societatis Regiæ occaſione diſputationis inter *Leibnitium* & Dr. *Keillium* ortæ, de jure inventionis *Methodi Fluxionum*, a quibuſdam *Methodi Differentialis* nomine inſignitæ, in 8. pag. 38.

Illa ipſa Commentatio a *Keillio* miſſa fuit Auctoribus Diarii Litterarii, qui eam inſeri curarunt Tomo VII. Diarii, pag. 114-158. & 344-365.

(ll) V. Tom. II. *Collectionis variarum Commentationum de Philoſophia*; &c.

rentur. „Unus ex amicis meis, addit *Leibnitius*, in publi„cum prodire juſſit hanc epiſtolam cum adnotationibus, „nec lubuit mihi, aliis negotiis ſatis onerato, rem ampliùs „exagitare, præſertim cùm nec *Neutonus* ipſe cauſam ſuam „peroraverit; credidi proinde, ſufficere, ſi adſeclarum il„lius clamoribus oppoſuerim judicium viri doctiſſimi, & a „ſtudio partium alieniſſimi, *Bernoullii.*“

Epiſtola verò, quam volumus, quæque in Germania publicata, loco generalis reſponſionis ad Commercium Epiſtolicum in Anglia eſſe poterat, Latina exiit facie, & ſtatim in mobili ſcheda adparuit, data d. xxix. Jul. mdccxiii. Id revera meretur admirationem, quod hactenus incerti ſimus, num epiſtolæ Auctor *Bernoullius*, nec ne? Non veniſſe illam ex manibus illuſtris hujus Mathematici, conjici poſſe videtur ex eo, quòd ille citetur in perſona tertia, quodque cumulet in eum elogia, meritis ſuis ſine dubio æqualia. „Quemadmodum, ait epiſtola, ab eminente quodam Ma„thematico dudum notatum eſt.“ Interim mira res eſſet, ſi *Leibnitius* falſo citaſſet, & citaſſet quidem virum adhuc ſuperſtitem, qui exprobrare illi mendacium extemplo potuiſſet. Enim verò numquid minùs eſſet inſolens, ſi idem vir, quem adpellavimus, *Bernoullius*, in litteris a ſua ipſius manu profectis elogia, quæ meretur, ſibi ipſi dixiſſet?

Quaſcunque hic tueberis partes, ſcrupulus videbitur certiſſimus. Ut conjecturâ rem adſequar, num fieri potuit, ut amicus *Leibnitii*, & editor hujus epiſtolæ cum ſuis adnotationibus, hic illic eam immutaret, aliiſque mutationibus & illum locum immiſceret, qui honori eſt *Bernoullio*? Certè locus hic in Gallica hujus epiſtolæ tranſpoſitione, publicata in Novis Litterariis d. xxviii. Dec. mdccxv. (mm) non reperitur. Habes factum rei, forte ſemper, ſi lubet, ulterius & majus lumen requirentis, quamvis equidem haud dubitem ab idonea manu me faculam accepiſſe ſolutioni hujus problematis parem.

Haud

(mm) Pag. 414.

Haud longo poſt tempore, ex quo epiſtola Baſileæ exarata d. VII. Jun. MDCCXIII. & Anonymi (nn) adnotationibus adaucta, inter eruditos diſtracta fuit, *Keillius* iterata in arenam deſcendit defenſione (oo) eaque articulata, erudita, ingenioſa, &, ut conjici poteſt, ſatis ardente.

Eo redactæ res fuerunt, cùm *Joannes Chamberlaine*, Societatis Regiæ Membrum, & poſt eum Abbas *Conti*, officia ſua interponerent ad reconciliandum utriuſque, *Leibnitii* & *Neutoni*, animum. Non poſſunt non laudari conatus ingenui amicorum, moderatione ſua ſe commendantium, qui finire jactatas utrinque querimonias laborarunt; Eruditorum namque diſſidia obſtant progreſſibus Scientiarum, & illuſtrare tantùm ſatagunt facta, publico ſæpe non tam proficua, vel etiam, miſſa illuſtratione, detegunt ſaltem imbecillitates animorum in iis, qui diſſidiorum auctores aut cultores habentur. Interea loci, ubi duo rivales de gloriæ certant amplitudine, quam quiſque ab altera parte violatam exiſtimat, quàm difficilis erit mutua gratiæ reſtitutio, animorumque conjunctio! Gens erudita certi cujuſdam ordinis ſunt inſtar Ambitioſorum Status. Prærogativa potioris loci, eorum tituli, dignitates, nituntur eorundem detectionibus. Hæ ſunt illorum ditiones, & ſolæ plerumque, ſed eo digniores tamen, quòd etiamnum poſt fata ab aliis illuſtris famæ viris eruditis homagium ſibi vindicant, qui hac ex parte clientelari jure iis obſtricti tenentur. *Leibnitius* & *Neutonus*, ſtudioſiſſimi hujus apicis exiſtimationis, & gloriæ ex iſto genere avidiſſimi, jura & privilegia ſua utrinque ſunt tuiti ratione,

(nn) Videantur hæ Adnotationes Anonymi, &c. in Diario Litterario, Tom. II. Part. II. pag. 445.

(oo) Inſcriptio ejus: *Reſponſio* Keillii, *M. D. Profeſſoris Aſtronomiæ Saviliani, data Auctoribus Adnotationum, quas fecerunt ob controverſiam inter* Leibnitium *&* Newtonum *excitatam, quæque reperiuntur in Diario Litterario Hagenſi, Novembr. & Decembr.* 1713. Adparuit hæc extemplo Londini in lingua Gallica, ſed, cùm nonniſi duodecim exemplaria prælo liberarentur, jam Auctor inſeri curavit Tomo IV. Diarii Litterarii Anno 1714. pag. 319.

ratione, quæ difficultates ad conciliationem ſtitit inſuperabiles. Omnes, quas illi ediderunt, litteræ malum exacerbarunt, tantumque abfuit, ut vulnus reſarcirent, ut potiùs diſcinderent, quemadmodum id, quod enarrare reliquum eſt, nos edocebit.

A. MDCCXIV. *Chamberlaine*, cujus modò mentionem injeci, operam obtulit in componenda hac controverſia, *Leibnitio*que oſtendit, quanto vellet opere ipſum in gratiam cum *Neutono* redeuntem videre, & aliqua ex parte hanc concordiam promovere. *Leibnitius* ea de re egit *Chamberlanio* gratias propter voluntatem illius, ſtudii plenam, delataque officia ſingularia, in litteris ad eum Vienna datis d. XXVIII. April. ejuſdem anni.

Profitetur in hac epiſtola, ipſum non eſſe, qui mutuam amicitiam diremerit; quendam, qui *Keillium* ſe nuncuparit, ipſum contumelioſe adgreſſum in Tranſactionibus Philoſophicis, violatique honoris reſtitutione ab illo poſtulata, rem eo tractam, quaſi ipſe coram Societate cauſam oraſſet, latamque contra ſe ſententiam fuiſſe priùs, quàm auditus fuiſſet, & priuſquam patuiſſet, annon aliquem ex judicibus ſuſpectum haberet? Et quamvis ſibi perſuadere non poſſet, judicium adverſum ſe pronunciatum in loco Conſulti Societatis haberi; tamen illud ipſum judicium a *Neutono* in lucem publicam emiſſum fuiſſe libro manifeſtè ad elevandam exiſtimationem ſuam facto, hincque in Germaniam, Galliam, & Italiam, tanquam nomine Societatis, tranſmiſſo. Addit *Leibnitius*, ſententiam hanc, quæ urgeatur, in orbe litterato paucos adprobatores inventuram, ſeque non dubitare, quin in ipſa Societate ſint membra, huic agendi rationi calculum ſuum denegantia; Gallos etiam, Italos, alioſque haud levis ingenii viros, apertè iſtum modum caſtigare & mirari. „Equidem, pergit ille, *Neutonum* ſemper cum maxima honoris præfatione tractavi, & quamquam nunc adpareat, „adeſſe graves cauſas dubitandi, num iſte inventionem meam „calluerit ante, quàm a me eam accepiſſet, locutus tamen

„de

„ de eo fui, ac ſi ſuo marte aliquid indagaſſet, quod meæ „ methodo ſimile eſſet; verùm enim verò circumventus a „ quibuſdam inconſultis adulatoribus, ratione moleſtiſſima in „ me facere impetum haud intermiſit. Tuum nunc, ait, Vir „ Cl. judicium eſto, a qua parte potiſſimùm exſpectari de- „ beat id, quod ad diſſolvendam hancce controverſiam re- „ quiritur.“

Neutonus ad literas has, quas cum eo communicavit *Chamberlanius*, paucis ita reſpondit (pp): Se non in partem aliquam veniſſe eorum, quæ Dn. *Fatio* contra *Leibnitium* ſcripſerit, in Diſſertatione *De Curvilinea breviſſimi deſcenſus*, ſed annis abhinc novem a *Leibnitio* detractum ſuæ exiſtimationi fuiſſe in Actis Eruditorum Anni MDCCV. (qq) dum ibi haud obſcurè ſignificaſſet, ipſum a ſe, *Leibnitio*, mutuatum eſſe Methodum Fluxionum; *Keillium* in Tranſactionibus Philoſophicis famam ſuam ſolummodo tuitum, necdum ipſum aliquid reſciviſſe de eo loco, quem *Leibnitius* Actis Lipſienſibus inſeruerit, ante adventum primæ ab eo contra *Keillium* exaratæ epiſtolæ, in qua reapſe a ſe contenderit, ut ea, quæ publicaſſet, recantaret. Denique, ſi *Chamberlanius* poſſet illi indicare, quanam in re *Leibnitio* moleſtior fuiſſet, facere illi, quod ſatis eſt, ſe non recuſare, ſed revocare res nolle, quas noverit eſſe veritati conſentaneas: ſeque perſuaſum quoque habere, Delegatum Societatis Regiæ nullam *Leibnitio* injuriam intuliſſe.

Miſſa hæc *Neutoni* epiſtola fuit *Chamberlanio*, a quo illam accepit *Leibnitius* unà cum reſponſo Keilliano ad animadverſiones, Diario litterario inſertas, & exemplo declarationis a Societate Regia d. XX. Maj. MDCCXIV. factæ; nimirum ipſam Commiſſariorum relationem pro plena Societatis ſententia haberi nolle. Hanc declarationem dedit Societas, ſuo-

(pp) Epiſtola quadam ad *Chamberlanium* data, d. 11. Maj. 1714. V. S.

(qq) Locus, quem *Newtonus* innuit, ſupra exhibitus eſt in ipſo Textu.

que diario inferri curavit, ut Publicum doceret, ſe nullas partes ſecutam in hac controverſia, utque diſputationes inde oriundas anteverteret.

Leibnitius, accepto faſciculo, ſcriptum Keillianum, epiſtolam Newtonianam, & exemplum declarationis Societatis Regiæ complectente, *Chamberlanio* reſcripſit, (rr) ſe ipſi debere gratias pro facto penes Societatem Regiam experimento, & acquieſcere etiam in propoſito, quod ſua cauſa Societas ſuſcipere vellet; verùm quod attineat litteras *Neutoni* ſatis impolitas, ſe eas habere pro non ſcriptis, æquè atque ſcriptum *Keillii*, Gallico idiomate impreſſum. Addebat, ſe, cùm viderentur adhuc extare litteræ huc ſpectantes, & nondum publicatæ, inter Oldenburgianas & Collinſianas, optare, ut Societas Regia jubeat eas ſecum communicari, quòd ipſi quoque mens ſit publicare Commercium epiſtolicum, in quo non minùs eas producere velit litteras, quæ contra ipſum urgeri queant, quàm eas, quæ a ſuis ſtent partibus, judicium verò & exiſtimationem rei Publico iri relictum.

Quæ litteræ cùm coram Societate Regia lectæ fuiſſent, monebatur, ultima verba injuria eſſe in Commiſſarios Societatis, ſupponi eos in delectu colligendarum commentationum non ab omni ſtudio partium vacuos fuiſſe. Dum *Neutonus* ipſe librum Commercii epiſtolici in publicum non edidiſſet, nec *Leibnitio*, alterius partis anteſignano, fas eſſe alium pro ſuo evulgare genio. Et quantum ad originarias *Oldenburgii* & *Collinſii* litteras, quas expetere ille videatur, nec earum tranſportationem fieri poſſe; interim tamen exemplarium probè conſignatorum copiam illi dari poſſe, ſi voluerit.

Inter hæc geſta, nobilis & eruditus quidam Venetus, Abbas *Antonius Conti*, in Angliam conceſſit. Accepit hic ibidem a *Leibnitio* reſponſionem ad epiſtolam, in qua ipſum de ſingulari

(rr) Epiſtola Vienna ad ipſum data d. 25. Aug. 1714.

ſingulari opinione, a Dn. *Nigroſoli* in materia de generatione animantium defenſa, conſuluerat. Reſponſioni, quæ nihil, niſi iſtam tam abditam Phyſiologiæ materiam, tractabat, *Leibnitius* adpendicem adjunxit, cui, poſt factam gratulationem de felici ejus in iſta regione adventu, in qua fateatur multum proficere advenas poſſe, utpote dexterrimis ingeniis inſtructa, adnexuit, eos hinc velle propemodum pro ſolis inventoribus haberi, in quo tamen victuros eos eſſe veriſimile non ſit. *Neutonum* ante ipſum Characteriſticam, ſeu Algorithmum infiniteſimalem habuiſſe minimè videri, quemadmodum *Bernoullius* probè judicaverit .... Facile adverſariis fuiſſe, candorem ſuum rationibus coactis & minus germanis oppugnare, ſed non commiſſurum ſe, ut iſti habeant, quo lætentur de reſponſione quadam ad minutas rationes hominum, qui ratione tam ſecus utantur, & alias a quæſtione propoſita tam procul aberrent; commodiùs actum fuiſſe, integras in publicum proferre litteras more *Walliſii*, quàm eas tantùm luci deſtinare, quas crederent ad recipiendas falſas eorum interpretationes ſatis idoneas..... Dolendum, tantum virum, quantus *Neutonus*, incurriſſe in reprehenſionem hominum intelligentium, dum ſuggeſtionibus quorundam adulatorum, qui ciere inter utrumque ſimultates volebant, nimium tribuiſſet.

Non acquieſcit verò *Leibnitius* in querelis hiſce, ſed effundit ſe in vaſtiſſimum campum Critices; adgreditur Matheſin in Anglia obviam, eamque pro communi habet & ſuperficiaria; Metaphyſicam, quam de anguſtis notat limitibus, & generatim Philoſophiam Newtonianam. Carpit ejus opiniones de gravitate, de vacuo, de interventu Dei ad conſervationem ſuarum rerum creatarum, de atomis. Exprobrat, ipſum qualitates Scholaſticorum occultas reducere, aut perpetim miracula ſupponere. Denique eſſe hominem litigioſum, Auctorem ea parte adpetitum, qua ſit ſenſu delicatiſſimo. Finit deinceps adpendicem rogando Abbatem, velit gnaviter excutere Analyſtas Anglos, vel ſuo vel ami-

ci cujuſdam nomine, prolato illis in medium celebri Problemate de Trajectoriis.

Abbas *Conti* cùm non conſultum judicaret adpendicem hanc tenere abſconditam, factum eſt, ut denuo animi, novam nacti materiam, mirum in modum incaleſcerent. Magnos excitavit iſta res motus inter eruditos Londinenſes. Extemplo reſonuit Aula clamoribus Lycei. Tandem Rex, cui ipſa facies amborum illuſtrium horum rivalium nota fuit, quique utrumque ſingulari gratia fovere ſolitus eſt, ex ore Abbatis *Conti* totam audire cauſam avebat, quærens ex eo, numquid *Neutonus* ſine reſponſione, ſilentio prætermiſſurus rem foret? *Neutonus*, Regii colloquii conſcius, apertè deinceps cauſam ſuam peroravit, reſponſionemque datam d. xxvi. Febr. v. s. mdccxvi. Abbati *Conti* obtulit, qui per veredarios eam *Leibnitio* perferendam illico curavit.

Inchoat reſponſionem ſuam *Neutonus* eo, ut ipſum Abbatem *Conti* teſtem citet, quòd Commercium Epiſtolicum nihil contineat, niſi litteras & chartas dudum perſcriptas, conſervatas ad hoc uſque tempus in archivis Societatis Regiæ, aut in Bibliotheca Collinſiana, & quod nominata folia collecta atque publicata fuerint a multis hominibus illuſtribus plurium nationum, hac fini delegatis, & juſſu ipſius Societatis Regiæ convenientibus; quod ideo *Leibnitius* non haberet, cur reſponſionem ſuam detrectaret.

Addit, *Keillium* reſpondiſſe ſcripto Mathematici, ſeu illius, qui nomen Mathematici præ ſe ferebat, quo *Leibnitium* defenſum iverat, dato d. vii. Jun. mdccxiii. inſerto libello cuidam famoſo, ſignato d. xxix. Jul. ejuſdem anni, & in Germania in publicum prodeunti non ſine nomine ſolum Auctoris, ſed & Typographi, & loci, quo ſub prælo ſudaverat; verùm reſponſioni Keillianæ necdum obviam ventum eſſe.

Leibnitium novo uti prætextu ad evitandam reſponſionem, quando dicat, ſe non commiſſurum, ut lætari Angli de reſponſione ſua queant ad puſillas eorum rationes, & tamen,

inverſa

inverſa via, ipſum, *Neutonum* puta, ab eo peti, quo implicetur Diſputationibus Philoſophicis, hincque Problemata ad reſolvendum ſibi proponi, qui cum re controverſa nexu nullo copulentur. Quodſi par pari referre, eodemque modo ſub incudem vocare ipſius Philoſophiam mens eſſet, haud difficile futurum, ejus oſtendere debilitatem, & denudare errores, uti v. gr. quod attinet ipſius cogitata de miraculis, de qualitatibus occultis, de anima, de harmonia præſtabilita, aliiſque capitibus, a quæſtione inter eos agitata recedentibus.

Deinde *Neutonus*, ut convincat *Leibnitium* eo nomine, quod ad ſummum non niſi ſecundus fuerit inventor Methodi differentiarum, ad ipſius privatum provocat teſtimonium, adque confeſſionem propriam; confeſſionem, quam in diverſis litteris dederit, ad ipſum, *Neutonum* opinare, ſcriptis, & in eis etiam, quæ publicis typis evulgatæ; in ſpecie, quod in reſponſione ad *Fatium* directa, inque Actis Lipſienſibus ad menſem Maj. A. MDCC. publicata, agnoverit, neminem ante ſe & *Neutonum* hanc Methodum poſſediſſe, nec quemquam aliquo in Opere ſpecimen edidiſſe publicum, ex quo anterior hujus rationis inventio adparuerit. » Igitur fatetur ibi *Leibnitius*, infit *Neutonus*, penes me fuiſſe hanc Methodum ante, quàm publicata fuerit, & ante, » quàm is in Germania cum quoquam hominum eam communicaverit; fatetur, meum Principiorum Librum documento fuiſſe, quod equidem hanc Methodum poſſederim, » & Librum hunc continuiſſe prima in vulgus emiſſa tentamina adplicationis, quam adhibere poſſemus ad Problemata longè difficillima; præſtolor nunc, num perpetim ſit illius rei veritatem detrectaturus? Non ibat tum inficias, quod Dn. *Fatio* adſeruit, me nimirum fuiſſe primum » inventorem, ſignumque diei inventioni meæ inſcriptum » multis annis ſuperius exſtitiſſe ſigillo Leibnitiano; quod ſi » nunc negaverit, poterit inde concludi, agere ipſum mala » fide.

„ D. *Walliſius*, paullo inferiore loco pergit *Neutonus*, ad-
„ notat in Præfatione ad duo prima Operum ſuorum Volu-
„ mina, quæ Anno MDCXCV. exire juſſit, me in duabus lit-
„ teris, quas dedi A. MDCLXXVI. *Leibnitio* explicaſſe Metho-
„ dum, a me adpellatam Fluxionum, ab eo autem Metho-
„ dum Differentialem; meque inveniſſe hanc Methodum de-
„ cem annis antè, vel pluribus etiam, hoc eſt anno MDCLXVI.
„ vel citiùs; quin & *Leibnitius*, cui cum D. *Walliſio* ab eo
„ tempore interceſſit commercium epiſtolicum, neque id,
„ quod adſeruit *Walliſius*, vocavit in dubium, nec potuit
„ inſuper quicquam in contrarium reperire; equidem nunc
„ exſpecto, num vel tandem in his velit adquieſcere. «

Neutonus finit epiſtolam ſuam querelis, quòd in contro-verſia eorum *Leibnitius* adgreſſorem agat; quòd crimen ipſi intentarit, quo in ſuſpicionem plagii venire poſſet, quod-que hinc, ſi in ſententia permaneret, ex valore legum ſta-bilitarum probare illud teneretur, niſi pro calumniatore ha-beri vellet. Denique, quod placuerit *Leibnitio* ad hoc uſ-que tempus, citra validam rationem aliquam, adverſarios ſuos contemnere, & mittere ad eos, quos commercium litterarium ſibi junxerat, epiſtolas plenas adfirmationum, querelarum atque animadverſionum, nihildum probantium.

In iterata defenſione, qua litteris his Newtonianis ſine mora occurrit *Leibnitius*, id facit initii, ut dicat, ſe noluiſ-ſe ſtadium inire cum milite velitari, a *Neutono* contra ſe miſſo, ſive illum intelligas, qui eum ad adcuſandum funda-mentum *Commercii Epiſtolici* ſtimulaverit, ſive Præfationem ſpectes acerbitatis plenam, quam quiſpiam alius novæ *Prin-cipiorum* ipſius editioni præmiſerit. Enim verò ſi *Neutono* ipſi in arenam deſcendere placuerit, ſe perlibenter facturum illi, quod queat ſatis eſſe.

Principio adnotat, ſe immeritò adgreſſoris nomine inſigni-ri in hac controverſia, cùm non ſit immemor, ſe cum mul-ta honoris præfatione ſemper de *Neutono* locutum, ſed ad adcu-

adcuſationem hanc formandam detorqueri locum (ss) in Actis Lipſienſibus obvium, menſ. Januar. MDCCV. in quo *Neutonus* falli ſe paſſus ſit, ab homine verba hæc Actorum veneno inficiente, ſupponi, ea non ſine notitia ipſius, *Leibnitium* intellige, vulgata eſſe; vel ſaltem, perplacuiſſe excogitationem cujuſdam prætextus, quo ſibi ſoli attribui inventio novi Calculi, vel, ut attribuatur unicè, effici potuerit, ex quo tempore obſervatus illius ſucceſſus, & fama, quam in orbe fecerit.

Addit de eo, quod reſpicit numeroſum Virorum illuſtrium conventum, de quo ſermo eſſet *Neutono*, ſecum nihil communicatum fuiſſe, cumque has litteras ſcripſiſſet, adhuc ignoraſſe ſe nomina omnium horum Commiſſariorum, ac inprimis eorum, qui Inſularum Britannicarum cives non ſint. Neque ſe credidiſſe, calculum ſuum eos dediſſe omnibus rebus iſtis, quæ in Opus, contra ſe evulgatum, fuerit conjectum. De eo argumento ſe repetere querelas, *Commercium* nempe *Epiſtolicum* integrum datum haud fuiſſe, litteras in eo truncatas, loca, *Neutono* gravia futura, ſuppreſſa, quæ verò ſe, *Leibnitium* puta, ferire poſſe crederentur, adhibitis gloſſis ultra rationem extenſis, eorum nihil prætermiſſum.

Adſerit, ſe, cùm tantam cavillationum farraginem advertiſſet, turpe ſibi putaſſe, in diſceptationem venire cum hominibus ea tantopere abutentibus. Se animo præcepiſſe, in refellendis iis, non ſine ſenſu cujuſdam moleſtiæ vitari animadverſiones & cum ſeveritate aliqua conjunctas expreſſiones, dignas illorum agendi ratione. Se nullo flagraſſe deſiderio proferendi iſtud ſpectaculum in publicum, cùm ſciret meliùs collocare tempus ſuum, & gnaviter negligeret judicium eorum, quibus ex iſtiuſmodi Opere contra ſe pronunciare collibitum, eoque magis adhuc, quod nec Societas Regia facere id in animum induxiſſet.

Præterea

(ss) Locus modò citat. ad A. 1705. menſ. Jan.

Præterea nulla alia de cauſa nondum a ſe reſponſionem datam ad *Commercium Epiſtolicum*, quàm quòd ad examen ſingulorum illius capitum aliud requireretur Opus, illo certe nequaquam anguſtius, quòd neceſſum haberet adcuratam rerum minutiſſimarum, annis abhinc triginta vel quadraginta geſtarum, inveſtigationem inſtituere; quærere litteras priſtinas, quarum plures eſſent deperditæ, ceteræ verò ſepultæ jacerent inter acervos papyrinos, quos nemo exſolvere ſine otio & patientia poſſet, de qua quidem opportunitate ad hoc uſque tempus ipſe gloriari parum valeret, diſtrictus planè diverſæ naturæ laboribus. Inter hæc obſervat, ſe non meminiſſe dictorum, quæ *Neutonus* ipſi imputet, non commiſſurum videlicet, ut Angli glorientur in reſponſione ſua, ad minutas illorum rationes data, cùm alias nunquam cogitaſſet, Anglos omnes cauſam *Neutoni* ſuam facturos.

Querulatur hic ipſe quoque *Leibnitius* de injuſta *Neutoni* adcuſatione, quod quæſiviſſe diverticula dicatur oppugnando hujus Philoſophiam, & ad ſolvenda ſua Problemata invitando. Quantum ad Philoſophiam, ipſum de ſuis principiis cum Publico quid communicaſſe non laceſſitô *Neutono*; ex occaſione tantùm de hujus principiis quædam locutum in litteris privatis, cùm illius ſermonis anſa data fuiſſet. Quantum verò ad Problemata, non eſſe, quòd illa *Neutono* proponere intermittat ideo, quòd ad propoſita reſpondere ipſe nollet. Se & *Neutonum* eo ætatis perveniſſe, ut ambo vacatione hujus rei uti poſſent, præſto autem eſſe amicos, hunc illorum defectum expleturos. Ea de cauſa ſe non ſeorſim & per partes conſideraturum, quæ *Neutonus* acerbiùs paullo Philoſophiæ ſuæ oppoſuerit, cùm hic rei conficiendæ locus non eſſet.

» Quodſi, pergit *Leibnitius*, urit *Neutonum*, ut fatear & » accedam ad ea, quæ quindecim abhinc annis libenter » profeſſus ſum, idem ab eo exſpectandum eſſe puto. Nam» que agitur jam annus decimus quintus, ex quo in prima » Principiorum ſuorum editione mihi largitus ſit inventio» nem

„ nem Calculi Differentiarum a ſua inventione independen-„ tem; & ab eo tempore, neſcio quo pacto, animum in-„ duxit ad propugnandum contrarium..... Quando litteras „ citat & loca, in quibus conſentio illum poſſediſſe Calcu-„ lum quendam, Calculo meo Differentiali non planè diſſi-„ milem, excidere ei nequaquam poterit, ipſum mihi idem „ largitum fuiſſe; quodſi nunc ejurare dicta ei ſit integrum, „ quid eadem me facere impediet poſt rationes præſertim „ vero ſimiles, a *Bernoullio* prolatas in medium..... Non „ queo nunc adſeveratè dicere, num a me notatus *Wallisii* „ locus, qui adfirmat, *Neutonum* Methodum Fluxionum „ jam anno MDCLXVI. noviſſe; ſin fuerit notatus, reliqui il-„ lum inter res probabiles, motus tum haud vulgariter fide „ Newtoniana.

„ *Neutonus* (concluſio eſt *Leibnitii*,) contendit, ipſum a „ me plagii inſimulatum fuiſſe; at ubinam obſecro factum „ rei? Agnoſco, quod dicit, malitiam hominis cujuſvis, qui „ crimen iſtiuſmodi intentat, ipſum arguere calumniatorem. „ Finit is Epiſtolam ſuam adcuſando me tanquam adgreſſo-„ rem, ea in re equidem feci initium, probando contra-„ rium, quanquam tota hæc controverſia præliminaris, ex „ verbis malè intellectis oriunda, facilè dirimi poſſet. «

Hæc *Leibnitii* reſponſio, Hanoveræ ſignata d. XIV. April. MDCCXVI. & Abbati *Conti* miſſa fuit, ad quem eodem quoque tempore ſcripſit, ſe, ut extra muros Londinenſes haberet *neutri parti addictos & intelligentes teſtes*, abire ſuam reſponſionem Pariſios juſſiſſe, eruditiſſimo *Remondo* committendam, quo Abbati *Varignonio* prælegeretur, aliiſque Societatis Scientiarum Regiæ membris, cum quibus communicare illam vellet antè, quàm Angliam vidiſſet. Interim iſta ſatis celeriter eo conceſſit: verùm enim verò *Neutonus*, metuens famam & ſtrepitum rei, quam mallet occultam, fortaſſis etiam pertæſus diſputationem, ad quam paullo ſeriùs & pene contra voluntatem ſe adcinxiſſet, „ litem longiùs

» urgere noluit (tt), cumque reſponſio Leibnitiana ex Gallia Angliam petiiſſet, refellit illam animadverſionibus, quas » non niſi cum quibuſdam familiaribus communicavit. *Leibnitius* verò diem obiit ſupremum poſt ſex menſium intervallum, ab adſcripta reſponſionis die notatum; quo cognito, quamprimum *Neutonus* Londini typis ſubmiſit Appendicem, cum epiſtola *Leibnitii* ad Abbatem *Contium*, & ſua ad eundem Abbatem data, animadverſionibus item poſtremam epiſtolam tangentibus (uu). «

Ecce delineationem, brevem quidem, ſed ita tamen comparatam, ut queat nihilominus ſufficere ad præſtandam generalem de momento hiſtorico celebratæ hujus controverſiæ notitiam. Diſceptatio Geometrica nimium haberet vaſtitatis, neque fieri poſſet ſine majore adhuc & ſpecialiore enarratione, ad ſublimiorem Geometriam pertingente, ſicque multum vires meas ſuperante.

Quæ cùm ita ſint, ipſe meæ temeritatis eſſem adcuſator, ſi ſententiam in hac cauſa pronunciare non vererer: interim tamen veniam mihi daturos etiam rigidiſſimos Cenſores ſpero, ſi, evitato tam ſpinoſo curriculo, conjecturas adferre audeam, *Leibnitium* plagii crimine liberaturas, quo, ut mihi videtur, obnoxium illum judicaverunt Societatis Regiæ Commiſſarii.

Iſtas conjecturas, quarum indicem tantùm exhibeo, ſingulares animi Leibnitiani dotes, raraque indolis præſtantia, mihi ſuppeditant. Quotus quiſque eſt, qui dubitet, *Leibnitium*, ſi diſceſſeris ab invento Calculi hujus differentialis, ex ſuo ipſius fundo ſatis ſuperque fuiſſe locupletem in rebus Mathematicis, & ad inveniendum propria mentis acie laudatum Calculum omnium longè aptiſſimum, & extra neceſſita-

(tt) Uti narrat Dn. *des Maizeaux*.

(uu) Omnes hæ Partes jungebantur tanquam Supplementum Operi, quod inſcribitur: *Raphſon's History of Fluxions*; emendatiores deinceps exierunt in *Collectione variarum Commentationum de Philoſophia*, &c. 1720. in 12.

ceſſitatem cuiquam iſtiuſmodi detectionem furandi conſtitutum. Non ſum neſcius, furtum, ſi pro certo ſumeretur, ſatis amplum fore teſtimonium ingenii Leibnitiani, propterea quòd eruditiſſimi viri nullum in Commercio epiſtolari Anglico locum offendere, ex quo derivare Methodum ſuam potuerit. Enimverò multo adhuc eminentioris eſt indolis, quàm ut furtum hoc, licèt ſubtiliſſimum, exercuerit, nec poteſt non hic in cenſum deduci honeſti viri nomen atque auctoritas. Hoc profectò momentum Erudito noſtro ſemper & inprimis curæ cordique fuit, cujus ſtudio plus adficiebatur, neque id ſine ratione, quàm laudis in Auctorem redundantis amore; namque ex hoc latere utilitatis privatæ neglectum tanto gradu exercuit, ut neque conquereretur de iis, qui ipſius detectiones verterant in ſuos uſus, neque genti eruditæ unquam conſilia aditusve negaret, illorum conatibus inſervientes. Interdum dicere, ſed citra adfectationem, ſolitus erat, ſe cum voluptate progerminantes in aliorum hortis plantas videre, quibus ipſe ſemen ſuppoſuerit. Qui tam generoſis ducitur principiis, certè alieniſſimus eſt a cupidine bonum alterius modo injuſto ad ſe rapiendi.

Novi, ipſum in Actis Lipſienſibus (xx) *Carteſio* id exprobrare, quanquam, meo quidem judicio, nimis adſeveratè, quod neque honorem *Keplero* habuiſſet in cauſa Gravitatis ex viribus centrifugis tractæ, nec *Snellio* in legibus Refractionis. „Et ſanè, ait, licèt Vir ſummus fuerit *Car-* „*teſius*, his tamen artificiolis multum ſolidæ laudis amiſit „apud Judices intelligentes (yy).“ Num fieri potuit, ut negligeret veram hancce gloriam, tam profundè ab ipſomet cognitam? Num fugit ejus ſenſum oculoſque, manere adhuc ipſum gloriam ingentem ab hoc argumento, quod in tantam protulerit lucem, oriundam? Num ignoravit ille, Publi-

(xx) Anno 1690. menſ. Majo, pag. 231.

(yy) *Ibid.* Verba illius propria.

Publicum, quod non ſine admiratione primum, Inventorum nempe, laborem excipit, ex æquo honorem, & fortaſſe etiam plus gratiæ debere alteris, quorum ſedulitate illius operæ copia facta eſt, quique in ea perficienda gnaviter laborarunt?

Legimus in uno voluminum, quæ Eruditorum Acta complectuntur (zz), ingenuam hiſtoriam ſuarum meditationum Mathematicarum *Bernoullio* apertam. Grata ibi mente recolit memoriam virorum, quorum opera in hiſce materiis potiſſimùm uſus eſt, *Galilæi*, *Carteſii*, *Gregorii de S. Vincentio*, *Guldinii*, *Fermatii*, *Paſcalii*, *Hugenii*. Cur igitur in hac cauſa, in qua tantus ejus candor elucet tantaque mentis vacuitas a vanitate, *Neutono* locum non conceſſiſſet? Numquid ingrati animi nomine in hunc ſolum peccaſſet? Sed ſpecialiorem adhuc invenio & magis explicatam Studiorum ſuorum Geometricorum notitiam in una epiſtolarum, quas ad Abbatem *Contium* exaravit. Indicat in ea diſtinctiùs, qua ratione pervenerit ad ſcientiam Calculi Differentialis. Facit illud ſpecimen quàm maximè ad hoc argumentum, & digniſſimum eſt, quod heic loci tranſcribatur.

» Bonum eſt noſſe, ſcribit is ad hunc Abbatem, me in
» primo meo itinere Anglico A. MDCLXXIII. ne minimam qui-
» dem habuiſſe notitiam ſerierum infinitarum, quales *Mer-*
» *cator* dedit, neque aliarum materiarum Geometriæ per Me-
» thodos recentes promotæ. Nec ſatis adhuc verſatus eram
» in Analyſi Carteſiana. Tractavi Mathematica tantum ut
» parergon, nec quidquam ſcivi, præter Geometriam indi-
» viſibilium *Cavallierii*, & Librum P. *Leotaud*, in quo dede-
» rat quadraturas Lunularum, & Figurarum ſimilium; id
» quod curioſitatem meam aliquantum excitavit. Oblectavi
» animum potiùs proprietatibus numerorum, cujus rei occa-
» ſionem mihi præbuit parvus Tractatus, a me admodum
» puero de arte combinatoria editus, A. MDCLXVI. cumque
» jam tum uſum differentiarum pro ſummis obſervaſſem, ad-
» plicavi

(zz) *Act. Eruditor.* Anno 1691. Septembr. pag. 438.

„ plicavi eum ad ſeries numerorum. Cernitur hoc facilè ex „ primis litteris meis, quas cum *Oldenburgio* permutavi, me „ ſcilicet haud multum ultra provectum. Neque tunc con„ ſuetudo mihi interceſſit aliqua cum *Collinſio*, etſi malitio„ ſe & falſo vulgatum eſt contrarium.

„ Effecit paullatim *Hugenius*, ut iſtis materiis operam da„ rem, cùm in ejus familiaritatem veniſſem Pariſiis, quod „ ſtudium, auctum poſtea Tractatu *Mercatoris*, quem ex An„ glia mecum deportavi, quòd *Pellius* de eo mecum locu„ tus erat, peperit circa finem anni MDCLXXIII. inventionem „ Quadraturæ meæ Arithmeticæ Circuli, *Hugenio* admodum „ probatæ, & de qua verba feci ad *Oldenburgium* in epiſtola „ A. MDCLXXIV. data. Tum temporis neque *Hugenio*, nec „ mihi quidquam innotuit de ſeriebus Newtonianis aut Gre„ gorianis. Ita credidi, eſſe me primum, qui tradiderit „ valorem Circuli per ſeriem numerorum rationalium, & ita „ quoque judicavit *Hugenius*.

„ Hac mente ſcripſi ad *Oldenburgium*, qui ad ea reſcripſit, „ exſtare jam in Anglia tales ſeries; ita intelligitur ex meis „ litteris d. XV. Jul. A. MDCLXXIV. & ex reſponſione *Olden*„ *burgii* eodem anno data, me tum temporis nullam ejus rei „ cognitionem habere potuiſſe; alias *Oldenburgius* nequa„ quam dubitaſſet aurem vellere & admonere, ſi quid antea „ vel is ipſe, vel *Collinſius* de ea re mihi ſignificaſſet. Illo „ igitur tempore primùm ea de re quidquam mihi innotuit. „ Sed ignorabam adhuc extractiones radicum æquationum „ per ſeries, nec patebant regreſſiones, aut extractio æqua„ tionis infinitæ.

„ Eram tum in his materiis aliquanto imperitior: mox ta„ men inveniebam Methodum meam generalem per ſeries „ arbitrarias, & adgrediebar tandem Calculum meum diffe„ rentiarum, in quo obſervationes, jam a me admodum ju„ vene factæ de differentiis ſerierum numerorum, multum „ operam meam adjuvabant, oculoſque aperiebant. Neque „ enim per fluxiones linearum, ſed per differentias nume-

„ rorum eo perveni, obſervando denique, has differentias,
„ quantitatibus adplicatas continuò creſcentibus, evaneſce-
„ re, ſi comparentur cum quantitatibus differentibus, nec
„ ſubſiſtere in ſeriebus numerorum.

In hac igitur epiſtola *Leibnitius* apertè ſuam ignorantiam profiteretur, in invento Geometrico, quod a ſe primum in lucem editum fuiſſe judicaret, eo tantùm fine, ut plagium ſuum in alia ejuſdem naturæ detectione artificioſe ſatis celare poſſet. Quis facilè a ſe impetrabit hoc credere? Qui candidè errores ſuos profitetur, eo ipſo, jure quodam ſuo, poſtulare fidem videtur in eo, quod a ſe removet. Iterata candoris documenta, per plurimorum annorum ſpatium obſervata, in omni occaſione dominium exercere haud temerè creduntur. Varia hæc præjudicia, pro *Leibnitio* militantia, explodi non queunt, niſi evidentibus & convincentibus cauſæ contrariæ probationibus; iſtiuſmodi enim teſtimoniis profectò opus eſt, ad retundendam communem orbis litterarii opinionem, qui eum pro inventore habet, orbis, inquam, qui ab eo Calculum accepit, & apud quem honeſti viri exiſtimationem dudum meruit.

Quamvis fieri potuerit, ut Commiſſarii Societatis Regiæ juſtè pronunciarent ex actis, quæ ſub manibus erant; tamen judicium propterea valore deſtituitur, quod viri non omnia poſſidebant, multaque documenta non videbant, quæ ſolus *Leibnitius* ſervabat in ſuis ſcriniis, quæque publico ſpecimine opponere conſtituebat *Epiſtolico* Angliæ *Commercio*. Scripſit quoque paucis ante mortem ſuam diebus ad *Wolffium*, ſe, præter *Commercium*, cujus vulgandi ſpem feciſſet, prolaturum adhuc rem inexſpectatam ad Calculum ſuum facientem, cui ſimile nihil inveniretur in inventis Newtonianis, aut aliorum Geometrarum Anglorum. Concludamus igitur, omnes haſce veriſimilitudines liberare *Leibnitium* poſſe nomine plagii in detectione Calculi differentialis. Neſcio, an unquam in aliis rerum concurſibus honeſti viri characterem neglexerit, &, quod attinet ingenium ipſius ad inveniendi

niendi artem factum, quis eſt, qui aliqua eruditione claret, quin idem hac parte nobiſcum liberaliter ſentiat?

Neutonus non niſi per ænigmata, *litteris tranſpoſitis*, de Methodo ſua cum *Leibnitio* locutus eſt, antequam hic cum eo ſuam Methodum plenè & apertè communicavit. Non is ſum, qui expreſſione hac *Neutono* ſuam inventionem velit in certamen adducere: licèt iſtud a Rivali ipſius proditum ſit in ardore diſputationis: vereor tamen enunciato ſubſcribere. Perſolvo meritis ipſius laudes, quas poſſum & debeo, maximas, &, ſi temporis atque loci ratio conceſſerit, amplius perſolvam, edendo hiſtoriam vitæ ipſius, unam ex glorioſiſſimis & maximè illuſtribus, quæ unquam regnum litterarium in ſplendorem dederunt. Fatebor quoque in anteceſſum, quod equidem citra neglectionem æquitatis & contradictionis culpam fieri poſſe confido, *Neutonum*, pro mea æſtimatione, primum inventorem fuiſſe Calculi differentialis: ſed illud inſuper urgeo, *Leibnitium* eo perveniſſe poſt *Neutonum* ſuo marte, unicè ſuis luminibus, fœcunditate ſui ingenii, & vi meditationum priorum, quibus eam Mathematum partem acuit, quam adpellamus ſcientiam Numerorum.

Ut ad faſtigium perducam, quæ dicere ſupererant de dotibus & ingenio Geometrico *Leibnitii*, addendum hic eſt, ipſum non tam ſubjeciſſe ſuæ poteſtati Calculum differentialem, quàm ex virtute animi, finibus, quos facere licet, excellentiſſimis abundante, conciliationem Calculi differentialis & integralis tentaſſe. Arbitror ſuprà a me dictum eſſe, quid per hunc poſteriorem Calculum intelligatur; eſt nimirum ars colligendi tota, quæ prior Calculus reſolvere novit in ſuas partes infinitè parvas. Hæc ars tam difficilis, digna, quæ excellentiſſimorum Mathematicorum ſummis contentionibus agitetur, quæque fortaſſe perfectionis, a ſublimi Geometria unquam exſpectandæ, complementum eſt, objectum fuit primarum meditationum ipſius, juncta cura Algorithmi infiniteſimalis. Invenit ille ante annum

MDCC.

MDCC. Methodum generalem integrandi quantitates, quemadmodum ſcripſit ad *Bernoullium*, adnectens inſimul, ſe detectionem ſuam reſervare ad opus quoddam *De Scientia Infiniti*, in quo occuparetur, & cujus ferè nobiliſſimam partem ipſius Methodus conficeret. Falſo gloriari non ſolebat, neque arcanum ſuum diutius celare; plenus enim ardore Mathemata in altius provehendi, vulgavit illud in Actis Lipſienſibus ad annum MDCCII. (aaa) Et certè jactura notabilis, quod ante vitæ finem otium ipſi non fuerit Opus abſolvendi, cujus pars, fortè nobis relicta, tantùm leve quoddam ſpecimen exhibet. Nunquam mors Eruditi majore detrimento adficit Scientias, quàm ſi ea intercidit cœpta utilia & inprimis ardua. Magna ſic copia cogitationum, certum, quandoque unicum, filum idearum, cum Inventore ſepeliuntur.

(aaa) Menſe Majo P. 210.

HISTOIRE DE L'INVENTION
DU CALCUL DIFFERENTIEL

Tirée de l'Hiſtoire des Mathématiques par M. Montucla *Tom. 2.*

MR. *Leibniz* fut au commencement de 1673 à Londres, à la ſuite d'un Ambaſſadeur. Il paroît, & lui-même n'en diſconvient pas, qu'il ne s'étoit point encore beaucoup attaché à la Géometrie, & qu'il ne s'occupoit que d'Arithmétique : on ne peut même diſconvenir que de deux inventions qu'il donne dans une lettre écrite de Londres à *Oldenbourg*, l'une & l'autre ne fuſſent connues avant lui. Mais on doit remarquer en même tems que Mr. *Leibniz* avoit été bien plus loin que ceux qui l'avoient prévenu ; car il dit dans cette lettre, qu'il peut aſſigner la ſomme de toutes les ſuites infinies de fractions, dont le numérateur étant l'unité, les dénominateurs ſont les nombres triangulaires, ou pyramidaux, ou triangulo-triangulaires ; comme ſeroient celles-ci $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15} + \frac{1}{21}$ &c. ou $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{10} + \frac{1}{20}$, &c. En effet, la première continuée à l'infini eſt égale à $1\frac{1}{2}$, la ſeconde à 2, &c. Cette invention ingénieuſe diſculpe Mr. *Leibniz* du ſoupçon de plagiat que jette ſur lui l'éditeur du *Comm. Epiſtolicum.*

Mr. *Leibniz* retourna à Paris, après quelques mois de ſéjour à Londres. Ce fut ſeulement alors qu'il commença à ſe livrer à la haute Géométrie. La converſation de Mr. *Huyghens* qu'il fréquentoit, lui en fit naître le goût ; & comme il avoit apporté d'Angleterre la *Logarithmotechnie* de *Mercator*, il ſe mit à la lire, de même que l'ouvrage de *Grégoire de Saint Vincent*, que Mr. *Huyghens* lui avoit loué.

Tout à coup, dit-il, ſes yeux ſe déciliérent : de nouvelles idées ſe préſentérent à lui, & il trouva vers la fin de 1673, ſa quadrature du cercle par une ſuite rationnelle qu'il communiqua à Mr. *Huyghens*, qui l'approuva fort. Sa méthode conſiſtoit, comme on le voit par une de ſes lettres écrite en 1676, en une transformation, par laquelle il changeoit le cercle en une autre figure égale, dont l'ordonnée étoit une fraction rationnelle, de ſorte qu'il pratiquoit ſur elle ce que *Mercator* faiſoit ſur l'ordonnée de l'hyperbole. Cette ſucceſſion d'idées eſt tout-à-fait probable, & le livre de *Mercator* excitoit naturellement cette tentative.

Leibniz communiqua, dit-il, ſa découverte aux Géomètres de Paris, au commencement de 1674, & quelques mois après il l'annonça à *Oldenbourg* par deux lettres; dans la ſeconde, il parle de ſa ſuite avec beaucoup de complaiſance, la regardant comme la premiére qui ait été donnée pour le cercle. Il ajoutoit que par la même méthode il pouvoit aſſigner l'arc, le ſinus étant donné : il obſerve enfin que ſa quadrature fournit une analogie tout-à-fait remarquable entre le cercle & l'hyperbole.

A cette lettre *Oldenbourg* répondit d'une maniére qui fait beaucoup en faveur de *Leibniz*. Il l'informe ſeulement des progrès de *Neuton* & *Gregori* dans cette partie de la Géométrie. *Leibniz* en demande la communication. *Collins* & *Oldenbourg* conjointement lui envoyent les diverſes ſuites trouvées par les deux Géométres Anglois, & entr'autres celle qui exprime l'arc par la tangente. Mais ſi *Leibniz* eût tenu cette ſuite d'*Oldenbourg* ou de *Collins*, l'un ou l'autre auroit-il manqué de le lui rappeller? Soupçonnera-t-on *Leibniz* d'une hardieſſe aſſez grande pour ſe vanter d'une découverte auprès de ceux qui la lui auroient communiquée?

Cette correſpondance entre *Leibniz* & *Oldenbourg*, dura juſques vers le milieu de 1676, que ſur les inſtances de l'un & de l'autre, *Neuton* décrivit dans deux longues lettres ſa méthode pour les quadratures des courbes. Dans la premiére, il

il expoſe ſa formule pour l'extraction des racines, & il l'applique à divers exemples. Il donne diverſes ſuites pour le cercle, pour l'hyperbole, pour la rectification de l'ellipſe, la quadrature de la quadratrice, &c. Enfin il termine ſa lettre par certaines méthodes pour déduire des ſuites infinies, des approximations commodes.

Leibniz répond à cette premiére lettre de *Neuton*, en lui faiſant part de la méthode par laquelle il transforme une courbe à ordonnées irrationnelles, en une où elles ſont rationnelles; ce qui lui permet d'y appliquer la diviſion à la maniére de *Mercator*, pour la transformer en ſuite infinie; au reſte cette méthode, quoiqu'ingénieuſe, eſt fort au deſſous de celle de *Neuton*, & même dans certains cas elle peut préſenter des difficultés inſurmontables; de ſorte qu'on ne ſçauroit la regarder comme générale, ni comme ſuffiſante. Dans cette lettre Mr. *Leibniz* remarque particuliérement l'analogie du ſecteur circulaire avec le ſecteur hyperbolique, en ce que t étant la tangente au ſommet, & 1 le demi diamètre, celui-là eſt $t - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} - \frac{t^7}{7}$, &c. au lieu que celui-ci eſt $t + \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} + \frac{t^7}{7}$, &c. à l'infini. C'eſt cette derniére ſuite qu'il avoit probablement en vue, lorſqu'il annonçoit à *Oldenbourg* l'analogie remarquable qu'il avoit découverte entre le cercle & l'hyperbole. Le reſte de la lettre eſt employé à expoſer quelques nouvelles vues ſur la réſolution des équations.

Neuton répondit à cette lettre par une autre, qui contient une multitude de choſes remarquables; telles ſont la maniére dont il parvint d'abord à la méthode des ſuites, l'application qu'il en faiſoit, dès l'an 1665, à la quadrature de l'hyperbole, & à la conſtruction des logarithmes; divers théorêmes généraux pour les quadratures, qui les donnent en termes finis quand elles ſont poſſibles, ou en ſuites infinies, par la ſeule comparaiſon des termes de l'équation;

f 2 la

la rectification de la cyſſoïde réduite à la quadrature de l'hyperbole. Il y annonce ſa méthode pour trouver par approximation l'aire d'une courbe lorſque les ſuites qui l'expriment ſont trop compliquées, ou trop peu convergentes. C'eſt cette invention qu'il a expliquée dans ſon Traité intitulé *Méthode différentielle.* On y voit auſſi des formules d'expreſſions d'ordonnées de courbe, dont les aires ſe réduiſent à la quadrature des ſections coniques ; diverſes ſuites pour le cercle, & leur uſage pour trouver des approximations en grand nombre de chiffres ; l'uſage de ſon parallélogramme pour la réſolution des équations ; deux méthodes pour le retour des ſuites, avec quelques théorêmes généraux pour cet effet. Il finit par dire qu'il eſt en poſſeſſion du problême inverſe des tangentes, & d'autres plus difficiles ; & qu'il y employe deux méthodes qu'il ne veut pas dévoiler : c'eſt pourquoi il les cache ſous des lettres tranſpoſées, dont l'explication a depuis été donnée dans le *Commercium Epiſtolicum.*

Il faut bien remarquer, d'après les extraits que nous venons de donner de ces lettres, qu'il y eſt preſque uniquement queſtion de la méthode des ſuites & de la quadrature des courbes, de ſorte que *Leibniz* avoit quelque raiſon de ſe plaindre de ce que tandis qu'il s'agiſſoit du calcul différentiel, ſes adverſaires prenoient ſans ceſſe le change, & ſe jettoient ſur les ſéries, en quoi il ne diſconvenoit point que Mr. *Neuton* ne l'eût précédé. En effet, la queſtion eſt fort différente. Un Géométre eût pu être en poſſeſſion de la méthode des ſuites, & s'en ſervir à quarrer toutes les courbes, ſans être en poſſeſſion du calcul des fluxions & fluentes. Car l'expreſſion de l'ordonnée d'une courbe étant réduite en ſérie, ſi le cas l'exige, les méthodes de *Wallis*, de *Mercator*, que dis-je ? de *Cavalleri* & de *Fermat*, ſuffiſent pour trouver l'aire. Quant au principe des fluxions, trois endroits ſeuls du *Commercium Epiſtolicum*, y ont trait, d'une maniére aſſez claire pour prouver que Mr. *Neuton*

l'avoit

l'avoit trouvé avant *Leibniz*, mais trop obſcurément pour ôter à celui-ci le mérite de la découverte : l'un eſt une lettre de Mr. *Neuton* à *Oldenbourg*, qui lui avoit marqué que *Sluſe* & *Gregori* venoient de trouver une méthode des tangentes d'une ſimplicité extrême: *Neuton* lui répond qu'il ſoupçonne bien ce que c'eſt, & il en donne un exemple qui eſt effectivement la même choſe que ce que ces deux Géométres avoient trouvé. Il ajoute que cela n'eſt qu'un cas particulier, ou plutôt un corollaire d'une méthode bien plus générale, qui s'étend à trouver, ſans calcul difficile, les tangentes de toutes ſortes de courbes, géométriques ou méchaniques, & ſans être obligé de délivrer l'équation des irrationalités. Il répète la même choſe, ſans s'expliquer davantage, dans ſa ſeconde lettre, dont nous avons parlé plus haut, & il en cache le principe ſous des lettres tranſpoſées. Le ſeul écrit où Mr. *Neuton* ait laiſſé tranſpirer quelque choſe de ſa méthode, eſt ſon *Analyſis per æquationes numero term. infinitas*. Il y dévoile d'une maniére fort conciſe & aſſez obſcure, ſon principe des *Fluxions* ; il y nomme *momentum*, l'incrément inſtantané de l'aire, qu'il fait proportionnel à l'ordonnée, tandis que celui de l'abſciſſe eſt repréſenté par une ligne conſtante égale à l'unité. Il applique enſuite ce principe à trouver l'expreſſion du *moment* d'un arc de cercle, qu'il exprime par $\frac{1}{\sqrt{2x - xx}}$, d'où il tire par une ſuite la valeur de l'arc lui-même. Plus loin il nomme l'abſciſſe x, ſon *momentum* o, & celui de l'aire oy; & par un procédé reſſemblant à celui qu'employoit *Fermat* dans ſa régle des tangentes, il démontre que ſi l'aire z eſt exprimée par cette équation $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} = z$, il faut que l'ordonnée y ſoit égale à $x^{\frac{1}{2}}$. D'où il conclud *vice-verſa*, que ſi $y = x^{\frac{1}{2}}$, l'aire ſera $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$. On ne peut diſconvenir, ſans doute, que le principe & la méthode des fluxions ne ſoient expoſés dans cet endroit de l'écrit dont nous parlons; mais on n'a aucune certitude que *Leibniz* l'ait vu. Il ne lui a ja-

mais été communiqué par lettres: ſes adverſaires ne l'ont pas même avancé, & ils ſe ſont contentés de donner à ſoupçonner que *Leibniz*, dans l'entrevue qu'il eut de ſon aveu avec *Collins*, lors de ſon ſecond voyage à Londres, avoit eu communication de cet écrit. C'eſt à cela ſeul que ſe réduit la conteſtation. A la vérité, ce ſoupçon pourra paroître aſſez vraiſemblable, d'autant plus que *Leibniz* convient encore qu'il vit dans cette occaſion une partie du commerce épiſtolaire de *Collins*. Je crois cependant qu'il ſeroit téméraire de prononcer là-deſſus; on ne condamne pas ſur de ſimples ſoupçons, comme coupable d'un crime odieux dans la République des Lettres, un homme qui a donné d'auſſi fortes preuves de génie que Mr. *Leibniz*.

Nous croyons devoir faire ici quelques remarques ſur la Préface du *Traité des Fluxions*, traduit par Mr. de *Buffon*, parce qu'il nous a paru que ce ſçavant Académicien *a un peu trop déféré aux imputations captieuſes de Keil*. Si tout ce qu'on y lit étoit exact, *Leibniz* ſeroit auſſi ridicule que le Geai de la Fable. En effet, on lit dans la Préface dont nous parlons, qu'il eſt prouvé par le *Commercium Epiſtolicum*, & par les lettres de *Leibniz*, qu'il a eu connoiſſance de la méthode des ſuites avant que de donner la ſienne pour le cercle, & que celle-ci même lui avoit été envoyée par la voye d'*Oldenbourg*; que *Leibniz* n'en avoit pas la démonſtration, puiſqu'il la demanda dans la ſuite; qu'en 1677 il donna une méthode des tangentes, qui n'eſt que la même que celle de *Barrou*, à la notation près, & dont le calcul eſt le même que celui que *Neuton* avoit communiqué à *Collins* dès l'année 1669. Quatre ou cinq pages plus loin, on lit encore que le calcul des ſecondes, troiſiémes différences, &c. a été donné dans la premiére propoſition du Traité des *Quadratures*, communiquée à *Leibniz* dès l'année 1675. C'eſt-là la ſubſtance des apoſtilles de *Keil*, au *Comm. Epiſtolicum*; mais elles ſont toutes fauſſes ou du moins captieuſes, comme le vont montrer les obſervations ſuivantes. 1°. Quelque

que ſoin que j'aye mis à lire le *Comm. Epiſt.* je n'y ai vu nulle part que la théorie des ſuites ait été dévoilée à *Leibniz*, ni qu'il ait reçu aucune ſuite pour le cercle, avant qu'il eût annoncé la ſienne à *Oldenbourg*, avec l'analogie particuliére qu'elle lui faiſoit découvrir entre le cercle & l'hyperbole. Quelle apparence que *Leibniz* ſe fût vanté d'une découverte qu'il n'avoit point. Nous ne croyons pas qu'aucun de nos Lecteurs ſoupçonne cet homme illuſtre d'un procédé auſſi inſenſé. 2°. La ſuite dont il demande la démonſtration à *Oldenbourg*, eſt celle-ci, $x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5$, &c. qui donne l'arc par le ſinus x, mais cette ſuite n'eſt point celle que donne la méthode de *Leibniz* expoſée ci-deſſus. Ainſi *Keil* eſt tout-à-fait mal fondé dans l'obſervation qu'il fait contre lui, ſçavoir qu'il avoit avancé qu'il pouvoit trouver l'arc par le ſinus, & que cependant après la communication d'une ſuite ſemblable, il en avoit demandé la démonſtration. 3°. La méthode des tangentes, donnée en 1677. par *Leibniz*, eſt bien vraiment le calcul différentiel, & nullement la méthode de *Barrou*; *Keil* avoit apparemment oublié que *Barrou* n'étendit jamais ſa méthode aux courbes à équations irrationnelles; au contraire, *Leibniz*, pour mieux montrer les avantages de la ſienne, l'applique à une expreſſion fort compliquée d'irrationalités, de ſorte que nous ne ſçavons à quoi *Keil* ſongéoit quand il a avancé un pareil fait. D'ailleurs il y a une contradiction ridicule à dire que le calcul de *Leibniz*, décrit dans la lettre dont nous parlons, n'eſt que le calcul de *Barrou*, & qu'il eſt le même que celui que *Neuton* avoit communiqué dès l'année 1669, & qu'on prétend être vraiment ſon calcul des fluxions. 4°. On ne verra aucune part que la propoſition du Traité *des Quadratures*, qui contient, dit-on, le principe des fluxions des différens ordres, ait été communiquée à *Leibniz*. C'eſt une imputation de *Keil*, d'autant moins fondée, qu'il en réſulte préciſément tout le contraire de ce qu'il prétend; car cette prétendue méthode pour les fluxions de

tous

tous les ordres, eſt vicieuſe, & les donne toutes fauſſes; à l'exception de la premiére (bbb). C'eſt un fait que *Keil* ne ſçauroit détruire, & qui eſt trop bien prouvé; il ne faut que jetter les yeux ſur les éditions du Traité *de Quadratura curvarum*, des années 1704 & 1711, pour s'en convaincre. Je paſſe légérement ſur quelques autres obſervations de *Keil*; obſervations qui ſont évidemment l'ouvrage de la paſſion. Telle eſt celle-ci: Lors, dit-il, que *Neuton* diſoit que la courbe dont l'ordonnée étoit $z^{\frac{1}{2}}$, avoit ſon aire égale à $\frac{2}{3}z^{\frac{3}{2}}$, c'eſt la même choſe que s'il eût dit que la différentielle de $\frac{2}{3}z^{\frac{3}{2}}$, étant $z^{\frac{1}{2}}dz$, ſon intégrale eſt $\frac{2}{3}z^{\frac{3}{2}}$; d'où Mr. *Leibniz*, ajoute-t-il, a pu conclure que la différentielle de $\frac{2}{3}z^{\frac{3}{2}}$, eſt $z^{\frac{1}{2}}dz$. La conſéquence eſt tirée d'un peu loin. Mr. *Keil* ignoroit-il donc que ſans autre calcul que celui de *Wallis*, de *Fermat* même, & de *Cavalleri*, ce théorême étoit ſuſceptible de démonſtration? D'ailleurs, il n'y a point de découverte dont on n'exténuat le mérite, qu'on n'anéantit même, par un expoſé artificieux des gradations qui ont pu y conduire. Après ces obſervations, je reprends le fil de mon récit.

Leibniz, après avoir ſéjourné quelques jours à Londres, partit pour Hanovre. Arrivé à Amſterdam, il écrivit à *Oldenbourg*. On voit par ſa lettre qu'il n'étoit pas encore en poſſeſſion de ſa méthode pour les tangentes, tirée du calcul différentiel; car il propoſoit un certain travail à faire ſur celle de *Sluſe*. Enfin par une lettre du 21. Juin 1677, il notifia à *Collins* ſa découverte. „Je conviens, dit-il, avec Mr. „*Neuton*,

(bbb) *Neuton* dit dans ſon Traité de *Quad.curvarum*, que pour avoir les fluxions de divers ordres de la grandeur x^m, il n'y a qu'à élever $x + \dot{x}$ à la puiſſance m. Ce qui donne $x^m + m.x^{m-1}\dot{x} + \frac{m.m-1}{1.\ 2.}x^{m-2}\dot{x}^2$, &c. & que les ſecond, troiſiéme, quatriéme termes ſeront reſpectivement les fluxions premiére, ſeconde, troiſiéme, &c. de x^m. Cela n'eſt vrai que du ſecond terme, parce que le dénominateur eſt l'unité. Les autres n'expriment les fluxions des ordres plus élevés, qu'en ſupprimant les dénominateurs.

„ *Neuton*, que la régle de *Sluſe* n'eſt pas parfaite, & il y a „ long-tems que j'ai traité le problême des tangentes d'une „ maniére plus générale. “ Il expoſe, immédiatement après, les régles de ſon nouveau calcul, & il l'applique à trouver les tangentes de courbes à équations irrationnelles, & à diverſes autres déterminations que je paſſe pour abréger.

La mort d'*Oldenbourg*, qui arriva peu de tems après, mit fin à ce commerce. Les Actes de Leipſick parurent en 1682, & *Leibniz* y donna ſa *Quadrature Arithmétique* du cercle & de l'hyperbole. Elle fut auſſi inſerée dans les *Tranſ. Phil.* de cette année, ſans que perſonne reclamât les droits de l'Angleterre, pas même *David Gregori*, neveu de *Jaques*, qui avoit été en poſſeſſion de tous les papiers de ſon oncle, & qui dans un écrit publié en 1684. (ccc), attribue cette ſuite à *Leibniz*. Ceci me paroît jetter de grands doutes ſur cette publicité des découvertes analytiques de *Neuton* & de *Gregori*, dont les adverſaires de *Leibniz* tirent ſi grand parti contre lui. Il eſt ſurprenant que perſonne même dans la Société Royale de Londres, ne fût informé du droit que *Gregori* avoit ſur l'invention dont nous parlons. Enfin en 1684, *Leibniz* publia dans les Actes de Leipſick, un eſſai de ſon calcul différentiel, l'appliquant à quelques problêmes de nature à échapper aux autres méthodes. Perſonne ne s'en formaliſa encore en Angleterre. *Neuton* lui-même, le plus intéreſſé à cela, & qui ſçavoit le mieux juſqu'où ſes lettres avoient pu mettre *Leibniz* ſur la voye, lui rendit dans ſes principes (ddd) un témoignage brillant. *Il y a dix ans*, dit-il, *qu'étant en commerce de lettres avec Mr.* Leibniz, *& lui ayant donné avis que j'étois en poſſeſſion d'une méthode pour déterminer les tangentes & pour les queſtions de* maximis *&* minimis, *méthode que n'embarraſſoient point les irrationnalités, & l'ayant cachée ſous des lettres tranſpoſées, il me répondit qu'il avoit rencontré une méthode ſembla-*

(ccc) De *dim. figur.* Edimb. (ddd) Lib. II. lemm. II.

ble, & il me communiqua cette méthode, qui ne différoit de la mienne que dans les termes & les ſignes, comme auſſi dans l'idée de la génération des grandeurs. Cela ſe lit encore dans les éditions des années 1713 & 1714, mais on l'a ſuprimé dans celle de 1726, peut être ſans le conſentement de *Neuton*, qui mourut peu de mois après. Les défenſeurs de *Leibniz* pourront toujours en appeller à ce témoignage de la conſcience de *Neuton*, qui n'ignoroit pas le ſecond voyage de *Leibniz* à Londres, & ſon entrevue avec *Collins*, le dépoſitaire de ſes papiers; car *Collins* l'en avoit informé, comme on le voit par une lettre du *Commercium Epiſtolicum.*

Il y a apparence que Mr. *Leibniz* auroit reſté tranquille poſſeſſeur d'une partie de l'honneur de la découverte de ſon nouveau calcul, s'il eût été plus équitable envers *Neuton.* Nous ne pouvons ici diſſimuler qu'il eut des torts conſidérables, & ce fut ce qui lui attira ſon eſpèce de diſgrace. Déja quelques lettres écrites en Angleterre, & où il s'attribuoit trop excluſivement cette invention, lui avoient attiré des remarques déſagréables ſur le droit qu'y avoit *Neuton* antérieurement à lui. Mr. *Fatio* avoit même dit hautement que Mr. *Leibniz* ne s'imaginât pas qu'il tint de lui ce qu'il ſçavoit de ce calcul; qu'il étoit obligé de reconnoître *Neuton* pour le premier inventeur du calcul des fluxions, & qu'il laiſſoit à juger quelle part y avoit Mr. *Leibniz*, à ceux qui pouvoient lire leurs lettres mutuelles, & divers papiers conſervés dans le dépôt de la Societé Royale. *Leibniz* inſulté ſans raiſon, répondit vivement, & ſe plaignit à la Societé Royale; mais l'affaire n'eut pas alors d'autre ſuite. Ce fut ſeulement quelques années après que la querelle éclata. Le traité de *Neuton* ſur la *Quadrature des courbes*, & ſon *énumération des lignes du troiſiéme ordre* ayant vu le jour, les Journaliſtes de Leipſick n'en firent pas un extrait trop avantageux. On y diſoit entr'autres, après une légére expoſition de la nature des fluxions, que *Neuton*,

Neuton, au lieu des différences Leibnitiennes, ſe ſervoit & s'étoit toujours ſervi des *fluxions*, comme le P. *Fabri* avoit ſubſtitué dans ſa *Synopſis Geometriæ*, le mouvement aux indiviſibles de *Cavalleri*. C'étoit, ce ſemble, dire que *Neuton* n'avoit fait que ſubſtituer les fluxions aux différences, quoique ces mots, *& s'eſt toujours ſervi*, ſemblent inſérés exprès pour prévenir ce ſens. Quel que fût l'objet des Journaliſtes, qui auroient pu s'exprimer plus clairement, & rendre ſans ambiguité à *Neuton* la juſtice qu'il méritoit, cet article bleſſa ſes compatriotes. *Keil* mit en 1708, dans les *Tranſactions Philoſophiques*, un écrit où il diſoit formellement que *Neuton* étoit le premier inventeur du calcul des fluxions, & que Mr. *Leibniz*, en le publiant dans les Actes de Leipſick, n'avoit fait qu'en changer le nom & la notation. *Leibniz* prit ces paroles pour une accuſation de plagiat, à quoi elles reſſemblent effectivement beaucoup, & par une lettre écrite à Mr. *Hans Sloane*, Secretaire de la Societé Royale, il demanda que *Keil* ſe retractât. *Keil*, au lieu de le faire, répondit à Mr. *Hans Sloane* par une longue lettre, où il accumule toutes les raiſons qu'il peut pour montrer que non-ſeulement *Neuton* a précédé *Leibniz*, mais qu'il lui a donné tant d'indices de ſon calcul, qu'il ne pouvoit pas échapper à un homme même d'une intelligence médiocre. La lettre fut envoyée à *Leibniz*, qui demanda à la Societé Royale de faire ceſſer ces criailleries de la part d'un homme trop nouveau pour ſçavoir ce qui s'étoit paſſé entre *Neuton* & lui. La Societé Royale jugea qu'il falloit conſulter les piéces originales, & nomma des Commiſſaires pour les choiſir & les examiner. Ils raſſemblérent celles qu'on lit dans le *Commercium Epiſtolicum*, & ils firent leur rapport de cette maniére: „ Qu'il paroiſſoit par ces „ piéces que Mr. *Collins* communiquoit fort librement aux „ habiles gens les écrits dont il étoit le dépoſitaire; que „ Mr. *Leibniz* ne paroiſſoit pas avoir eu connoiſſance de ſon „ calcul juſqu'au mois de Juin 1677, un an après la com-

» munication d'une lettre où la méthode des fluxions étoit
» ſuffiſamment décrite pour toute perſonne intelligente. « Nous remarquons ici qu'après avoir lu & relu cette lettre, *nous y trouvons ſeulement cette méthode décrite quant à ſes effets & ſes avantages, mais non quant à ſes principes*; ce qu'il eſt important d'obſerver, afin de ne point donner à ce mot un ſens qu'il ne doit point avoir, & ſur lequel quelqu'un qui n'auroit pas les piéces en main, condamneroit ſans héſiter Mr. *Leibniz*. Mais revenons au rapport des Commiſſaires de la Societé Royale. Ils ajoutent que par des lettres de *Neuton*, depuis 1669 juſqu'en 1677, il paroît qu'il étoit en poſſeſſion de la méthode des fluxions; que la méthode différentielle de *Leibniz* étoit la même, aux termes & ſignes près, que celle des fluxions; ils diſent enfin qu'ils regardent M. *Neuton* comme le premier inventeur de cette méthode, & qu'ils penſent que Mr. K*eil* en le diſant n'a fait aucune injure à Mr. *Leibniz*. Du reſte, ils ne prononcent rien ſur les indices qu'a pu fournir à Mr. *Leibniz* la correſpondance qu'il a eue avec *Neuton*. Ils en abandonnent la déciſion aux lecteurs, & pour les mettre en état de juger, la Societé Royale ordonna l'impreſſion des piéces ſur leſquelles étoit fait ce rapport. Elles parurent en 1712, ſous le titre de *Commercium Epiſtolicum de Analyſi promotâ*, in 4°.

La querelle concernant l'invention du calcul des fluxions, ou différentiel, n'en reſta pas là. Le *Commercium Epiſtolicum* ayant paru, Mr. *Leibniz* s'en plaignit beaucoup, & menaça d'y répondre d'une maniére qui confondroit ſes adverſaires. Il eût été difficile de renverſer les faits qui prouvent l'antériorité de *Neuton* ſur lui, en ce qui concerne l'invention de ce calcul: ce point ne pourra jamais être conteſté. Quant au reſte, il ne nous paroit pas ſans réponſe. Cependant tout cela n'aboutit qu'à quelques écrits anonymes, ouvrages de ſes amis, où *Neuton* étoit plutôt attaqué, que *Leibniz* défendu. On y prétendoit entr'autres,

que

que Mr. *Neuton* ne connoiſſoit pas le vrai principe du calcul des différences des degrés ſupérieurs ; il eſt vrai que par précipitation il s'étoit trompé dans une des maniéres de conſidérer ces différences ; mais l'on voit par une lettre écrite à *Wallis* en 1692 , qu'il connoiſſoit la véritable. Keil défendit *Neuton* dans les mêmes Journaux: on lui repliqua, & l'on ſe dit des injures ou des choſes fort aigres , comme c'eſt la coutume en pareil cas. Ce qu'il y eut de plus remarquable dans la ſuite de cette conteſtation, fut la propoſition d'un problême que *Leibniz* fit indirectement à *Neuton*. Ce problême , qu'après s'être concerté avec *Bernoulli* , il crut propre à embarraſſer ſes adverſaires , eſt le ſuivant. *Soit , par exemple , une infinité de courbes de même eſpèce , comme ſeroient des hyperboles de même ſommet & de même centre , depuis la plus applatie qui coïncide avec ſon axe , juſqu'à la plus ouverte qui n'eſt autre choſe que la ligne perpendiculaire à l'axe commun ; on demande la courbe qui les coupera toutes à angles droits.* Nous nous hâtons d'obſerver que ce n'eſt là qu'un cas des plus ſimples , & qui n'excède pas la portée d'un médiocre Analiſte. Le problême eſt bien autrement difficile, s'il s'agit d'une ſuite de courbes , d'hyperboles , par exemple, de même ſommet , & même paramétre , mais de centres variables ; ſi les centres & les paramétres ſont variables ; ſi les courbes, au lieu d'être géométriques ſont tranſcendentes , par exemple , une infinité de logarithmiques paſſant par le même point , &c. L'idée générale du problême comprend une multitude d'autres cas , dont quelques-uns ſont d'une très-grande difficulté. L'hiſtoire de ce problême , déja ébauché par *Viviani* , & enſuite propoſé dans les Actes de Leipſick de 1697 , & réſolu plus généralement par Mr. *Jaques Bernoulli* , ſeroit trop longue. Nous nous bornons à dire qu'il nous paroit que *Neuton* le traita un peu trop légérement dans l'eſquiſſe de ſolution qu'il en donna ; non que nous penſions qu'il ne l'eût pas réſolu d'une maniére complette , mais il y eût rencontré des diffi-

cu'tés particuliéres, ſurtout au cas propoſé par Mr. *Bernoulli*. Quoi qu'il en ſoit, ce problême a ſucceſſivement excité la ſagacité de Mr. *Jean Bernoulli*, de ſon fils *Nicolas Bernoulli* & de ſon neveu du même nom, de Mr. *Tai or*, qui parmi les Anglois y ſatisfit, & de Mr. *Herman*. On trouve toutes leurs recherches ſur ce ſujet dans les Oeuvres de Mr. *Bernoulli* (eee).

Un ami commun de *Leibniz* & de *Neuton* (l'Abbé *Conti*, Noble Vénitien) entreprit en 1715 de les faire expliquer l'un à l'autre. Mais cela ne ſervit qu'à les aigrir davantage, *Leibniz* perſiſtant à conteſter à *Neuton* ſon droit de priorité ſur le calcul en queſtion, & *Neuton* refuſant à *Leibniz* ce qu'il lui avoit autrefois accordé (fff). Enfin la mort de *Leibniz*, arrivée vers la fin de 1716, mit fin à la querelle. Pour la réſumer en peu de mots, nous dirons qu'il eſt inconteſtable que Mr. *Neuton* eſt le premier inventeur du calcul des fluxions: quant à Mr. *Leibniz*, il nous paroit que les piéces qu'on peut prouver lui avoir été communiquées, ne contiennent rien qui puiſſe donner lieu de le regarder comme ayant emprunté ce calcul de *Neuton*, mais ſeulement comme l'ayant deviné ſur la deſcription que *Neuton* lui faiſoit de ſes avantages. Au ſurplus, ſi l'on obſerve combien peu il y avoit à faire pour paſſer des calculs de *Barrou* & de *Wallis* au calcul différentiel, il paroitra, ce ſemble, ſuperflu de rechercher ailleurs l'origine de ce dernier. En effet, ce que *Barrou* déſignoit par e & a, n'étoit autre choſe que les incrémens inſtantanés & infiniment petits de l'abſciſſe & de l'ordonnée. Or en ſuppoſant cette équation, par exemple, $x^3 = by^2$, le calcul de *Barrou*, dépouillé des opérations ſuperflues, donnoit $3x^2 e = 2bya$; de même l'équation $x^4 = b^3 y$, donnoit $4x^3 e = b^3 a$. L'analogie conduiſoit

(eee) Voyez la Table générale des Oeuvres de *J. Bernoulli* au mot *Trajectoria Orthogonalis*.

(fff) Voyez *Neut. Opuſcula* T. 1, p. 379. & ſuiv.

ſoit donc à remarquer que ſi l'on avoit $x^n = y$, on devoit trouver $nx^{n-1} e = a$, quel que fût le nombre n, entier ou rompu, poſitif ou négatif. D'un autre côté, *Wallis* avoit deſigné les élémens des aires des courbes par le rectangle fait de l'ordonnée, & d'une portion infiniment petite de l'abſciſſe qu'il nommoit A, de ſorte que l'élément de l'aire circulaire étoit ſuivant lui, $A\sqrt{aa - xx}$. Il avoit auſſi réduit à une expreſſion ſemblable, les élémens des longueurs des arcs curvilignes, ſçavoir par une analogie fondée ſur la reſſemblance du petit triangle caractériſtique avec celui de la ſoutangente, la tangente & l'ordonnée. Ajoutons à cela, de marquer l'incrément d'une grandeur de quelque maniére qui montre à quelle grandeur il appartient, comme par la même lettre précédée d'un ſigne particulier, (*Leibniz* a choiſi la lettre *d*, qui ſignifie *difference*) : voilà le paſſage du calcul de *Barrou* & de celui de *Wallis* au calcul différentiel. Mais quoiqu'il y eût auſſi peu à faire pour paſſer de l'un à l'autre, il y auroit une grande injuſtice à vouloir priver *Leibniz* de l'honneur de cette invention, puiſque tant de Géométres avoient vu les livres de *Barrou* & de *Wallis*, les avoient médités, & n'avoient pas été plus loin. Le génie conſiſte dans cette heureuſe fécondité de vues & d'expédiens, qui paroiſſent après coup ſimples & faciles, mais qui échappent néanmoins à ceux qui ne ſont pas avantagés de cet heureux don de la nature.

N°. I.

G. G. LEIBNITII

DISPUTATIO ARITHMETICA

DE COMPLEXIONIBUS,

Habita in Illuſtri Academiâ Lipſienſi,

Die VII. *Martii* MDCLXVI.

G. G. LEIBNITII

DISPUTATIO ARITHMETICA

DE COMPLEXIONIBUS.

METAPHYSICA, ut altiſſimè ordiar, agit tum de ente tum de entis affectionibus: ut autem corporis naturalis affectiones non ſunt corpora, ita entis affectiones non ſunt entia. Eſt autem entis affectio (ſeu modus,) alia abſoluta, quæ dicitur qualitas, alia reſpectiva, eaque vel rei ad partem ſuam, ſi habet, quantitas; vel rei ad aliam rem relatio, etſi accuratiùs loquendo, ſupponendo partem quaſi a toto diverſam etiam quantitas rei ad partem relatio eſt. Manifeſtum igitur neque qualitatem neque quantitatem neque relationem entia eſſe: Earum verò tractationem in actu ſignat, ad Metaphyſicam pertinere. Porrò omnis relatio aut eſt unio aut convenientia. In unione autem res inter quas hæc relatio eſt dicuntur partes, ſumtæ cum unione, totum. Hoc contingit quoties plura ſimul tanquam unum ſupponimus. Unum autem eſſe intelligitur quicquid uno actu intellectus, ſ. ſimul, cogitamus, v. g. quemadmodum numerum aliquem quantumlibet magnum, ſæpe cæca quadam cogitatione ſimul apprehendimus, cyphras nempe in charta legendo cui explicate intuendo ne Methuſalæ quidem ætas ſuffectura ſit. Abſtractum autem ab uno eſt unitas, ipſumque totum abſtractum ex unitatibus, ſeu totalitas dicitur numerus. Quantitas igitur eſt numerus partium. Hinc manifeſtum in reipſa quantitatem & numerum coincidere. Illam tamen interdum quaſi extrinſece, relatione ſeu ratione ad aliud, in ſubſidium nem-

nempe, quamdiu numerus partium cognitus non eſt, exponi. Et hæc origo eſt ingenioſæ Analyticæ ſpecioſæ, quam excoluit inprimis *Carteſius*, poſtea in præcepta collegere *Franc. Schottenius*, & *Eraſmus Bartholinus*, hic elementis Matheſeos univerſalis, ut vocat. Eſt igitur Analyſis doctrina de rationibus & proportionibus, ſeu quantitate non expoſita; Arithmetica de quantitate expoſita, ſeu numeris: falſo autem Scholaſtici credidere numerum ex ſola diviſione continui oriri nec ad incorporea applicari poſſe. Eſt enim numerus quaſi figura quædam incorporea orta ex unione Entium quorumcunque, v. g. Dei, Angeli, Hominis, Motus, qui ſimul ſunt quatuor. Quum igitur numerus ſit quiddam univerſaliſſimum meritò ad Metaphyſicam pertinet. Si metaphyſicam accipias pro doctrina eorum, quæ omni entium generi ſunt communia. Matheſis enim, (ut nunc nomen illud accipitur) accuratè loquendo non eſt una diſciplina, ſed ex variis diſciplinis decerptæ particulæ quantitatem ſubjecti in unaquaque tractantes, quæ in unum propter cognationem meritò coaluerunt. Nam uti Arithmetica atque Analyſis agunt de quantitate entium, ita Geometria de quantitate corporum, aut ſpatii, quod corporibus coextenſum eſt. Politicam verò diſciplinarum in profeſſiones diviſionem, quæ commoditatem docendi potiùs, quàm ordinem naturæ ſecuta eſt, abſit ut convellamus. Cæterum totum ipſum (& ita numerus vel totalitas) diſcerpi in partes tanquam minora tota poteſt, id fundamentum eſt complexionum, dummodo intelligas dari in ipſis diverſis minoribus totis partes communes, v. g. Totum ſit A. B. C. erunt minora Tota, partes illius, AB. BC. AC: Et ipſa minimarum partium, ſeu pro minimis ſuppoſitarum (nempe unitatum) diſpoſitio, inter ſe & cum toto, quæ appellatur ſitus, poteſt variari. Ita oriuntur duo variationum genera complexionis & ſitus. Et tum complexio tum ſitus ad Metaphyſicam pertinet, nempe ad doctrinam de toto & partibus, ſi in ſe ſpectentur: Si verò intueamur variabilitatem, id eſt, quantitatem variationis, ad numeros & arithmeticam deveniendum eſt. Complexionis autem doctrinam magis ad arithmeticam puram, ſitus ad figuratam pertinere crediderim, ſic enim unitates lineam efficere intelliguntur. Quanquam hic obiter notare volo, unitates vel per modum lineæ rectæ vel circuli aut alterius lineæ linearumve in ſe redeuntium aut figuram claudentium diſponi poſſe, priori modo in ſitu abſoluto ſeu partium cum toto, ordine; poſteriori in ſitu relato ſeu partium ad partes, vicinitate, quæ quomodo differant infra dicemus def. 4 & 5. Hæc procemii loco ſufficiant, ut qua in diſciplina materiæ hujus ſedes ſit, fiat manifeſtum.

DEFI-

DEFINITIONES.

1) Variatio h. l. eſt mutatio relationis. Mutatio enim alia ſubſtantiæ eſt, alia quantitatis, alia qualitatis; alia nihil in re mutat, ſed ſolum reſpectum, ſitum, conjunctionem cum alio aliquo.

2) Variabilitas eſt ipſa quantitas omnium variationum. Termini enim potentiarum in abſtracto ſumti quantitatem earum denotant, ita enim in mechanicis frequenter loquuntur, potentias machinarum duarum duplas eſſe invicem.

3) Situs eſt localitas partium.

4) Situs eſt vel abſolutus vel relatus: ille partium cum toto, hic partium ad partes. In illo ſpectatur numerus locorum & diſtantia ab initio & fine, in hoc neque initium neque finis intelligitur, ſed ſpectatur tantum diſtantia partis a data parte. Hinc ille exprimitur linea aut lineis figuram non claudentibus neque in ſe redeuntibus, & optimè linea recta; hic linea aut lineis figuram claudentibus, & optimè circulo. In illo prioritatis & poſterioritatis ratio habetur maxima, in hoc nulla. Illum igitur optimè ordinem dixeris;

5) Hunc vicinitatem, illum diſpoſitionem, hunc compoſitionem. Igitur ratione ordinis differunt ſitus ſequentes: a b c d. b c d a. c d a b. d a b c. At in vicinitate nulla variatio, ſed unus ſitus eſſe intelligitur, *b*
hic nempe: Unde feſtiviſſimus *Taubmannus*, quum Decanus *a* *c*
Facultatis philoſophicæ eſſet, dicitur Witebergæ in publico *d*
programmate ſeriem candidatorum Magiſterii circulari diſpoſitione complexus, ne avidi lectores intelligerent, quis ſuillum locum teneret.

6) Variabilitatem ordinis intelligemus ferè, quando ponemus Variationes κατ' ἐξοχὴν v. g. Res IV. poſſunt tranſponi modis 24.

7) Variabilitatem complexionis dicimus Complexiones. v. g. Res IV. modis diverſis invicem conjungi poſſunt.

8) Numerum rerum variandarum dicemus ſimpliciter, Numerum, v. g. IV. in caſu propoſito.

9) Complexio, eſt unio minoris totius in majori, uti in proœmio declaravimus.

10) Ut autem certa complexio determinetur, majus totum dividendum eſt in partes æquales ſuppoſitas ut minimas, (id eſt quæ nunc quidem non ulterius dividantur) ex quibus componitur & quarum variatione variatur complexio ſeu totum minus; quia igitur totum ipſum minus, majus minuſve eſt, prout plures partes una vice ingrediuntur; numerum ſimul ac ſemel conjungendarum partium, ſeu unitatum, dicemus exponentem, exemplo progreſſionis geometricæ, v. g. ſit totum A B C D. Si tota minora conſtare debent ex 2 partibus, v. g. AB. AC. AD.

B C. BD. CD. exponens erit 2, ſin ex tribus, v. g. ABC. ABD. ACD. BCD. exponens erit 3.

11) Dato exponente complexiones ita ſcribemus: ſi exponens eſt 2 Com2nationem (combinationem;) ſi 3 Con3nationem (conternationem) ſi 4 Con4nationem &c.

12) Complexiones ſimpliciter ſunt omnes complexiones omnium exponentium computatæ, v. g. 15. (de 4 numero) quæ componuntur ex 4 (Unione) 6 (com2natione) 4 (con3natione) 1 (con4natione.)

13) Variatio utilis (inutilis,) eſt quæ propter materiam ſubjectam locum habere non poteſt: v. g. 4 Elementa com2nari poſſunt 6 modis, ſed duæ com2nationes ſunt inutiles, nempe quibus contrariæ ignis, aqua; aer, terra com2nantur.

14) Claſſis rerum eſt totum minus, conſtans ex rebus convenientibus in certo tertio, tanquam partibus; ſic tamen ut reliquæ claſſes contineant res contra diſtinctas. v. g. infra probl. 3 ubi de claſſibus opinionum circa ſummum bonum ex *B. Auguſtino* agemus.

15) Caput variationis eſt poſitio certarum partium; Forma variationis, omnium, quæ in pluribus variationibus obtinet v. infr. probl. 7.

16) Variationes communes ſunt, in quibus plura capita concurrunt, v. infr. probl. 8 & 9.

17) Res homogenea eſt quæ eſt æquè dato loco ponibilis ſalvo capite. Monadica autem, quæ non habet homogeneam. v. probl. 7.

18) Caput multiplicabile dicitur, cujus partes poſſunt variari.

19) Res repetita eſt, quæ in eadem variatione ſæpius ponitur v. probl. 6.

20) Signo + deſignamus additionem, — ſubtractionem, ⌒ multiplicationem, ◡ diviſionem, f. facit, ſeu ſummam, = æqualitatem. In prioribus duobus & ultimo convenimus cum *Carteſio*, Algebraiſtis, aliiſque: Alia ſigna habet *Iſaacus Barrowius* in ſua editione *Euclidis*, Cantabrig. 8vo anno 1655.

PROBLEMATA.

TRia ſunt, quæ ſpectari debent: Problemata, Theoremata, Uſus; in ſingulis problematis uſum adjecimus; ſicubi operæ pretium videbatur, & theoremata. Problematum autem quibuſdam rationem ſolutionis addidimus. Ex iis partem poſteriorem primi, ſecundum & quartum aliis debemus, reliqua ipſi eruimus. Quis illa primus detexerit ignoramus. *Schwenterus* Delic. l. 1. ſect. 1. prop. 32. apud *Hieronym. Cardanum*, *Joannem Buteonem*, & *Nicolaum Tartaleam* extare dicit. In *Cardani* tamen practica Arithmetica, quæ prodiit Mediolani anno 1539 nihil reperimus. Inprimis dilucidè, quicquid dudum habetur, propoſuit *Chriſtoph.* *Clavius*

Clavius in Com. ſupra *Joh. de Sacro Boſc.* Sphaer. edit, Romæ forma 4ta anno 1585, pag. 33. ſeqq.

PROBLEMA.

Dato numero et exponente complexiones invenire.

Solutiones duo ſunt modi, unus de omnibus complexionibus, alter de com2nationibus ſolum: ille quidem eſt generalior, hic verò pauciora requirit data, nempe numerum ſolum & exponentem; cùm ille etiam præſupponat inventas complexiones antecedentes. Generaliorem modum nos deteximus, ſpecialis eſt vulgatus. Solutio illius talis eſt: *addantur complexiones exponentis antecedentis & dati de numero antecedenti, productum erunt complexiones quæſitæ*; v. g. eſto numerus datus 4, exponens datus 3, addantur de numero antecedente 3. com2nationes 3. & con3natio 1. (3. † 1. f. 4.) productum 4. erit quæſitum. Sed quum prærequirantur complexiones numeri antecedentis, conſtruenda eſt tabula א. in qua linea ſuprema a ſiniſtra dextrorſum continet numeros, a 0 uſque ad 12 utrimque incluſivè, ſatis enim eſſe duximus huc uſque progredi, quam facile eſt continuare: linea extrema ſiniſtra a ſummo deorſum continet exponentes a 0. ad 12. linea infima a ſiniſtra dextrorſum continet complexiones ſimpliciter. Reliquæ inter has lineæ continent complexiones dato numero qui ſibi in vertice directè reſpondet, & exponente qui e regione ſiniſtra. Ratio ſolutionis, & fundamentum Tabulæ patebit, ſi demonſtraverimus, complexiones dati numeri & exponentis oriri ex ſumma complexionum de numero præcedenti exponentis & præcedentis & dati. Sit enim numerus datus 5, exponens datus 3. Erit numerus antecedens 4. is habet con3nationes 4, per Tabulam א. com2nationes 6. Jam numerus 5. habet omnes con3nationes quas præcedens (in toto enim & pars continetur) nempe 4. & præterea tot quot præcedens habet com2nationes (nova enim res qua numerus 5. excedit 4. addita ſingulis com2nationibus hujus, facit totidem novas con3nationes nempe 6. † 4. f. 10. E. Complexiones dati numeri &c.) Q. E. D. Majoris lucis cauſa appoſuimus Tabulam ב. ubi lineis tranſverſis diſtinximus con3nationem de 3. & de 4. & de 5. Sic tamen ut con3nationes priores ſint ſequenti communes, & per conſequens tota tabula ſit con3nationum numeri 5. utque manifeſtum eſſet quæ con3nationes numeri ſequentis ex com2nationibus antecedentis addito ſingulis novo hoſpite orirentur, linea deorſum tendente combinationes a novo hoſpite diſtinximus.

Tab. ℵ.

Exponentes.														Complexiones.
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
1	0	1	2	3	4	5	6	7 *n*	8	*u* 9	*m* 10	*e* 11	*r* 12 *i*	
2	0	0	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66	
3	0	0	0	1	4	10	20	35	56	64	120	165	220	
4	0	0	0	0	1	5	15	35	70	126	210	330	495	
5	0	0	0	0	0	1	6	21	56	126	252	462	792	
6	0	0	0	0	0	0	1	7	28	84	210	462	924	
7	0	0	0	0	0	0	0	1	8	36	120	330	792	
8	0	0	0	0	0	0	0	0	1	9	45	165	495	
9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	10	55	220	
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	11	66	
11	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	12	
12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	
*	0	1.3.7.15.31.63.127.255.511.1023.2047.4095.												
†	1.2.4.8.16.32.64.128.256.512.1024.2048.4096.													

Complexiones ſimpliciter * (ſeu ſumma complexionum dato exponente) addita unitate, quæ coincidunt cum terminis progreſſionis geometricæ duplæ. †.

Tab. ב.

Numerus Conʒnationum			Numerus Rerum
1	a b	c	3
2	a b	d	
3	a c	d	
4	b c	d	
5	a b	e	4
6	a c	e	
7	a d	e	
8	b c	e	
9	b d	e	
10	c d	e	5

Adjiciemus hic Theoremata quorum τὸ ὅτι ex ipſa Tabula ℵ. manifeſtum eſt, τὸ διότι ex tabulæ fundamento: 1. ſi exponens eſt major numero, complexio eſt 0. 2. ſi æqualis, ea eſt 1. 3. ſi exponens eſt numero unitate minor, complexio & numerus ſunt idem. 4. Generaliter: exponentes duo in quos numerus biſecari poteſt, ſeu qui ſibi invicem complemento ſunt ad numerum eaſdem de illo numero habent complexiones. Nam quum in minimis exponentibus 1. & 2. in quos biſecatur numerus 3, id verum ſit quaſi caſu, per Tab. ℵ. & verò cæteri ex eorum additione oriantur per ſolut. probl. 1. ſi æqualibus (3 & 3) addas æqualia (ſuperius 1 & inferius 1) producta erunt æqualia (3 † 1. f. 4. = 4.) & idem eveniet in cæteris neceſſitate. 5. ſi numerus eſt impar, dantur in medio duæ complexiones ſibi proximæ æquales; ſin par, id non evenit. Nam numerus impar biſecari poteſt in duos exponentes proximos unitate diſtantes; v. g. 2 † 2. f. 3. par verò non poteſt. Sed proximi in

quos

quos biſecari par poteſt ſunt iidem, quia igitur in duos exponentes impar numerus biſecari poteſt, hinc duas habet complexiones æquales per th. 4. quia illi unitate diſtant, proximas. 6. Complexiones creſcunt uſque ad exponentem numero ipſi dimidium aut duos dimidios proximos, inde iterum decreſcunt. 7. Omnes numeri primi metiuntur ſuas complexiones particulari (ſeu toto exponente.) 8. Omnes complexiones ſimpliciter, ſunt numeri impares.

COROLLARIA.

I. Logica. 1. Duæ ſunt propoſitiones primæ, una, principium omnium theorematum ſeu propoſitionum neceſſarium: Quod eſt (tale) id eſt ſeu non eſt (tale) vel contra; altera omnium obſervationum ſeu propoſitionum contingentium: Aliquid exiſtit. 2. Dantur demonſtrationes perfectæ in omnibus diſciplinis. 3. Si diſciplinas in ſe ſpectemus, omnes ſunt theoreticæ; ſi uſum, omnes practicæ. Eæ tamen, ex quibus uſus magis immediatè fluit, meritò practicæ κατ' ἐξοχὴν dicuntur. 4. Methodus etſi in omni diſciplina omnis adhiberi poteſt; ut vel veſtigia inquiſitionis noſtræ, vel producentis naturæ in tradendo ſequamur; tamen in practicis fit ut coincidat & naturæ & cognitionis ordo, quia in iis ipſa rei natura a cogitatione & productione noſtra oritur. Nam finis & nos movet ad media producenda, & ducit ad cognoſcenda; quod in iis quæ cognoſcere tantum, non etiam efficere poſſumus ſecus eſt. Præterea etſi omnis methodus licita eſt, non tamen omnis expedit. 5. Syllogiſmus non eſt finis Logicæ, ſed contemplatio ſimplex; propoſitio verò eſt medium ad hanc, ſyllogiſmus ad propoſitionem.

II. Metaphysica. 1. Infinitum aliud alio majus eſt. *Cardan.* Arithmet. Pract. c. 66. n. 165. & 260. Diſſentire dicitur *Sethus Wardus* in Arithmetica infinitorum. 2. Deus eſt ſubſtantia, Creatura accidens. 3. Neceſſe eſt dari diſciplinam de creatura in genere, ſed ea fere, hodie in Metaphyſica comprehenditur. 4. vix eſt probabile terminum cauſæ univocum conceptum dicere, ad efficientem materialem formalem, finalem. Nam vox influxus itidem quid niſi vox eſt?

III. Physica. 1. Quum obſervandum ſit alia mundi corpora moveri circa proprium axem, idem de terra abſurdum non eſt quemadmodum nec contrarium. 2. Quum corporum ſumma differentia ſit denſum & rarum, manifeſtum eſt quatuor primas qualitates, ita illuſtrari poſſe: Humidum eſt rarum, Siccum eſt denſum, Calidum eſt rarefactivum, Siccum condenſativum. Omne autem rarum facile alienis terminis continetur, difficulter ſuis; denſum contra: Et omne rarefaciens copiam facit in raro homogeneis ad ſe invicem properandi, & heterogeneis ſe ſeparandi; quibus in denſo via intercluſa eſt. Unde definitionum Ariſtotelicarum ratio

 redditur.

redditur. Neque ignis, qui rarus eſſe videtur, quum tamen ſiccus eſſe debeat, obſtat. Nam reſpondeo: Aliud dicendum de igne per ſe, aliud de igne alii corpori inhærente, nam ejus naturam ſequitur. Ita patet, flammam, quæ nihil aliud eſt quàm aër ignitus, fluidam eſſe debere, quemadmodum & aër ipſe; contra ignem in ferro ignito conſiſtentem, quemadmodum & ferrum ipſum. 3. Vim Magnetis ab Adamante ſiſti fi-ctum eſt.

IV. Practica: 1. Juſtitia (particularis) eſt virtus ſervans mediocritatem circa affectus hominis erga hominem, juvandi & nocendi, ſeu favorem & odium regula mediocritatis eſt: licere eo uſque alterum (me) juvare, quo uſque (alteri) tertio non nocetur. Hoc obſervare neceſſe eſt, ut tueamur *Ariſtotelem* contra cavillum *Grotii*, qui de J. B. & P. Prolegom. ** 4. fac. a. ita dicit: „Non rectè autem univerſaliter poſi-
» tum hoc fundamentum (quòd virtus poſita ſit in mediocritate) vel ex
» juſtitia apparet, cui oppoſitum nimium & parum cum in affectibus &
» ſequentibus eas actionibus invenire non poſſet (*Ariſtoteles*), in rebus
» ipſis circa quas juſtitia verſatur utrumque quæſivit, quod ipſum primum
» eſt deſilire de genere in genus alterum quod in aliis meritò culpat. «
Vult nempe *Grotius* incongruè in ſpeciebus diviſionis alicujus aliquam interſeri, quæ ex alio prorſus dividendi fundamento derivetur; (quod vocat minùs Philoſophicè, μεταβαίνειν εἰς ἄλλο γένος) & certè aliud prorſus eſt mediocritas affectuum; aliud, rerum. Virtutes quoque non rerum ſed animorum habitus ſunt. Quare oſtendimus juſtitiam & ipſam in affectuum moderatione eſſe poſitam. 2. Non ineptè dicit *Thraſymachus* apud *Platonem* de Republ. lib. 1. fol. 379. Juſtum eſſe potentiori utile. Nam Deus propriè & ſimpliciter eſt cæteris potentior, (homo enim homine abſolutè potentior non eſt, quum fieri poſſit, ut quantumcunque robuſtus ab infirmo occidatur.) Cæterum Dei utilitas non in lucro, ſed honore conſiſtit. Igitur Gloriam Dei menſuram omnis juris eſſe manifeſtum eſt. Et qui Theologos moraliſtas & caſuum conſcientiæ ſcriptores conſulet, videbit eo plerumque diſcurſus ſuos in hac fundare. Conſtituto igitur certo principio, doctrina de juſto ſcientificè conſcribi poterit. Quod hactenus factum non eſt.

N°. II.

Nº. II.

G. G. LEIBNITII
EPISTOLA
AD
BENEDICT. DE SPINOSA.

I. *Mittit* Leibnitius *notitiam opticæ promotæ.* II. *De* Lanæ *&* Oltii *libris opticis.* III. *De colligendis radiis.*

I. INter ceteras laudes tuas, quas fama publicavit, etiam inſignem rei opticæ peritiam eſſe intelligo. Quæ res effecit, ut qualemcunque conatum meum ad Te deſtinare voluerim, quo meliorem in hoc ſtudiorum genere cenſorem non temerè reperero. Schedulam hanc, quam mitto, ac *Notitiam Opticæ promotæ* inſcripſi, ideo publicavi, ut commodiùs poſſem communicare cum amicis, aut curioſis. Audio & Ampliſſimum *** *** in eodem genere florere, nec dubito, tibi cognitiſſimum eſſe. Unde ſi hujus quoque judicium & favorem mihi penetraveris, beneficium mirificè auxeris. Schedula ipſa, quid re ſit, ſatis explicat.

II. Credo, ad manus tuas perveniſſe Prodromum *Franciſci Lanæ*, Soc. Jeſ. Italicè ſcriptum, ubi Dioptrica quoque nonnulla inſignia proponit; ſed & *Joh. Oltius*, Helvetius, juvenis in his rebus pereruditus, publicavit Cogitationes Phyſico-Mechanicas de Viſione; in quibus partim machinam quandam poliendis omnis generis vitris ſimplicem admodum, & univerſalem pollicetur, partim ait, ſe reperiſſe modum quendam colligendi omnes radios ab omnibus objecti punctis venientes in totidem alia puncta reſpondentia, ſed tantùm in certa diſtantia figuraque objecti.

III. Ceterùm id, quod a me propoſitum eſt, huc redit, non ut omnium punctorum radii recolligantur: id enim in qualibet objecti diſtantia, aut figura, quantum hactenus cognitum ſit, impoſſibile eſt; ſed ut æquè colligantur radii punctorum extra axim opticum, ac in axe optico; ac proinde aperturæ vitrorum, ſalva diſtincta viſione, poſſint fieri quantæcunque, ſed hæc acutiſſimo judicio tuo ſtabunt. Vale faveque, Ampliſſime Vir; cultori ſedulo. *Francof.* 5. *Octobr. Stylo novo* 1671.

BENED. DE SPINOSA
RESPONSIO
AD
G. G. LEIBNITIUM.

Epicriſis notitiæ opticæ promotæ.

SChedulam, quam mihi dignatus es mittere, legi, magnaſque pro ejuſdem communicatione habeo gratias. Doleo, quòd mentem tuam, quam tamen credo te ſatis clarè explicuiſſe, non ſatis aſſequi potuerim, videlicet, an aliam credis eſſe cauſſam, cur in vitrorum apertura parci eſſe debemus, quàm quia radii, qui ex uno puncto veniunt, non in alio accuratè puncto; ſed in ſpatiolo, quod punctum Mathematicum appellare ſolemus, congregentur, quod ſpatiolum pro ratione aperturæ magis, aut minùs eſt. Deinde rogo, num lentes illæ, quas pandochas vocas, hoc vitium corrigant, ut ſcilicet punctum Mathematicum, ſive ſpatiolum, in quo radii, qui ex eodem puncto veniunt, poſt refractionem congregantur, idem ratione magnitudinis ſemper maneat, ſive apertura magna ſit, ſive parva. Nam ſi hæc præſtant, earum aperturam ad libitum augere licebit, & conſequenter omnibus aliis figuris mihi cognitis longè præſtantiores erunt, aliàs nihil video, cur eaſdem ſupra communes lentes tantopere commendas. Lentes enim circulares eundem ubique habent axem, adeoque quanto illas adhibemus omnia objecti puncta tanquam in axe optico poſita, ſunt conſideranda: & quamvis omnia objecti puncta non in eadem ſint diſtantia, tamen differentia, quæ inde oritur, ſenſibilis eſſe non poteſt, quando objecta admodum remota ſunt, quia tam radii, qui ex uno puncto veniunt, tanquam paralleli conſiderati, ingrederentur vitrum. Hoc tamen credo lentes tuas juvare poſſe, quando plurima objecta uno obtutu comprehendere volumus, (ut fit, quando lentes circulares converſas admodum magnas adhibemus) ut omnia ſcilicet diſtinctiùs repræſententur. Verum judicium de his omnibus ſuſpendere malo; donec mentem tuam clariùs explices, quod ut facias, enixè rogo. Dom. ***** ut jubes, alterum exemplar miſi; reſpondit, ſibi impræſentiarum tempus non eſſe id examinandi, ſe tamen poſt unam, aut alteram hebdomadam vacaturum ſperat.

Prodromum

Prodromum *Franciſci Lanæ* necdum vidi, ut nec etiam *Joh. Oltii* Cogitationes Phyſico-Mechanicas, & quod magis doleo, nondum Hypotheſis tua phyſica ad manus meas pervenit, nec hic Hagæ Comitis venalis extat. Munus igitur, quod mihi tam liberaliter promittis, acceptiſſimum mihi erit, & ſi qua alia re tibi inſervire potero, ſemper me invenies &c.

N°. III.

G. G. LEIBNITII NOTITIA OPTICÆ PROMOTÆ. (a)

CUm ſæpe mecum cogitarem, quantum à perfectione opticis in res humanas redundare utilitatis neceſſe ſit; pandente nobis naturâ arcanos ſinus, faciemque mundi centuplicante, atque inſenſibiles illas machinæ detegentes quibus pleræque etiam in corporibus noſtris in pejus meliuſque mutationes peraguntur: officii mei eſſe putavi, non nihil temporibus, quod mihi plurimum diſtracto exiguum ſupereſt; impendere ſcientiæ tanti fructus; ſed more ſcilicet atque inſtituto meo, quo aſſuevi eam operam ſtudiis inſumptam pro perdita habere, qua didici tantum, ſed quod adjicerem non inveni.

Occaſio rem penitiùs ſcrutandi hæc fuit: diu eſt ut amici norunt, quod mihi in mentem venit *ratio* quædam *optica metiendi ex unâ ſtatione diſtantias magnitudineſque veras objectorum*, ita comparata ut ſpes ſit ad cœleſtia uſque ultrà parallaxes, extendi poſſe quando & fundamentum illud cui innititur, eo uſque vim notabiliter exerit.

Hanc cùm nuper poliendam reſumerem, fuit in optices interiora inquirendum paulò diligentiùs, atque imprimis cogitandum de figuris quibusdam, quas ego novis nominibus (quando & res aliis intacta eſt) *iſoptricas*, *dioptricas*, & *peroptricas* appellavi: quibus objecta æqui apparentia, ſuperficies ordinatè refringentes aut reflectentes, denique imago ejuſdem objecti, focique ejuſdem puncti, (nullius enim puncti focus unus, diſtantiâ quavis, nullius objecti unica imago eſt) circumſcriberentur aut connecterentur: ita differentia punctorum ejuſdem objecti inter ſe quod ad focum projiciendum attinet ingens, diſcriminiſque ratio atque illud ſimul apparuit, cur aperturâ exiguâ redditâ tot radios velut inutiles excludere cogamus.

Reperto mali fonte, remedium ſponte patuit, *inventumque eſt à me* LEN-

(a) Edita Ffurti apud *Joh. David. Zunnerum* 1671.

Lentium, *quas quia quantamcumque aperturam ferunt*, Pandochas *appellare ſoleo*, *genus novum*, a nullo, quod ſciam, tactum; cujus ſpecies variæ una omnium ſimpliciſſima, figuræ ſit ſatis parabilis, ex quâ ceteræ pro commoditate mutilatæ: lentium autem nomine tam *perſpicilla* quàm *Specula* ſine diſcrimine comprehendi.

Omnium autem commune eſt nullo diſtantiæ, figuræque objecti, aut fundi excipientis diſcrimine, ut omnia objecti puncta non minus diſtinctè repræſententur, ac ſi unumquodque eorum in axi optico eſſet: quod hactenus in mentem venit nulli.

Quantus ſit hujus inventi fructus, neminem opticæ intelligentem latet. Conſtat enim magnitudinem quidem apparentem poſſe viribus augeri in infinitum, ſed eâ auctâ diminui lucem: unde, ut nunc ſunt *lentes* defectu lucis in augenda magnitudine apparente parci eſſe debemus, præſertim ubi objecta non ſunt pro arbitrio noſtro illuſtrabilia (quanquam nunc quoque poſita eadem objecti illuſtratione, plus radiorum apertura major colligat:) ſi verò aperturas maximas adhibere liceret, cùm radii quoque futuri ſint proportione plures, ac proinde lux major, poterunt radii quoque in majorem amplitudinem imaginis, ſalvâ luce & diſtinctione refringi.

Cùm tamen neque lentes Pandochæ, neque ullæ aliæ ex cognitis, & fortè ex poſſibilibus quoque, omnes unius cujuſcunque puncti radios in aliud punctum recolligant (lentium enim Pandocharum eſt, id tantum præſtare punctis objecti omnibus quod lentes communes axi optico tribuunt, jam conſtat ne puncti quidem objecti in axe optico poſiti radios omnes ulla figura niſi quæ Pandochæ eſſe non poteſt reduniri) ideo inventum eſt a me remedium novum & intactum, quo magna pars pereuntium radiorum conſervatur.

Hoc ut verbo dicam præſtatur *tubis* quibuſdam catadioptricis (ad normam tamen lentium Pandocharum conſtructis), id eſt conjunctioni Dioptricæ & Catoptricæ *in unam viſionem*, cujus primus omnium, quod ſciam meritiſſimus de re mathematicâ *Hevelius* in Polemoſcopio ſpecimen dedit, ſed alio planè conſilio fructuque.

Rem tantâ certitudine, quantâ cætera optica omnia habemus, demonſtraſſe mihi videor, atque illud etiam comperiſſe, *hyperbolæ*, & *ellipſeos* & aliarum id genus figurarum non pandocharum virtutes ad *diſtinctam viſionem* efficiendam tantas non fore, quanti paſſim habentur, nec proinde in *projiciendis imaginibus* expectationi ſatisfacturas.

Ad radios autem diverſorum etiam punctorum confundendos, aut in exiguum ſpatium contrudendos, id eſt, *ad comburendum*, aut *illuſtrandum* (qui duo ſunt effectus luminis intenſi, ſed confuſi) magnam utique vim habebunt, ac proinde poliri eas operæ pretium erit: quod duobus tantùm motibus recto & circulari, & utroque non niſi ſemel adhibito, facili negotio præſtari poteſt.

No. IV.

Nº. IV.

EXCERPTA EX EPISTOLIS G. G. LEIBNITII IN COMMERCIO EPISTOLICO A JOANNE COLLINS EDITO INSERTIS.

Excerpta ex Epiſtolâ ad Dom. H. Oldenburgium *Londini anno* $167\frac{2}{3}$ 3. *Feb. data.*

CUm heri apud illuſtriſſimum *Boylium* incidiſſem in Clariſſimum *Pellium* Mathematicum inſignem, ac de Numeris incidiſſet mentio, commemoravi ego, ductus occaſione Sermonum, eſſe mihi methodum ex quodam differentiarum genere, quas voco generatrices, colligendi terminos Seriei cujuſcunque continuè creſcentis, vel decreſcentis. Differentias autem generatrices voco, ſi datæ Seriei inveniantur differentiæ, & differentiæ differentiarum, & ipſarum ex differentiis differentiarum differentiæ *&c.* & ſeries conſtituatur ex termino primo, & prima differentia, & prima differentia differentiarum, & prima differentia ex differentiis differentiarum *&c.* ea ſeries erit differentiarum generatricium, ut ſi ſeries continuè creſcens, vel decreſcens fuerit *a*, *b*, *c*, *d*.

(*Poſita* $\backsim$ *differentiæ Nota*,] *differentiæ generatrices erunt.*

1 a. 2 $a \backsim b$. 3 $\overline{a \backsim b} \backsim \overline{b \backsim c}$. 4 $\overline{\overline{a \backsim b} \backsim \overline{b \backsim c}} \backsim \overline{\overline{b \backsim c} \backsim \overline{c \backsim d}}$.

$$
\begin{array}{rccccccc}
4 & & \overline{\overline{a \backsim b} \backsim \overline{b \backsim c}} \backsim \overline{\overline{b \backsim c} \backsim \overline{c \backsim d}} & & & & & \\
3 & & a \backsim b \backsim b \backsim c & & & b \backsim c \backsim c \backsim d. & & \\
2 & & a \backsim b & & b \backsim c & & c \backsim d & \\
1 & a & & b & & c & & d
\end{array}
$$

Aut

Aut in Numeris ; ſi Series ſit Numerorum cubicorum deinceps ab unitate creſcentium , differentiæ generatrices erunt numeri 0 , 1 , 6 , 6. Voco autem generatrices, quia ex iis certo modo multiplicatis producuntur termini Seriei ; cujus uſus tum maximè apparet , cùm differentiæ generatrices ſunt finitæ ; termini autem Seriei infiniti , ut in propoſito exemplo Numerorum Cubicorum.

				0		0		0				
			6		6		6		6			
		6		12		18		24		30		
	1		7		19		37		61		91	
0		1		8		27		64		125		216

Hoc cùm audiſſet clariſſimus *Pellius* reſpondit , id jam fuiſſe in literas relatum a D. *Mouton* Canonico Lugdunenſi , ex obſervatione nobiliſſimi viri *Franciſci Regnaldis* Lugdunenſis , dudum in literario orbe celebris , in libro laudati D. *Mouton* de diametris apparentibus Solis , & Lunæ. Ego qui ex Epiſtola quadam a *Regnaldo* ad *Monconiſium* ſcripta , & Diario itinerum *Monconiſiano* inſerta , nomen D. *Moutoni* & deſignata ejus duo didiceram ; Diametros Luminarium apparentes , & conſilium de menſuris rerum ad poſteros tranſmittendis ; ignorabam tamen librum ipſum prodiiſſe : quare apud D. *Oldenburgium* Societatis Regalis Secretarium , ſumtum mutuo tumultuariè percurri , & inveni veriſſimè dixiſſe *Pellium.* Sed & mihi tamen dandam operam credidi , ne qua in animis relinqueretur ſuſpicio , quaſi tacito inventoris nomine alienis meditationibus honorem mihi quærere voluiſſem ; & ſpero apparituram eſſe , non adeo egenum me meditationum propriarum , ut cogar alienas emendicare. Duobus autem argumentis ingenuitatem meam vindicabo. Primò ſi ipſas ſchedas meas confuſas , in quibus non tantùm inventio mea , ſed & inveniendi modus , occaſioque apparet , monſtrem : deinde ſi quædam momenti maximi *Regnaldo* , *Moutono*que indicta addam , quæ ab heſterno veſpere confixiſſe me non ſit veriſimile , quæque non poſſunt facilè expectari a Tranſcriptore.

Ex ſchedis meis occaſio inventi hæc apparet : quærebam modum inveniendi differentias omnis generis poteſtatum , quemadmodum conſtat differentias quadratorum eſſe numeros impares ; inveneramque regulam generalem ejuſmodi.

Data potentia gradus dati præcedente , invenire ſequentem (vel contrà) diſtantiæ datæ , vel radicum datarum ; ſeu invenire potentiarum gradus dati utcunque diſtantium differentias. Multiplicetur potentia gradûs , proximè præcedentis radicis majoris per differentiam radicum ; & differentia potentiarum gradûs proximè præcedentis multiplicetur per radicem

minorem: productorum ſumma erit quæſita, differentia potentiarum, quarum radices ſunt datæ. Eandem regulam ita inflexeram, ut ſufficeret, præter radices, cujuslibet gradûs, etiamſi non proximè præcedentis, potentias datarum radicum dari, ad differentias potentiarum alterius cujuscunque licet altioris gradus inveniendas. Et oſtendi, quod in Quadratis obſervatur, numeros impares eſſe eorum differentias, id non niſi regulæ propoſitæ ſubſumptionem eſſe.

His meditationibus defixus, quemadmodum in quadratis differentiæ ſunt numeri impares, ita quoque quæſivi quales eſſent differentiæ Cuborum; quæ cùm irregulares viderentur, quæſivi differentias differentiarum, donec inveni differentias tertias eſſe numeros ſenarios. Hæc obſervatio mihi aliam peperit: videbam enim ex differentiis præcedentibus generari terminos, differentiaſque ſequentes, ac proinde, ex primis, quas ideo voco generatrices, ut hoc loco 0. 1. 6. 6. ſequentes omnes. Hoc concluſo reſtabat invenire, quo additionis, multiplicationisve, aut horum complicationis genere, termini ſequentes ex differentiis generatricibus producerentur. Atque ita reſolvendo experiundoque deprehendi primum terminum 0 componi ex prima differentia generatrice 0 ſumta ſemel ſeu vice una: ſecundum 1 ex prima 0 ſemel & ſecunda 1 ſemel. Tertium 8 ex prima 0 ſemel, ſecunda 1 bis, & tertia 6 ſemel: nam $0 x 1 + 1 x 2 + 6 x 1 = 8$. Quartum 27, ex prima 0 ſemel, ſecunda 1 ter, tertia 6 ter, quarta 6 ſemel: nam $0 x 1 + 1 x 3 + 6 x 3 + 6 x 1 = 27$, *&c.* idque Analyſis mihi univerſale eſſe comprobavit. Hæc fuit occaſio obſervationis meæ longè alia a *Moutoniana*, qui cùm in Tabulis condendis laboraret, in hoc calculandi compendium cum *Regnaldo* incidit: nec vel illi, vel *Regnaldo* adimenda laus; quod & *Briggius* in Logarithmicis ſuis jam olim talia quædam, obſervante *Pellio*, ex parte advertit. Mihi hoc ſupereſt, ut addam nonnulla illis indicta, ad amoliendum Tranſcriptoris nomen; neque enim intereſt Reipublicæ, quis obſervaverit, intereſt quid obſervetur. Primum ergo illud adjicio, quod apud *Moutonium* non extat, & caput tamen rei eſt: quinam ſint illi numeri, quorum Tabulam ille exhibet in infinitum continuandam, quorum ductu in differentias generatrices, productis inter ſe junctis, termini Serierum generentur. Vides enim ex ipſo modo quo tabula ab eo *pag.* 385. exhibetur, non fuiſſe id ei ſatis exploratum; alioqui enim veriſimile eſt ita Tabulam fuiſſe diſpoſiturum, ut ea numerorum connexio, atque harmonia appareret; niſi quis de induſtria texiſſe dicat: ita enim ſe habet pars Tabulæ.

1	1					
2	1	1				
3	1	2	1			
(4)	1	3	3	1		
5	1	4	6	4	1	
6	1	5	10	10	5	1
7	1	6	15	20	15	6
8	1	7	21	35	35	21
9	1	8	28	56	70	56
10	1	9	36	84	126	126
11	1	10	45	120	210	252

Apparet ex hujus Tabulæ conſtructione ſolam haberi rationem correſponſus numerorum generantium cum numero Termini generati ; ut cum terminus eſt quartus (4) producitur ex prima differentia ſemel, ſecunda ter 3, tertia ter 3, quarta ſemel 1 ; ideo in eadem (4) linea transverſa locantur 1. 3. 3. 1. Sed vel non obſervavit, vel diſſimulavit, autor correſponſum numerorum, ſi a ſummo deorſum eundo per columnas diſponantur hoc modo,

1	1					
2	1	1				
3	1	2	1			
4	1	3	3	1		
5	1	4	6	4	1	
6	1	5	10	10	5	1
7	1	6	15	20	15	6
8	1	7	21	35	35	21
9	1	8	28	56	70	56
10	1	9	36	84	126	126
11	1	10	45	120	210	252

Ita enim ſtatim vera, genuinaque eorum natura, ac generatio appa- ret; eſſe ſcilicet eos numeros quos Combinatorios appellare ſoleo, de quibus multa dixi in diſſertatiuncula de Arte Combinatoria; quoſque alii appellant ordines numericos; alii in ſpecie primam columnam Unitatum, ſecundam Numerorum naturalium, tertiam Triangularium, quartam Pyramidalium, quintam Triangulo-Triangularium *&c.* de quibus integer extat Tractatus *Paſchalii* ſub titulo Trianguli Arithmetici; in quo tamen proprietatem numerorum ejuſmodi tam illuſtrem, tamque naturalem non obſervatam ſum miratus. Sed eſt profecto caſus quidam in inveniendo, qui non ſemper maximis ingeniis maxima, ſed ſæpè etiam mediocribus nonnulla offert.

Hinc jam vera numerorum iſtorum natura, & Tabulæ conſtructio, ſive a *Regnaldo*, ſive à *Moutonio* diſſimulata, intelligitur: ſemper enim terminus datus columnæ datæ componitur ex termino præcedente columnæ tam præcedentis quàm datæ: Atque illud quoque apparet, non opus eſſe moleſto calculo ad Tabulam a *Moutonio* propoſitam continuandam, ut ipſe poſtulat; cùm hæ numerorum Series paſſim jam tradantur calculenturque.

Cæterum *Moutonius* obſervatione iſta ad interponendas medias proportionales inter duos extremos numeros datos; ego ad inveniendos ipſos numeros extremos in infinitum cum eorum differentiis, utendum cenſebam. Hinc ille, non niſi cùm differentiæ ultimæ evaneſcunt (aut penè evaneſcunt) uſum regulæ invenit; ego detexi innumerabiles caſus, regula quadam inobſervata comprehendendos; ubi poſſum ex datis numeris finitis certo modo multiplicatis producere numeros plurimarum Serierum in infinitum euntium, etſi differentiæ earum non evaneſcunt.

Ex iiſdem fundamentis poſſum efficere in progreſſionibus problemata plurima; aut in Numeris ſingularibus, aut in Rationibus vel Fractionibus: poſſum enim progreſſiones addere ſubtrahereque, imò multiplicare quoque & dividere, idque compendioſe.

$\frac{1}{3}$.	$\frac{1}{4}$.	$\frac{1}{5}$.	$\frac{1}{6}$
$\frac{1}{6}$.	$\frac{1}{10}$.	$\frac{1}{15}$.	$\frac{1}{21}$
$\frac{1}{10}$.	$\frac{1}{20}$.	$\frac{1}{35}$.	$\frac{1}{56}$
$\frac{1}{15}$.	$\frac{1}{35}$.	$\frac{1}{70}$.	$\frac{1}{126}$
&c.	*&c.*	*&c.*	*&c.*

Multa alia circa hos numeros obſervata ſunt a me, ex quibus illud eminet, quod modum habeo ſummam inveniendi Seriei Fractionum in infinitum decreſcentium; quarum numerator unitas, nominatores verò numeri iſti Triangulares, aut Pyramidales, aut Triangulo Triangulares &c.

Ex.

Ex Epiſtolâ ad eumdem anno 1675, 20. *Maii Pariſiis data.*

Litteras tuas multa fruge Algebraica refertas accepi, pro quibus tibi, & doctiſſimo *Collinio* gratias ago. Cùm nunc præter ordinarias curas Mechanicis imprimis negotiis diſtrahar, non potui examinare Series quas miſiſtis, ac cum meis comparare. Ubi fecero, perſcribam tibi ſententiam meam: nam aliquot jam anni ſunt, quòd inveni meas viâ quadam ſic ſatis ſingulari. *Collinium* ipſum magni facio, quoniam omnes puræ Matheſeos partes ab ipſo egregiè cultas video. Multa habeo deſtinata a quibus me deterrent calculi tantùm, qui nec ſuſcipi facile ab homine occupato, nec alteri niſi doctiſſimo, ac ſinceriſſimo tutò credi poſſunt.

Ex Actis Eruditorum Anno 1691. *Menſe Aprili pag.* 178. *habentur hæc D.* Leibnitii *verba.*

Jam anno 1675 *compoſitum habebam opuſculum Quadraturæ Arithmeticæ ab amicis ob illo tempore lectum, ſed quod, materia ſub manibus creſcente, limare ad editionem non vacavit, poſtquàm aliæ occupationes ſupervenere; præſertim cùm nunc prolixiùs exponere vulgari more, quæ Analyſis noſtra nova paucs exhibet, non ſatis operæ pretium videatur. Interim inſignes quidam Mathematici, quibus veritas primariæ noſtræ Propoſitionis dudum in Actis publicatæ innotuit, pro humanitate ſua noſtri qualiſcunque inventi candidè meminere.*

Ex Epiſtola ad H. Oldenburgium *Pariſiis anno* 1675, 12. *Julii data.*

Methodum Celeberrimi *Newtoni*, radices Æquationum inveniendi per Inſtrumentum, credo differre a mea. Neque enim video, in mea, quid aut Logarithmi, aut Circuli concentrici conferant. Quoniam tamen rem vobis non ingratam video, conabor abſolvere, ac tibi communicare, quamprimum otii ſat erit.

Scripſiſti aliquoties, veſtrates omnium curvarum dimenſiones per appropinquationem dare. Velim noſſe, an poſſint dare Geometricè dimenſionem Curvæ Ellipſeos, vel Hyperbolæ ex data Circuli, aut Hyperbolæ quadratura.

Ex Epiſtolâ ad eumdem Pariſiis 28. *Decembris anno* 1675 *data.*

Duarum tibi literarum debitor, rogo ne ſequius interpreteris ſilentium meum, ſoleo enim interrumpi nonnunquam, & hæc ſtudia per intervalla tractare. Quod *Tſchürnhauſium* ad nos miſiſti, feciſti pro amico: multum enim ejus conſuetudine delector, & ingenium agnoſco in Juvene præclarum, & magna promittens. Inventa mihi oſtendit non pauca, Analytica & Geometrica, ſanè perelegantia. Unde facilè judico, quid ab eo expectari poſſit.

Habebis & a me Inſtrumentum Æquationes omnes Geometricas conſtruendi unicum: Et meam Quadraturam Circuli, ejuſque partium, per ſeriem Numerorum Rationalium infinitam; de qua aliquoties ſcripſi, & quam jam pluſquam biennio abhinc Geometris hic communicavi.

Ex Epiſtolâ ad eumdem Pariſiis 12 *Maii anno* 1676 *datâ.*

Cùm *Georgius Mohr* Danus [*ſuperius Belga*] in Geometria & Analyſi verſatiſſimus, nobis attulerit communicatam ſibi a Doctiſſimo *Collinio* veſtro expreſſionem relationis inter Arcum, & Sinum per infinitas Series ſequentes: Poſito Sinu x, Arcu z, Radio 1.

$$z = x + \tfrac{1}{6}x^3 + \tfrac{3}{40}x^5 + \tfrac{5}{112}x^7 + \tfrac{35}{1152}x^9 \text{ \&c.}$$

$$x = z - \tfrac{1}{6}z^3 + \tfrac{1}{120}z^5 - \tfrac{1}{5040}z^7 + \tfrac{1}{362880}z^9 \text{ \&c.}$$

Hæc, inquam, cum nobis attulerit ille, quæ mihi valde ingenioſa videntur, & poſterior imprimis Series elegantiam quandam ſingularem habeat, ideo rem gratam mihi feceris, Vir Clariſſime, ſi demonſtrationem tranſmiſeris. Habebis viciſſim mea ab his longè diverſa circa hanc rem meditata, de quibus jam aliquot abhinc annis ad te perſcripſiſſe credo, demonſtratione tamen non addita quam nunc polio. Oro ut Cl. *Collino* multam a me ſalutem dicas: is facilè tibi materiam ſuppeditabit ſatisfaciendi deſiderio meo.

Epiſtola I. *ad D.* Hans Sloane *M. D. Regiæ Societatis Seretarium*, *Berolini* 4. *Mart. S. N.* 1711. *data.*

Gratias ago quòd noviſſimum Volumen præclari Operis *Tranſactionum Philoſophicarum* ad me miſiſti, quamvis nunc demum mihi *Berolinum* excurrenti redditum ſit. Itaque excuſabis, quòd pro munere ſuperioris anni nunc demum gratiæ dudum debitæ redduntur.

Velem

Vellem inſpectio Operis me non cogeret nunc ſecunda vice ad vos querelam deferre: Olim *Nicolaus Fatius Duillierius* me pupugerat in publico ſcripto, tanquam alienum inventum mihi attribuiſſem. Ego eum in *Actis Eruditorum Lipſienſibus* meliora docui; & vos ipſi, ut ex literis a Secretario Societatis veſtræ inclytæ (id eſt, quantum memini, a te ipſo) ſcriptis didici, hoc improbaſtis. Improbavit *Newtonus* ipſe vir excellentiſſimus, (quantum intellexi) præpoſterum quorundam hac in re erga veſtram gentem, & ſe ſtudium. Et tandem D. *Keillius* in hoc ipſo volumine, menſe *Sept. Octob.* 1708, pag. 185, renovare ineptiſſimam accuſationem viſus eſt, cùm ſcripſit, *Fluxionum Arithmeticam a* Newtono *inventam, mutato nomine & notationis modo a me editam fuiſſe.* Quæ qui legit, & credit, non poteſt non ſuſpicari alterius inventum a me larvatum ſubdititiis nominibus, characteribuſque fuiſſe protruſum. Id quidem quàm falſum ſit nemo melius ipſo D. *Newtono* novit. Certè ego nec nomen Calculi Fluxionum fando audivi, nec Characteres, quos adhibuit D. *Newtonus*, his oculis vidi, antequam in *Walliſianis* Operibus prodiere. Rem etiam me habuiſſe, multis ante annis quam edidi, ipſæ literæ apud *Walliſium* editæ demonſtrant. Quomodo ergo aliena mutata edidi quæ ignorabam?

Etſi autem D. *Keillium* (a quo magis præcipiti judicio quàm malo animo peccatum puto) pro calumniatore non habeam; non poſſum tamen non ipſam accuſationem in me injuriam pro calumnia habere. Et quia verendum eſt, ne ſæpe vel ab improbis, vel ab imprudentibus repetatur; cogor remedium ab Inclyta veſtra Societate Regia petere. Nempe æquum eſſe vos ipſi, credo, judicabitis, ut D. *Keillius* teſtetur publicè, non fuiſſe ſibi animum imputandi mihi, quod verba inſinuare videntur, quaſi ab alio hoc, quicquid eſt, Inventi didicerim, & mihi attribuerim. Ita ille & mihi læſo ſatisfaciet, & calumniandi animum a ſe alienum eſſe oſtendet; & aliis alias ſimilia aliquando jactaturis frænum injicietur. Quod ſupereſt, vale & fave.

Epiſtola II. *ad eumdem*, *Hanoveræ* 29. *Decemb.* 1711. *data.*

Quæ D. *Johannes Keillius* nuper ad te ſcripſit, candorem meum apertiùs quàm ante oppugnant: quem ut ego hac ætate, poſt tot documenta vitæ, Apologia defendam, & cum homine docto, ſed novo, & parum perito rerum anteactarum cognitore, nec mandatum habente ab eo cujus intereſt, tanquam pro Tribunali litigem, nemo prudens, æquusque probabit.

Quæ ille de meo rem cognoſcendi modo ſuſpicatur, haud ſatis exercitatus artis inveniendi arbiter, ipſius quidem docendi cauſa non eſt cur refellam: ſed norunt amici quàm longè alio & ad alia proficuo itinere proceſſerim.

ceſſerim. Fruſtra ad exemplum Actorum Lipſienſium provocat, ut ſua dicta excuſet; in illis enim circa hanc rem quicquam cuiquam detractum non reperio, ſed potiùs paſſim ſuum cuique tributum. Ego quoque & amici aliquoties oſtendimus libenter a nobis credi, illuſtrem *Fluxionum* Autorem per ſe ad ſimilia noſtris fundamenta perveniſſe. Neque eo minùs ego in Inventoris jura venio, quæ etiam *Hugenius*, judex intelligentiſſimus incorruptiſſimuſque, publicè agnovit: in quibus tamen mihi vendicandis non properavi, ſed inventum pluſquàm nonum in annum preſſi, ut nemo me præcucurriſſe queri poſſit.

Itaque veſtræ æquitati committo, annon coercendæ ſint vanæ, & injuſtæ vociferationes, quas ipſi *Newtono*, Viro inſigni & geſtorum optimè conſcio, improbari arbitror: ejuſque ſententiæ ſuæ libenter daturum indicia mihi perſuadeo. Vale.

N°. V.

N°. V.

COMMERCIUM EPISTOLICUM

G. G. LEIBNITII,

H. OLDENBURGII, JOH. COLLINII,

ET ISAACI NEWTONI.

Ex Tom. III. Operum Mathemat. Joh. Walliſii.

COMMERCIUM EPISTOLICUM
G. G. LEIBNITII,
H. OLDENBURGII, JOH. COLLINII,
ET ISAACI NEWTONI.

I. Epistola D. Leibnitii ad D. Oldenburgium, (a)

Viro Ampliſſimo, *D.* Henrico Oldenburgio, Godefredus Guilielmus Leibnitius.

DIU eſt quòd nullas à me habuiſti literas; ſed ejus rei cauſam aliquando coram rectiùs dicam. Nunc verò non potui quin amicum ad vos euntem, cùm aliter nequeam, ſaltem Epiſtolâ comitarer. Ingenium ejus & eruditionem variam, nec vulgarem, primo congreſſu tutè obſervabis, niſi fortè eum noſti dudum. Nam, ſi bene memini, nunc tertia vice Angliam videt.

De me illud habeto. Inſtrumentum Arithmeticum tandem aliquando, poſt maximas difficultates ſumptuſque non parvos, feliciter abſolutum eſſe. Effectum, qui videre, admirati ſunt omnes. Dato enim *v. g.* numero multiplicando, decem notarum, ſive ciphrarum; & alio multiplicante, notarum (ſi ita vis) quatuor; productum multiplicationis, rotæ cujuſdam converſionibus quatuor (nullo animi labore, nulla additione interveniente) haberi poſſe. Breviter, numerum multiplicandum quantumcunque, æquè citò & facilè multiplicari per multiplicantem datum, ac multiplicandum alium quantumcunque, nemo facilè crediſſet. Id verò, machinâ jam perfectâ, in exiguo quidem (cùm quatuor notas nondum exeat) oſtendit tamen.

Exemplum ejus non niſi unicum nunc quidem habeo, idque vix nuper abſolu-

(a) D. *Henricus Oldenburgius*, natus Bremæ, urbe Circuli Saxoniæ inferioris in Germaniâ, ſed qui domicilium ſuum in Angliâ fixit, ubi factus eſt Societatis Regiæ Secretarius.

abſolutum. Antea enim, quamquam effectum dudum, nonnihil tamen claudicabat. Laſſam aliquot opificum patientiam, atque ægrè tandem hominem inveni, qui honorem lucro præferret.

Reſpirat ille nunc nonnihil, aliiſque laboribus vacat, ne cæteris notitiis [*an negotiis*] excidat. Sed promiſit opus mox iterum aggredi, pluresque eadem opera elaborare: ex quibus unam ego illuſtri Societati Regiæ ſervabo, ejuſque ad vos ipſe lator ero, ubi primùm alia permittant, quæ me multis modis diſtrahunt.

Incumbunt enim mihi labores quidem inter ſe planè diverſi; quos partim Principes à me exigunt, partim amici. Unde parum temporis reſtat quod inquiſitioni Naturæ, & contemplationibus Mathematicis impendere poſſim. Suffuror tamen, quantùm licet; & ſæpe animum ad iſta propendentem explere, quàm commodis meis velificare, malo.

In Geometria quædam detexi, felicitate ſingulari, potiùs quàm ſtudio multo. Ex multis tibi unum memorabo Theorema perelegans; nec (quantùm ſciam) antea notum; ſaltem non illis quibus locutus ſum Geometris, ſanè maximis.

Tab. I. Fig. 1. Semicirculo ABC, in plano CD provoluto, ſemicycloidis linea AED deſcripta intelligatur. Ex F centro ſemicirculi volvi incipientis, recta FBG, baſi CD parallela, educatur; ſemi-cycloidi occurrens in G. Jungantur rectæ AB, AG. Aio, AGEA ſegmentum ſemi cycloidis, æquari triangulo AFB, ſeu ſemi-quadrato à radio Circuli genitoris.

Hoc primum eſt Segmentum *Obliquum*, cujus habetur quadratura: Secundum autem ſegmentorum ejus in univerſum, cognitæ menſuræ, ne circuli quidem dimenſione ſuppoſita. Primum enim quadravit Illuſt. *Hugenius*, [*atque ante illum Wrennius*,] diverſæ planè ab hoc naturæ; ſpatium ſcilicet AIEA; quarta radii [*lege* Axis *vel* Diametri] parte AI, recta baſi parallela IE, & portione Cycloidis EA comprehenſum.

Alia mihi Theoremata ſunt, momenti non paulo majoris. Ex quibus illud imprimis mirabile eſt, cujus ope area circuli, vel ſectoris ejus dati, exactè exprimi poteſt per ſeriem quandam numerorum rationalium continuè productam in infinitum. Sed & methodos quaſdam analyticas habeo generales admodum & latè fuſas, quas majoris facio quàm Theoremata particularia & exquiſita.

Illuſtri *Boylio* rogo me data occaſione commendes. Nolim Virum eximium, ſcriptis eorum quos nuperrimè ejus Pneumatica Experimenta ac Ratiocinationes aggreſſos audio, diverti ab illis, quibus multo meliùs mereri de publico poteſt, Chymicis experimentis: quæ utinam ne diutius publicis precibus neget. Intactum eſt hoc doctrinæ genus, ſaltem Philoſophis. Primus eſt *Boylius* qui (non dicam nugari deſiit, ſed) demonſtrare cœpit. A quo ſi corpus quoddam Chymicum impetrare poteris, obligabis profectò genus humanum. Dici enim non poteſt, quanti ad

omnem

omnem vitam momenti ſit Chymia. Ego certè ſæpe pro valetudine Viri vota facio. Nam vereor ne aliquando jacturam irreparabilem faciamus, culpâ quorundam obtrectatorum, qui ſæpe viros, publico bono natos, à ſuis publicandis abſterrent. Vale, ac nominis tui virtutumque Cultori fave. *Dabam Lutetiæ Pariſiorum*, 15. *Julii* 1674.

II. Epistola D. Leibnitii ad D. Oldenburgium.

Vir Ampliſſime,

NON dubito quin literas à me D°. *Waltero* ad vos eunti datas acceperis: quamquam D. *Vernon* negaverit, ex relatu tuo, literas à me tibi redditas. Sed hoc ita interpretor, *Vernonem* ante adventum *Walteri* à vobis diſceſſiſſe. Utor commoditate euntis ad vos amici; potiùs ne non ſcribam, quàm ut ſcriptu digna habeam.

Adjicio Tubæ Stentoreæ explicationem, à Gallo quodam factam; ſed quæ vix quicquam ſatisfacit.

Edetur hîc Algebra quædam, cujus Author, *Regulam Carteſii de Æquationibus quadrato-quadraticis ad cubicas revocandis*, negat eſſe univerſalem. Sed, quantum ex ſermonibus quos ea de re mecum habuit judicare poſſum, labitur ipſe. *Carteſii* enim Regula, à *Vieta* tranſumpta, à *Beaumio* & *Huddenio* etiam demonſtratione confirmata eſt; & mihi ipſi aliquando, alia quærenti, ea ipſa regula exiit.

Jacobus Ozanam, de quo tibi aliquando locutus ſum, & cujus P. *Billy* in ſcriptis cum elogio meminit; monſtravit mihi nuper *Diophantum* ſuum, mox prælo committendum, ad ſymbola revocatum. Adjicit paſſim Quæſtiones à *Diophanto* & *Bacheto* prætermiſſas. Sed & librum ſeptimum addet, refertum quæſtionibus Paralipomenûm.

Is Problema publicè propoſuerat, jam anno abhinc & ultra; *Invenire tres numeros, ita ut, differentia duorum quorumlibet quadratorum, ſint quadrati; & differentia duorum quorumlibet quadratorum ab ipſis, ſint etiam quadrati.* Ejus Problematis ſolutionem curaverat edi *Petrus Mengolus*, credens demonſtratam à ſe ejus impoſſibilitatem. In quo, eum lapſum eſſe oſtendit *Ozanam*, editis mox ipſis numeris.

Ab eo tempore, idem *Ozanam* aliud propoſuit Problema, ſchedulâ impreſsâ & diſtributâ, quod ita habebat. *Mathematicis Problema unicum. Invenire tres numeros; quorum ſumma, Quadratus; & ſumma Quadratorum ab ipſis, ſit Quadrato-quadratus.* Fortè cùm colloqueremur, dixi ei, Non videri hæc Problemata tanti; & eſſe quodammodo in noſtra pote-

D 3 ſtate,

ſtate, ſiquis laborem ſubire velit. Hoc ille arripiens, provocavit me ad ſolutionem per amicos: Quibus dixerat, me talium facilitatem jactare, nullo ſpecimine edito. Ego ita coactus ſum aggredi ſolutionem; quod ſucceſſit mirificè. Nam, cùm ipſius *Ozanam* ingentes ſint numeri, ego exiguos inveni admodum, propoſito ſatisfacientes. Et, quod eſt amplius, ſolutionem reperi indefinitam; quam faſſus eſt ſe non habere. Poſſum enim efficere, ut, ſumma numerorum, ſit Quadratus datus. Sed & poſſum efficere, ut ſumma quadratorum, ſit, Quadrato quadratus datus.

Hæc tanti non putarem ut vobis ſcriberem, niſi inter Mathematicos noſtros ſtrepitum feciſſent.

Certè quidam alii his oris, inſignes (ut ſe appellari amant) Analytici, etiam nunc ſolutionem ejus Problematis fruſtra quærunt.

Diophantum ipſius *Ozanam*, puto fore lectu dignum. Dat enim operam ut Lemmata omnia, ex numerorum natura petita expurget; & ut ſemper oſtendat ipſum inveniendi modum Analyticum. Sed hæc quidem vel ideo ſcriptu digna putavi, quia Diophantum Symbolicum, apud vos quoque edi, editumve eſſe, intelligo. [*Kerſæum*, *credo*, *innuit.*]

Majoris ad uſum vitæ momenti eſt, Profectus Geometriæ; & inprimis Dimenſio curvilineorum: Unde ſæpe præclara Problemata Mechanica pendent.

Porrò, in ea Geometriæ parte rem memorabilem mihi eveniſſe nuncio. Scis D. Vicecomitem *Brounkerum*, & Cl. *Nic. Mercatorem* exhibuiſſe infinitam ſeriem numerorum rationalium, ſpatio Hyperbolæ æqualem. Sed hoc in circulo efficere hactenus potuit nemo. Etſi enim illi *Brounkerus* & *Wallisſius* dederint numeros rationales magis magiſque appropinquantes, nemo tamen dedit [*imò uterque dedit*, *ſed fortè non ejus ſenſu*,] progreſſionem numerorum rationalium, cujus in infinitum continuatæ ſumma ſit exactè æqualis Circulo. Sed verò mihi tandem feliciter ſucceſſit. Inveni enim ſeriem numerorum valde ſimplicem, cujus ſumma exactè æquatur circumferentiæ circuli; poſito, diametrum eſſe unitatem. Et habet ea ſeries id quoque peculiare, quòd miras quaſdam circuli & hyperbolæ exhibet harmonias. Itaque Tetragoniſmi circularis problema, jam à Geometria traductum eſt ad Arithmeticam Infinitorum. Quod hactenus fruſtra quærebatur. Reſtat ergo tantùm, ut doctrina de Serierum ſeu Progreſſionum numericarum ſummis perficiatur. Quicunque hactenus Quadraturam circuli exactam quæſivere, ne viam quidem aperuere per quam eo pervenire poſſe ſpes ſit. Quod nunc primùm à me factum dicere auſim. Ratio diametri ad circumferentiam, exactè à me exhiberi poteſt per rationem, non quidem numeri ad numerum, (id enim foret abſolutè inveniſſe) ſed per rationem numeri ad totam quandam ſeriem numerorum rationalium valdè ſimplicem & regularem. Eadem methodo, etiam Arcûs cujuslibet, cujus Sinus datur, Geometricè exhiberi, per ejuſmodi ſeriem, valor

valor poteſt; nullo ad integræ circumferentiæ dimenſionem recurſu: ut adeo neceſſe non ſit, Arcûs rationem ad circumferentiam noſſe.

Quid apud vos agatur, viciſſim ubi vacaverit indicabis: inprimis in re Medica & Chymica. Illuſtrem *Boylium*, & clariſſimos Viros *Walliſium* & *Hookium*, à me quæſo ſaluta: Et hunc ſtimula, ut promiſſam nobis Microſcopiorum & Teleſcopiorum perficiendorum rationem urgeat; quo nihil utilius præſtare poteſt. Vale, faveque. *Pariſ.* 26. *Oct.* 1674.

III. Epistola D. Leibnitii, ad D. Oldenburgium, (*abſque Data*) *anno circiter* 1674. *exeunte, vel ineunte* 1675.

Ampliſſimo Viro, D. Henrico Oldenburgio, Godefredus Guilielmus Leibnitius.

Literæ tuæ, multiplici ſemper fruge refertæ, non poſſunt non eſſe gratiſſimæ.

Facilè crediderim Problema ſolidum non poſſe reddi planum: Id tamen demonſtrare, quemadmodum *Euclides* demonſtravit *Incommenſurabilitates*, magni res momenti fuerit; nec video, quod à flexu curvæ, æquationi, propriæ ad eam rem, duci poſſit.

Ais *Parium* veſtratem [*nomen mendosè ſcriptum ſuſpicor, nec ſcio quomodo ſit reſtituendum*] obſervaſſe, quòd unum ex Cardanicis, ſit Radix æquationis Quadraticæ. Hoc fateor non capio, & rogo explices.

Malleus (quem vocatis) *cubicus*, quo æquationes quadrato-quadraticæ reſolvantur, non eſt *Carteſii* inventum, ac ne *Vietæ* quidem, ſed jam repertum ſeculo ſuperiore. Etiam extractio illa Radicis cubicæ ex Cardanicis, ſic ut quantitas imaginaria evaneſcat, & inveniatur radix rationalis, Æquationis cubicæ regulas *Cardani* reſpuentis. Ejus exemplum à *Pario* datum, in literis tuis noviſſimis habetur. Superioris tamen ſeculi inventum eſt. Nimirum primus omnium Æquationem quadrato-quadraticam ad cubicam revocare docuit *Ludovicus Ferrarienſis*. Primus Radices rationales ex Binomiis Cardanicis, in ſpeciem imaginariis, extrahere docuit *Raphael Bombelli*.

Tollere terminos omnes intermedios, ex Æquatione arbitraria cujuſcunque gradus; non video cur ſit difficile. Nam cùm ſit arbitraria, poteſt reddi diviſibilis. Si diviſibilis reddi poteſt, per Æquationem ſimplicem aut quadraticam, reddi poteſt pura.

Per Tabulas Sinuum Logarithmicorum, explicare Æquationes, res foret utiliſſima; ſi modò non ſit opus tot præparationibus, ut fructus compendii pereat.

Metho-

Methodum celeberrimi *Newtoni*, radices Æquationum inveniendi per Inſtrumentum, credo differre à mea. Neque enim video, in mea, quid aut Logarithmi aut Circuli concentrici conferant. Quoniam tamen rem vobis non ingratam video; conabor abſolvere, ac tibi communicare, quamprimùm otii ſat erit.

Incidi nuper in methodum perelegantem, quo ſuperioribus Æquationibus omnium graduum (ad certam tamen formam redactis) accommodari poſſunt Radices Cardanicis ſimiles. Idque ſine ſublatione omnium terminorum inter primum & penultimum mediorum; imo nullo termino ſublato, modò certa ſit inter terminos intermedios relatio. Id cùm novam quandam lucem dare videatur huic negotio, vobis mox communicabo.

Scripſiſti aliquoties, Veſtrates omnium curvarum dimenſiones per appropinquationem dare. Velim noſſe, an poſſint dare Geometricè dimenſionem curvæ [*abſque*] Ellipſeos vel Hyperbolæ quadratura.

Robervallius nunc ſua quæ MS. circumferebantur edit. Fragmentorum *Paſcalianorum* ſpem mihi facit Doctiſſimus *Gererius* Conſiliarius Regius in Arvernica ſubſidiorum Curia, Authoris ex ſorore nepos. Quidquid ex illis comperero, vobis communicabo.

Scripſeris alibi, clariſſimum *Walliſium* methodum habere, qua Radici datæ accommodet homogeneum comparationis tale, ut Æquatione cubica triradicali inde conſtructa, per ipſas *Cardani* Regulas correctas, inveniri viciſſim poſſit hæc radix. Quæro, an id poſſit etiam tum cùm Æquatio illa non eſt plana palliata, ſed reapſe cubica triradicalis; ita tamen ut radix ejus ſit pro arbitrio ſumpta. Si methodus illa differat ab ea quam dixi; per quam extrahendo radicem cubicam ex ſingulis Binomiis Cardanicis evaneſcit quantitas imaginaria: rogo ut eam primis literis communicetis. Ego interim & mea de ulterioribus Æquationibus aliquando extrahendis parabo.

Unum præterea diſcere velim, quanam ratione per Logarithmos explicatis æquationes, nonniſi ſummo atque imo gradu incognitæ, affectas.

Deſideraveram aliquando ut indicares, de quo potiſſimum Veſtrates circa Chronometrum meum dubitaverint.

IV. Epistola D. Leibnitii ad D. Oldenburgium.

Vir Ampliſſime,

Duarum tibi Literarum debitor, rogo ne ſequius interpreteris ſilentium meum. Soleo enim interrumpi nonnunquam, & hæc ſtudia per intervalla tractare.

Quod

Quod *Tſchirnhauſium* ad nos miſiſti, feciſti pro amico: multum enim ejus conſuetudine delector, & ingenium agnoſco in Juvene præclarum, & magna promittens. Inventa mihi oſtendit non pauca, Analytica & Geometrica, ſanè perelegantia. Unde facilè judico, quid ab eo expectari poſſit.

Jamdiu eſt quod petit, ut tibi ſcribens rogarem pro ipſo veniam ſilentii: Adderemque, ejus nomine, diligentiam ipſi in quærendis *Robervallianis*, *Paſcalianis*, & *Fermatianis*, non defuiſſe; defuiſſe ex parte ſucceſſum.

Elementa *Robervalliana* à me ipſi impetrata ſunt manuſcripta. Legit, ſed mihi aſſentit, qui tanti eſſe non puto ut debeant excudi. Sed neſcio annon mors Authoris operam ſufflaminavit. Jactura certè fuerit non magna. Alia longè utiliora puto extare ejus Manuſcripta, quæ ab ipſo legata ſunt Academiæ Scientiarum Regiæ: & executores ab eo nominati *Blondellus*, *Picartus*, *Brotius*.

Profeſſionem *Robervallii* Regiam (quæ & ipſa ejus morte vacat) obtinuit idem *Picartus*. Neſcio an tibi notum ſit inſtitutum. *Petrus Ramus* hanc fundavit Cathedram; &, pecuniâ apud Urbanum Magiſtratum (*à la maiſon de ville*) depoſitâ, teſtamento cavit, ut digniſſimo petentium conferretur; liceretque, velut præmio propoſito, certare. Judices conſtituit, Principem Senatûs, Advocatum Regium, Præfectum rei Mercatoriæ (cujus munus Conſulari ſimile eſt,) & neſcio quos alios. Itaque ſchedis tota urbe affixis publicatum eſt, proximo menſe Martio adjudicatum iri hoc munus merenti. Addidit *Ramus*, ne diligentia Profeſſoris, ſemel recepti, frigeſceret; quovis triennio, cuivis cum eo certandi poteſtatem fore. Quod inſtitutum mihi non illepidum videtur; ipſumque ſpectaculum hujus ingeniorum certaminis erit credo non injucundum. Hæc de *Robervallianis*.

Paſcalianorum quorundam Manuſcriptorum facta mihi ſpes eſt.

Frenicli Triangulum rectangulum numericum, prælo paratur, cura *Marioti*, qui non paucas proprias obſervationes adjicit.

Elementa Mathematica *Joannis Preſtet* (qui apud *Malebranchium* agit, eritve,) prodiere tandem, magno ſatis volumine, in 4°. Intùs verò nonniſi Arithmeticam & Algebram reperies. Probo Arithmeticam per literas expoſitam; id enim poterit Arithmeticis reddere ſymbolicam familiariorem. Probo etiam caſus Æquationum quadrato-quadraticarum particulares, ſecundùm *Carteſii* Regulam ab eo calculatos. Cætera omnia pervulgata. Et eorum quæ vos expectaſtis, nihil. Præterea, nullum problema difficile ſolutum videbis. At, quod miror, ne exemplum quidem Geometricum ullum allatum. Ita non eſt quod putes quicquam veſtratibus præreptum. *Pellio*que, & *Newtono*, & *Gregorio*, integra manebunt, quæ de Reſolutione æquationum per Sinus aut Logarithmos, aut Series numerorum infinitas, pollicentur. Quæ aliquando videre valdè velim.

Illuſtriſſimo *Boylio* rogo me commendes, quandocunque occaſio dabitur. Virum in tantum æſtimo, in quantum virtus & doctrina in homine poſſunt. Legi nuper Diatribam ejus, de Studio Theologico non contemnendo: Quæ me mirè affecit; & in illa voluntate confirmavit quæ mihi, ut noſti, jamdudum fuit, Scientiam de Mente tractandi per Geometricas demonſtrationes.

Multa in hoc genere mira à me ſunt obſervata, quæ aliquando, quo par eſt rigore, expoſita dabo.

Carteſianis quibuſdam in hoc argumento non acquieſco. Multa inædificantur ideis, quæ mihi ſophiſmatis ſuſpecta ſunt. Sed &, in corpore, neceſſarium aliud quiddam ab extenſione. Quare diſcrimen mentis à materia nondum patet ex diſcrimine cogitationis & extenſionis. Aliud nobis dedit principium natura eorum, ex quo patet perennitas mentis directa demonſtratione. Quæcunque à *Scholaſticis*, à *Valeriano* Magno, à *Carteſio*, aliiſque, ex Entis illius notione ducuntur, cujus eſſentia eſt exiſtere; ea tamdiu vacillant, quamdiu non conſtat an tale Ens poſſibile ſit, ſi intelligi poſſit. Pronunciare talia, facile eſt; intelligere, non æquè. Poſito, tale Ens eſſe poſſibile, ſive aliquam eſſe Ideam reſpondentem his vocabulis; utique ſequitur, exiſtere tale Ens. Multa videmur nobis cogitare (confusè ſcilicet), quæ tamen implicant: Exempli gratia, numerus omnium numerorum. Valde ſuſpecta eſſe debet nobis, notio infiniti, & minimi, & maximi, & perfectiſſimi, & ipſius omnitatis. Neque fidendum his notionibus antequam ad illud criterion exigantur, quod mihi agnoſcere videor, & quod velut Mechanica ratione fixam & viſibilem & (ut ita dicam) irreſiſtibilem reddit veritatem. Quale nobis inexplicabili beneficio tributum eſt à Natura.

Hæc Algebra, quam tanti facimus meritò, generalis illius artificii non niſi pars eſt. Id tamen præſtat, Errare ne poſſimus quidem ſi velimus; Et, ut veritas quaſi picta, velut Machinæ ope in charta expreſſa, deprehendatur. Ego verò agnoſco, quidquid in genere probat Algebra, non niſi ſuperioris ſcientiæ beneficium eſſe; quam nunc *Combinatoriam Characteriſticam* appellare ſoleo: longè diverſam ab illa, quæ, auditis his vocabulis, ſtatim alicui in mentem venire poſſet. Hujus mirabilem vim ac poteſtatem, præceptis aliquando & ſpeciminibus me explicaturum ſpero, ſi ſanitas atque otium fuerit.

Non poſſum, paucis verbis, rei naturam complecti. Illud tamen dicere auſim, Nihil facilè ad humanæ mentis perfectionem efficacius concipi poſſe. Ac, recepta hac philoſophandi ratione, fore tempus, & mox fore, quo de Deo ac Mente non minùs certa, quàm de Figuris numeriſque habeamus: quo, Machinarum inventio non difficilior, quàm conſtructio problematum Geometricorum: Exhauſtiſque his ſtudiis (niſi quod ſemper infinitorum theorematum elegantiſſimæ ſupererunt harmoniæ), indies tunc obſer-

obſervandæ magis quàm eruendæ) ad ſolam hominis redibunt naturæ indagationem; quæ nunquam in [*fortunæ*] poteſtate futura eſt. Nam, in experimentis, ingenii & induſtriæ fortuna miſcetur.

Boyliano itaque more ſemper philoſophabuntur homines, noſtrum aliquando ad finem perducent; niſi quatenus ipſa quoque natura rerum, in quantum cognita eſt, calculis ſubjici poteſt, & novis detectis & ad Mechaniſmum redactis qualitatibus, novam applicandi materiam Geometris dabit. Sed impetus ſcribendi effert me longiùs quàm conſtitueram; facitque ut non ſatis cohærentia dicam.

Supereſt ut ad tuarum literarum Algebraica reſpondeam. Plurimum tibi debeo, doctiſſimoque *Collinio*, quòd communicare mihi voluiſtis non pauca, nec contemnenda; qualia Epiſtola *Walliſii* continet, & quæ ei adjunxiſtis.

Sed, (ut tibi dicam quod res eſt,) in illa (neſcio cujus) de Regulis *Cardani* Diatriba, non invenio, quin Regulam *Cardani* ille longè aliàs quàm nos ſumit. *Carteſius* aliique, per *Regulam Cardani*, intelligunt methodum qua ille expreſſit quaſdam radices cubicas per irrationales. Author Diatribæ, intelligit, per regulam, methodum qua ille, ex illis Binomiis irrationalibus, denique rationales radices extrahit. Id verò *Cardanus* facit quibuſdam tentamentis adhibitis, qualia plurima dari poſſunt, & mihi quidem non ignota ſunt. Ergo nec Author Diatribæ aliud quàm ejuſmodi determinationes loquitur quibus radices faciliùs determinantur. Ego verò has determinationes non curo, quoniam *Schotenius* (vel quiſquis eſt Author Regulæ circa binomia, à *Schotenio* adjectæ) regulam dedit perfectam, & nulli tentamento obnoxiam, in numeris extrahendis. Binomiorum cubicorum radices tunc abſunt imaginariæ. Sed cùm adhuc adſunt imaginariæ (ut $\sqrt{-}$) ceſſat Regula Schoteniana; ut facilè per ejus rationem inſtituti patebit. Fateor eas regulas quæ per tentamenta & determinationes procedunt, facilè poſſe extendi ad imaginarias continentia. Sed qui Regulam tentamentis carentem, qualis *Schotenii* eſt, imaginariis commune dederit, mihi notus non eſt. Eam verò jamdudum eſt quod mihi videor recepiſſe, quam aliquando diſtinctè expoſitam vobis communicabo. Adjiciamque alia, ut opinor, curioſa; de Imaginariis in ſpeciem tractandis & dignoſcendis, Geometricè pariter Analyticeque.

Mittam & viam meam perveniendi ad Radices irrationales altiorum graduum, cujus perelegans habeo ſpecimen. Sed, quo minus perficiam, deterret calculus; præſertim cùm alii in ea re feliciter laborent: ſufficiat, aditum aperuiſſe.

Habebis & à me inſtrumentum Æquationes omnes Geometricas conſtruendi unicum; Et meam Quadraturam Circuli ejuſque partium, per ſeriem numerorum rationalium infinitam; de qua aliquoties ſcripſi, & quam jam pluſquam biennio abhinc Geometris hic communicavi.

Sed & ad aliud Problema Geometricum, hactenus pene deſperatum, nuper aditum reperi felicem: De quo pluribus loquar, ubi otium erit abſolvendi.

Hæc verò omnia ubi ita in ordinem redegero ut mitti poſſint, ſingulatim tibi ſpondeo. Ex quibus agnoſcetis, credo, non tantùm ſoluta à me problemata, ſed & novâ methodo (hoc enim ego unicè æſtimo) detecta eſſe.

Nunc verò in eo ſum, ut iter ſuſcipiam aliquot ſeptimanarum. (Nam, ante exitum Januarii, rurſus Pariſiis ero.) Quare non eſt ut reſcribas, donec per ſecundas literas reditûs te mei admonuero. Vale, & fave. *Pariſ.* 28. *Decemb.* 1675.

V. Epistola prior Cl. Viri D. Isaaci Newton, *Matheſeos Profeſſoris in Celeberrima Academia Cantabrigienſi*, *ad* D. Henricum Oldenburg, *Regalis Societatis Londini Secretarium*, 13. *Junii* 1676. *cum Illuſtriſſimo Viro* D. Godefredo Guilielmo Leibnitio (*eo mediante*) *communicanda*, *Literis* Oldenburgii, (26. *Junii*) *ad* Leibnitium *miſſa*.

Digniſſime Domine,

Quanquam D. *Leibnitii* modeſtia, in Excerptis quæ ex Epiſtola ejus ad me nuper miſiſti, Noſtratibus multum tribuat circa ſpeculationem quandam *Infinitarum Serierum*, de qua jam cœpit eſſe rumor: Nullus dubito tamen quin ille, non tantùm (quod aſſerit) Methodum reducendi quantitates quaſcunque in ejuſmodi ſeries, ſed & varia compendia, fortè noſtris ſimilia, ſi non & meliora adinvenerit.

Quoniam tamen ea ſcire pervelit quæ ab Anglis hac in re inventa ſunt; & ipſe ante annos aliquot in hanc ſpeculationem inciderim: Ut votis ejus aliqua ſaltem ex parte ſatisfacerem, nonnulla eorum quæ mihi occurrerunt, ad te tranſmiſi.

Fractiones in infinitas ſeries reducuntur, per diviſionem; & quantitates radicales, per extractionem radicum; perinde inſtituendo operationes iſtas in ſpeciebus, ac inſtitui ſolent in decimalibus numeris. Hæc ſunt fundamenta harum reductionum.

Sed Extractiones Radicum multum abbreviantur per hoc *Theorema*.

$$\overline{P+PQ}\Big|^{\frac{m}{n}} = P^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n} AQ + \frac{m-n}{2n} BQ + \frac{m-2n}{3n} CQ + \frac{m-3n}{4n} DQ + \&c.$$

Ubi

Ubi $P+PQ$ ſignificat Quantitatem cujus Radix, vel etiam Dimenſio quævis, vel Radix Dimenſionis, inveſtiganda eſt. P, primum terminum quantitatis ejus; Q, reliquos terminos diviſos per primum. Et $\frac{m}{n}$, numeralem Indicem dimenſionis ipſius $P+PQ$: Sive dimenſio illa integra ſit; ſive (ut ita loquar) fracta; ſive affirmativa, ſive negativa. Nam, ſicut Analyſtæ, pro aa, aaa, &c. ſcribere ſolent a^2, a^3, &c. ſic ego, pro $\sqrt{a}$, $\sqrt{a^3}$, $\sqrt{C\,a^5}$, &c. ſcribo $a^{\frac{1}{2}}$, $a^{\frac{3}{2}}$, $a^{\frac{5}{3}}$; & pro $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{aa}$, $\frac{1}{a^3}$, ſcribo a^{-1}, a^{-2}, a^{-3}. Et ſic pro $\frac{aa}{\sqrt{C:\,\overline{a^3+bbx}}}$, ſcribo $aa \times \overline{a^3+bbx}|^{-\frac{1}{3}}$; & pro $\frac{aab}{\sqrt{C:\,\overline{a^3+bbx} \times \overline{a^3+bbx}}}$: ſcribo $aab \times \overline{a^3+bbx}|^{-\frac{2}{3}}$. In quo ultimo caſu, ſi $\overline{a^3+bbx}|^{-\frac{2}{3}}$ concipiatur eſſe $\overline{P+PQ}|^{\frac{m}{n}}$ in Regula: erit $P = a^3$, $Q = \frac{bbx}{a^3}$, $m = -2$, & $n = 3$. Denique, pro terminis inter operandum inventis in quoto, uſurpo A, B, C, D, &c. Nempe, A pro primo termino $P^{\frac{m}{n}}$; B pro ſecundo $\frac{m}{n}AQ$; & ſic deinceps. Cæterum uſus Regulæ patebit Exemplis.

Exemplum 1. Eſt $\sqrt{\overline{cc+xx}}$ (ſeu $\overline{cc+xx}|^{\frac{1}{2}}$) $= c + \frac{xx}{2c} - \frac{x^4}{8c^3} + \frac{x^6}{16c^5} - \frac{5x^8}{128c^7} + \frac{7x^{10}}{256c^9} -$ &c. Nam, in hoc caſu, eſt $P = cc$, $Q = \frac{xx}{cc}$, $m = 1$, $n = 2$, A ($= P^{\frac{m}{n}} = \overline{cc}|^{\frac{1}{2}}$) $= c$. B ($= \frac{m}{n}AQ$) $= \frac{xx}{2c}$. C ($= \frac{m-n}{2n}BQ$) $= \frac{-x^4}{8c^3}$. Et ſic deinceps.

Exemplum 2. Eſt $\sqrt{5}:\overline{c^5+c^4x-x^5}$: (id eſt, $\overline{c^5+c^4x-x^5}|^{\frac{1}{5}}$) $= c + \frac{c^4x-x^5}{5c^4} \frac{-2c^8xx+4c^4x^6-2x^{10}}{25c^9} +$ &c. Ut patebit ſubſtituendo in allatam Regulam, 1 pro m, 5 pro n, c^5 pro P, & $\frac{c^4x-x^5}{c^5}$ pro Q. Poteſt etiam $-x^5$ ſubſtitui pro P, & $\frac{c^4x+c^5}{-x^5}$ pro Q. Et tunc evadet $\sqrt{5}:\overline{c^5+c^4x-x^5}: = -x + \frac{c^4x+c^5}{5x^4} + \frac{2c^8xx+4c^9x+c^{10}}{25x^9} +$ &c. Prior modus eligendus eſt, ſi x valde parvum ſit; poſterior, ſi valde magnum.

Exempl. 3. Eſt $\frac{N}{\sqrt{^3}\, y^3 - aay}$ (hoc eſt, $N \times \overline{y^3 - aay}|^{\frac{-1}{3}}$) $= N \times : \frac{1}{y} + \frac{aa}{3y^3} + \frac{a^4}{9y^5} + \frac{7a^6}{81y^7} +$ &c. Nam $P = y^3$. $Q = \frac{-aa}{yy}$. $m = -1$. $n = 3$. A ($= P^{\frac{m}{n}} = y^3 \times \frac{-1}{3}$) $= y^{-1}$, hoc eſt $\frac{1}{y}$. B ($= \frac{m}{n}$ AQ $= \frac{-1}{3} \times \frac{1}{y} \times \frac{-aa}{yy}$) $= \frac{aa}{3y^3}$. &c.

Exempl. 4. Radix cubica ex quadrato-quadrato ipſius $d + e$, (hoc eſt, $\overline{d+e}|^{\frac{4}{3}}$) eſt $d^{\frac{4}{3}} + \frac{4ed^{\frac{1}{3}}}{3} + \frac{2ee}{9d^{\frac{2}{3}}} - \frac{4e^3}{81d^{\frac{5}{3}}} +$ &c. Nam $P = d$. $Q = \frac{e}{d}$. $m = 4$. $n = 3$. A ($= P^{\frac{m}{n}}$) $= d^{\frac{4}{3}}$. &c.

Eodem modo ſimplices etiam Poteſtates eliciuntur. Ut, ſi quadrato-cubus [*Superſolidum intelligit*] ipſius $d + e$, (hoc eſt, $\overline{d+e}|^5$ ſeu $\overline{d+e}|^{\frac{5}{1}}$) deſideretur: Erit, juxta Regulam, $P = d$. $Q = \frac{e}{d}$ $m = 5$. & $n = 1$. Adeoque A ($= P^{\frac{m}{n}}$) $= d^5$. B ($= \frac{m}{n}$ AQ) $= 5d^4e$. & ſic $C = 10d^3ee$. $D = 10dde^3$. $E = 5de^4$. $F = e^5$. & G ($= \frac{m-5n}{6n}$ FQ) $= 0$. Hoc eſt, $\overline{d+e}|^5 = d^5 + 5d^4e + 10d^3ee + 10dde^3 + 5de^4 + e^5$.

Quinetiam diviſio, ſive ſimplex ſit ſive repetita, per eandem regulam perficitur. Ut, ſi $\frac{1}{d+e}$ (hoc eſt, $\overline{d+e}|^{-1}$ ſive $\overline{d+e}|^{\frac{-1}{1}}$) in ſeriem ſimplicium terminorum reſolvendum ſit; Erit, juxta Regulam, $P = d$. $Q = \frac{e}{d}$. $m = -1$. $n = 1$. & A ($= P^{\frac{m}{n}} = d^{\frac{-1}{1}}$) $= d^{-1}$ ſeu $\frac{1}{d}$. B ($= \frac{m}{n}$ AQ $= -1 \times \frac{1}{d} \times \frac{e}{d}$) $= \frac{-e}{dd}$. Et ſic $C = \frac{ee}{d^3}$. $D = \frac{-e^3}{d^4}$ &c. Hoc eſt, $\frac{1}{d+e} = \frac{1}{d} - \frac{e}{dd} + \frac{ee}{d^3} - \frac{e^3}{d^4} +$ &c.

Sic & $\overline{d+e}|^{-3}$, (hoc eſt, Unitas ter diviſa per $d + e$, vel ſemel per cubum ejus,) evadit $\frac{1}{d^3} - \frac{3e}{d^4} + \frac{6ee}{d^5} - \frac{10e^3}{d^6} +$ &c.

Et

Et $N \times \overline{d+e}|^{\frac{-1}{3}}$, (hoc eſt, N diviſum per Radicem cubicam ipſius $d+e$) evadit $N \times : \frac{1}{d^{\frac{1}{3}}} - \frac{e}{3d^{\frac{4}{3}}} + \frac{2ee}{9d^{\frac{7}{3}}} - \frac{14e^3}{81d^{\frac{10}{3}}} +$ &c.

Et $N \times \overline{d+e}|^{\frac{-3}{5}}$, (hoc eſt, N diviſum per radicem quadrato-cubicam [*ſeu ſuperſolidam*] ex Cubo ipſius $d+e$, ſive $\frac{N}{\sqrt{5}: \overline{d^3 + 3dde + 3dee + e^3}}$ evadit $N \times : \frac{1}{d^{\frac{3}{5}}} - \frac{3e}{5d^{\frac{8}{5}}} + \frac{12ee}{25d^{\frac{13}{5}}} - \frac{52e^3}{125d^{\frac{18}{5}}} +$ &c.

Per eandem regulam, Geneſes Poteſtatum, Diviſiones per Poteſtates aut per Quantitates radicales, & Extractiones radicum altiorum in numeris, etiam commodè inſtituuntur.

Extractiones Radicum Æquationum affectarum in ſpeciebus, imitantur earum extractionem in numeris. Sed Methodus *Vietæ*, & *Oughtredi* noſtri, huic negotio minùs idonea eſt. Quapropter aliam excogitare adactus ſum, cujus ſpecimen exhibent ſequentia Diagrammata. Ubi dextra columna prodit ſubſtituendo in media columna valores y, p, q, r, &c. in ſiniſtra columna expreſſos.

Prius Diagramma exhibet reſolutionem hujus Numeralis Æquationis $y^3 - 2y - 5 = 0$. Et hic in ſupremis numeris pars negativa radicis, ſubducta de parte affirmativa, relinquit abſolutam radicem 2|09455148.

Et poſterius Diagramma exhibet reſolutionem hujus literariæ Æquationis. $y^3 + axy + aay - x^3 - 2a^3 = 0$.

$y^3 - 2y - 5 = 0.$		$+2.10000000$
		-0.00544852
		2.09455148
$2 + p = y$	y^3	$+8 + 12p + 6pp + p^3$
	$-2y$	$-4 - 2p$
	-5	-5
	Summa	$-1 + 10p + 6pp + p^3$
$+0,1 + q = p$	$+p^3$	$+0,001 + 0,03q + 0,3qq + q^3$
	$+6pp$	$+0,06 + 1,2 + 6,$
	$+10p$	$+1, + 10,$
	-1	$-1,$
	Summa	$0,061 + 11,23q + 6,3qq + q^3$
$-0,0054 + r = q$	$+q^3$	$-0,0000001 + 0,000r$ &c.
	$+6,3qq$	$+0,0001837 - 0,068$
	$+11,23q$	$-0,060642 + 11,23$
	$+0,061$	$+0,061$
	Summa	$+0,0005416 + 11,162r$
$-0,00004852 + ſ = r$		

$$y^3 + axy + aay - x^3 - 2a^3 = 0. \ (a - \frac{x}{4} + \frac{xx}{64a} + \frac{131\,x^3}{512\,aa} + \frac{509\,x^4}{16384\,a^3} \ \&c.$$

$a + p = y$	y^3	$a^3 + 3aap + 3app + p^3$
	$+ axy$	$+ aax + axp$
	$+ aay$	$+ a^3 \quad + aap$
	$- x^3$	$- x^3$
	$- 2a^3$	$- 2a^3$
$-\frac{1}{4}x + q = p$	p^3	$-\frac{1}{64}x^3 \quad + \frac{3}{16}xxq$ &c.
	$+ 3app$	$+ \frac{3}{16}axx - \frac{3}{2}axq + 3aqq$
	$+ axp$	$- \frac{1}{4}axx + axq$
	$+ 4aap$	$- aax \quad + 4aaq$
	$+ aax$	$+ aax$
	$- x^3$	$- x^3$
$+ \frac{xx}{64a} + r = q$	$- 3aqq$	$+ \frac{3x^4}{4096a}$ &c.
	$+ \frac{3}{16}xxq$	$+ \frac{3x^4}{1024a}$ &c.
	$- \frac{1}{2}axq$	$- \frac{1}{128}x^3 \quad - \frac{1}{2}axr$
	$+ 4aaq$	$+ \frac{1}{16}axx + 4aar$
	$- \frac{65}{64}x^3$	$- \frac{65}{64}x^3$
	$- \frac{1}{16}axx$	$- \frac{1}{16}axx$
$+ 4aa - \frac{1}{2}ax)$	$+ \frac{131}{128}x^3 - \frac{15\,x^4}{4096\,a} \ (+ \frac{131\,x^3}{512\,aa} + \frac{509\,x^4}{16384\,a^3}$	

In priori Diagrammate, primus terminus valoris ipſorum p, q, r, in prima columna, invenitur dividendo primum terminum ſummæ proximè ſuperioris, per coefficientem ſecundi termini ejuſdem ſummæ (ut — 1 per 10, aut 0,061 per 11,23) & mutando ſignum quoti.

Et idem terminus eodem ferè modo invenitur in ſecundo Diagrammate. Sed hic præcipua difficultas eſt in inventione primi termini Radicis: Id quod methodo generali perficitur: Sed hoc brevitatis gratia jam prætereа; ut & alia quædam quæ ad concinnandam operationem ſpectant: neque enim hic compendia tradere vacat. Sed dicam tantùm in genere, quòd radix cujuſvis Æquationis ſemel extracta, pro regula reſolvendi conſimiles æquationes aſſervari poſſit; quodque ex pluribus ejuſmodi regulis, regulam generaliorem plerumque efformare liceat; & quod radices omnes, ſive ſimplices ſint ſive affectæ, modis infinitis extrahi poſſint; de quorum ſimplicioribus itaque ſemper conſulendum eſt.

Quomodo ex Æquationibus ſic ad infinitas ſeries reductis, areæ & longitudines curvarum, contenta & ſuperficies ſolidorum, vel quorumlibet ſegmen-

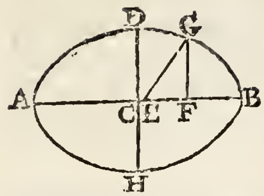
ſegmentorum figurarum quarumvis, eorumque centra gravitatis determinantur; & quomodo etiam curvæ omnes Mechanicæ ad ejuſmodi Æquationes infinitarum ſerierum reduci poſſint, indeque problemata circa illas reſolvi perinde ac ſi Geometricæ eſſent.; nimis longum foret deſcribere. Sufficiat ſpecimina quædam talium problematum recenſuiſſe: Inque iis, brevitatis gratiâ, literas A, B, C, D, &c. pro terminis ſeriei, ſicut ſub initio, nonnunquam uſurpabo.

1. Si ex dato Sinu recto, vel Sinu verſo, Arcus deſideretur: Sit radius r, & ſinus rectus x: Eritque Arcus $= x + \frac{x^3}{6rr} + \frac{3x^5}{40r^4} + \frac{5x^7}{112r^6}$ + &c. Hoc eſt, $= x + \frac{1\times1\times xx}{2\times3\times rr}A + \frac{3\times3xx}{4\times5\,rr}B + \frac{5\times5\,xx}{6\times7\,rr}C + \frac{7\times7xx}{8\times9\,rr}D$ + &c. Vel, ſit d diameter, ac x ſinus verſus; & erit Arcus $= d^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} + \frac{x^{\frac{3}{2}}}{6d^{\frac{1}{2}}} + \frac{3x^{\frac{5}{2}}}{40d^{\frac{3}{2}}} + \frac{5x^{\frac{7}{2}}}{112d^{\frac{5}{2}}}$ + &c. Hoc eſt, $= \sqrt{dx}$, in $1 + \frac{x}{6d} + \frac{3xx}{40dd} + \frac{5x^3}{112ddd}$ + &c.

2. Si viciſſim, ex dato Arcu deſideretur Sinus: Sit radius r, & arcus z: Eritque ſinus rectus $= z - \frac{z^3}{6rr} + \frac{z^5}{120r^4} - \frac{z^7}{5040r^6} + \frac{z^9}{362880r^8}$ — &c. Hoc eſt, $= z - \frac{zz}{2\times3\,rr}A - \frac{zz}{4\times5\,rr}B - \frac{zz}{6\times7\,rr}C$ — &c. Et ſinus verſus $= \frac{zz}{2r} - \frac{z^4}{24r^3} + \frac{z^6}{720r^5} - \frac{z^8}{40320r^7}$ + &c. Hoc eſt, $\frac{zz}{1\times2r} - \frac{zz}{3\times4rr}A - \frac{zz}{5\times6\,rr}B - \frac{zz}{7\times8rr}C$ — &c.

3. Si arcus capiendus ſit in ratione data ad alium arcum: Eſto diameter $= d$, chorda arcus dati $= x$, & arcus quæſitus ad arcum illum datum ut n ad 1.: Eritque arcûs quæſiti Chorda $= nx + \frac{1-nn}{2\times3\,dd}xx\,A + \frac{9-nn}{4\times5\,dd}xx\,B + \frac{25-nn}{6\times7\,dd}xx\,C + \frac{49-nn}{8\times9\,dd}xx\,D + \frac{81-nn}{10\times11\,dd}xx\,E$ + &c. Ubi nota, quòd cùm n eſt numerus impar, ſeries deſinet eſſe infinita, & evadet eadem quæ prodit per vulgarem Algebram ad multiplicandum datum angulum per iſtum numerum n.

4. Si



4. Si in Axe alterutro AB, Ellipſeos ADB (cujus centrum C, & axis alter DH) detur punctum aliquod E, circa quod recta EG occurrens Ellipſi in G, motu angulari feratur; &, ex data area ſectoris Elliptici BEG, quæratur recta GF, quæ à puncto G ad axem normaliter demittitur: Eſto $BC = q$, $DC = r$, $EB = t$, ac duplum areæ $BEG = z$; Et erit $GF = \frac{z}{t} - \frac{q\,z^3}{6\,r\,r\,t^4} + \frac{10\,q\,q - 9\,q\,t}{120\,r^4\,t^7}z^5$ $\frac{-280\,q^3 + 504\,q\,q\,t - 225\,q\,t\,t}{5040\,r^6\,t^{10}}z^7 + \&c.$ Sic itaque Aſtrooomicum illud Kepleri Problema reſolvi poteſt.

5. In eadem Ellipſi, ſi ſtatuatur $CD = r$, $\frac{CBq}{CD} = c$, & $CF = x$:

Erit Arcus Ellipticus $DG = x + \frac{1}{6\,r\,c}x^3$

$$\begin{array}{llll}
+\frac{1}{10\,r\,c^3}x^5 & +\frac{1}{14\,r\,r\,c^4}x^7 & +\frac{1}{18\,r^3\,c^5}x^9 & +\frac{1}{22\,r^4\,c^6}x^{11} + \&c. \\
-\frac{1}{40\,c^4} & -\frac{1}{28\,r\,c^5} & -\frac{1}{24\,r\,r\,c^6} & -\frac{1}{22\,r^3\,c^7} \\
 & +\frac{1}{112\,c^6} & +\frac{1}{48\,r\,c^7} & +\frac{1}{88\,r\,r\,c^8} \\
 & & -\frac{5}{1152\,c^8} & -\frac{5}{352\,r\,c^9} \\
 & & & +\frac{7}{2016\,c^{10}}
\end{array}$$

Hic numerales coefficientes ſupremorum terminorum ($\frac{1}{6}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{14}$, &c.) ſunt in Muſica progreſſione: Et numerales coefficientes omnium inferiorum in unaquaque columna prodeunt multiplicando continuò numeralem coefficientem ſupremi termini per terminos hujus progreſſionis $\frac{\frac{1}{2}n - 1}{2} \cdot \frac{\frac{3}{3}n - 3}{4} \cdot \frac{\frac{5}{4}n - 5}{6} \cdot \frac{\frac{7}{5}n - 7}{8} \cdot \frac{\frac{9}{6}n - 9}{10}$. &c. Ubi n ſignificat numerum dimenſionum ipſius c in denominatore iſtius ſupremi termini. E. g. ut terminorum infra $\frac{1}{22\,r^4\,c^6}$, numerales coefficientes inveniantur, pono $n = 6$, ducoque $\frac{1}{22}$ (numeralem coefficientem ipſius $\frac{1}{22\,r^4\,c^6}$) in $\frac{\frac{1}{2}n - 1}{2}$, hoc

hoc eſt in 1; & prodit $\frac{1}{22}$ numeralis coefficiens termini proximè inferioris: dein duco hunc $\frac{1}{22}$ in $\frac{\frac{3}{3}n-3}{4}$, ſive in $\frac{n-3}{4}$, hoc eſt in $\frac{3}{4}$; & prodit $\frac{3}{88}$ numeralis coefficiens tertii termini in iſta columna. Atque ita $\frac{3}{88}\times\frac{\frac{5}{4}n-5}{6}$ facit $\frac{5}{352}$ numeralem coefficientem quarti termini; & $\frac{5}{352}\times\frac{\frac{7}{5}n-7}{8}$ facit $\frac{7}{2816}$ numeralem coefficientem infimi termini. Idem in aliis ad infinitum uſque columnis præſtari poteſt: Adeoque valor ipſius D G per hanc regulam pro libitu produci.

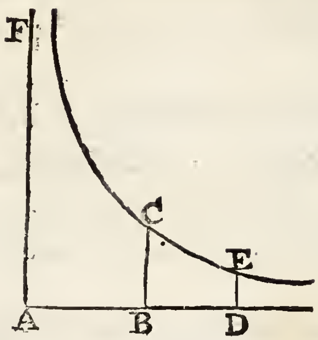
Adhæc, ſi B F dicatur x, ſitque r latus rectum Ellipſeos, & $e=\frac{r}{AB}$; Erit Arcus Ellipticus $BG=\sqrt{rx}$: in

$$1+\frac{2-\frac{3}{2}e}{3r}x,\quad \frac{-2+3e-\frac{5}{8}ee}{5rr}xx,\quad \frac{+4-9e+\frac{23}{4}ee-\frac{7}{16}e^3}{7r^3}x^3,\quad \frac{-10-30e-\frac{123}{4}ee+\frac{91}{8}e^3-\frac{45}{128}e^4}{9r^4}x^4,+\&c.$$

Quare, ſi ambitus totius Ellipſeos deſideretur; Biſeca CB in F, & quære Arcum D G per prius theorema, & arcum B G per poſterius.

6. Si, vice verſâ, ex dato Arcu Elliptico D G, quæratur ſinus ejus CF; tum dicto $CD=r$, $\frac{CBq}{CD}=c$, & arcu illo $DG=z$; erit

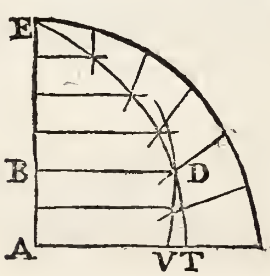
$$CF=z-\frac{1}{6cc}z^3-\frac{1}{10rc^3}z^5-\frac{1}{14rrc^4}z^7-\&c.$$
$$\qquad\qquad+\frac{13}{120c^4}\qquad+\frac{71}{420rc^5}$$
$$\qquad\qquad\qquad\qquad-\frac{493}{5040c^6}$$

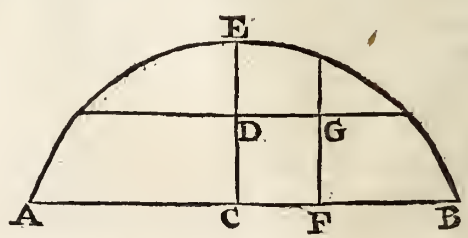


Quæ autem de Ellipſi dicta ſunt, omnia facilè accommodantur ad hyperbolam; mutatis tantùm ſignis ipſorum c & e ubi ſunt imparium dimenſionum.

7. Præterea, ſi ſit CE hyperbola, cujus aſymptoti AD AF, rectum angulum FAD conſtituant; & ad AD erigantur utcunque perpendicula BC DE, occurrentia Hyperbolæ in C & E; & AB dicatur a, BC b, & area BCED z: Erit $BD = \frac{z}{b} + \frac{zz}{2abb} + \frac{z^3}{6aab^3} + \frac{z^4}{24a^3b^4} + \frac{z^5}{120a^4b^5}$ &c. Ubi Coefficientes Denominatorum prodeunt multiplicando terminos hujus Arithmeticæ progreſſionis 1, 2, 3, 4, 5, &c. in ſe continuo. Et hinc, ex logarithmo dato poteſt numerus ei competens inveniri.

8. Eſto VDE Quadratrix, cujus vertex eſt V, exiſtente A centro, & AE ſemidiametro Circuli ad quem aptatur, & angulo VAE recto: Demiſſoque ad AE perpendiculo quovis DB, & acta quadratricis tangente DT occurrente axi ejus AV in T: Dic $AV = a$, & $AB = x$; Eritque $DB = a - \frac{xx}{3a} - \frac{x^4}{45a^3} - \frac{2x^6}{945a^5} -$ &c. Et $VT = \frac{xx}{3a} + \frac{x^4}{15a^3} + \frac{2x^6}{189a^5} +$ &c. Et area $AVDB = ax - \frac{x^3}{9a} - \frac{x^5}{225a^3} - \frac{2x^7}{6615a^5} -$ &c. Et arcus $VD = x + \frac{2x^3}{27aa} + \frac{14x^5}{2025a^4} + \frac{604x^7}{893025a^6} +$ &c. Unde viciſſim, ex dato BD, vel VT, aut area AVDB, arcuve VD, per reſolutionem affectarum æquationum erui poteſt x ſeu AB.





9. Eſto denique AEB Sphæroidés, revolutione Ellipſeos AEB circa axem AB genita, & ſecta planis quatuor, AB per axem tranſeunte, DG

parallelo

parallelo AB, CDE perpendiculariter biſecante axem, & FG parallelo CE: Sitque recta $CB = a$, $CE = e$, $CF = x$, & $FG = y$: Et Sphæroideos ſegmentum CDGF dictis quatuor planis comprehenſum, erit

$$+2cxy - \frac{x}{3c}y^3 - \frac{x}{20c^3}y^5 - \frac{x}{56c^5}y^7 - \frac{5x}{576c^7}y^9 - \&c.$$
$$-\frac{cx^3}{3aa} - \frac{x^3}{18caa} - \frac{x^3}{40c^3aa} - \frac{5x^3}{336c^5aa} - \&c.$$
$$-\frac{cx^5}{20a^4} - \frac{x^5}{40ca^4} - \frac{3x^5}{160c^3a^4} - \&c.$$
$$-\frac{cx^7}{56a^6} - \frac{5x^7}{336ca^6} - \&c.$$
$$-\frac{5cx^9}{576a^8} - \&c.$$

Ubi numerales coefficientes ſupremorum terminorum ($2, \frac{-1}{3}, \frac{-1}{20}, \frac{-1}{56}, \frac{-5}{576}$, &c. in infinitum) producuntur multiplicando primum coefficientem 2 continuò per terminos hujus progreſſionis $\frac{-1\times1}{2\times3}, \frac{1\times3}{4\times5}, \frac{3\times5}{6\times7}, \frac{5\times7}{8\times9}, \frac{7\times9}{10\times11}$, &c. Et numerales coefficientes terminorum in unaquaque columna deſcendentium in infinitum, producuntur multiplicando continuò coefficientem ſupremi termini in prima columna, per eandem progreſſionem; in ſecunda autem, per terminos hujus $\frac{1\times1}{2\times3}, \frac{3\times3}{4\times5}, \frac{5\times5}{6\times7}, \frac{7\times7}{8\times9}$, &c; in tertia, per terminos hujus $\frac{3\times1}{2\times3}, \frac{5\times3}{4\times5}, \frac{7\times5}{6\times7}, \frac{9\times7}{8\times9}$, &c; in quarta, per terminos hujus $\frac{5\times1}{2\times3}, \frac{7\times3}{4\times5}, \frac{\ \times5}{0\times7}$, &c. in quinta, per terminos hujus $\frac{7\times1}{2\times3}, \frac{9\times3}{4\times5}, \frac{11\times5}{0\times7}$, &c: & ſic in infinitum.

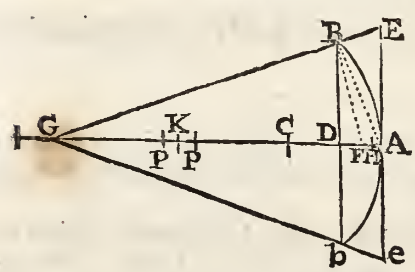
Et eodem modo ſegmenta aliorum ſolidorum deſignari, & valores eorum aliquando commodè per ſeries quaſdam numerales in infinitum produci poſſunt.

Ex his videre eſt, quantum fires Analyſeos per hujuſmodi infinitas æquationes amplientur: Quippe quæ, earum beneficio, ad omnia pænè dixerim Problemata (ſi Numeralia *Diophanti* & ſimilia excipias) ſeſe extendit.

Non tamen omnino univerſalis evadit, niſi per ulteriores quaſdam methodos eliciendi ſeries infinitas. Sunt enim quædam Problemata, in quibus non liceat ad ſeries infinitas per diviſionem, vel extractionem radicum ſimplicium affectarumve, pervenire. Sed quomodo in iſtis caſibus procedendum ſit, jam non vacat dicere; ut neque alia quædam tradere quæ circa reductionem infinitarum ſerierum in finitas, ubi rei natura tulerit, excogitavi. Nam parciùs ſcribo, quòd hæ ſpeculationes diu mihi faſtidio eſſe cœperunt, adeò ut ab iiſdem jam per quinque ferè annos abſtinuerim.

Unum tamen addam: Quòd poſtquam problema aliquod ad infinitam æquationem deducitur; poſſint inde variæ approximationes, in uſum Mechanicæ, nullo ferè negotio formari: quæ, per alias methodos quæſitæ, multo labore temporiſque diſpendio conſtare ſolent.

Cujus rei exemplo eſſe poſſunt Tractatus *Hugenii* aliorumque de Quadratura circuli. Nam, ut ex data Arcus chorda A, & dimidii arcus chorda B, arcum illum proximè aſſequaris; Finge arcum illum eſſe z, & circuli radium r; juxtaque ſuperiora erit A (nempe duplum ſinus dimidii z) $= z - \frac{x^3}{4\times6rr} + \frac{z^5}{4\times4\times120r^4} -$ &c. Et $B = \frac{1}{2}z - \frac{z^3}{2\times16\times6rr} + \frac{z^5}{2\times16\times16\times120r^4} -$ &c. Duc jam B in numerum fictitium n, & à producto aufer A, & reſidui ſecundum terminum, (nempe $-\frac{nz^3}{2\times16\times6rr} + \frac{z^3}{4\times6rr}$,) eo ut evaneſcat, pone $= 0$; indeque emerget $n = 8$; & erit $8B - A = 3z * - \frac{3z^5}{64\times120r^4} +$ &c. hoc eſt, $\frac{8B-A}{3} = z$; errore tantum exiſtente $\frac{z^5}{7680r^4} -$ &c. in exceſſu. Quod eſt Theorema *Hugenianum*.



Inſuper, ſi in Arcus B b, ſagitta AD indefinitè producta, quæratur punctum G, à quo actæ rectæ G B G b abſcindant tangentem E e quam proximè æqualem Arcui iſti:. Eſto circuli centrum C, diameter $AK = d$, & Sagitta $AD = x$: Et erit DB $(= \sqrt{dx - xx} = d^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} - \frac{x^{\frac{3}{2}}}{2d^{\frac{1}{2}}} - \frac{x^{\frac{3}{2}}}{8d^{\frac{3}{2}}} - \frac{x^{\frac{7}{2}}}{16d^{\frac{5}{2}}} -$ &c; Et AE $(= AB) = d^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} + \frac{x^{\frac{3}{2}}}{6d^{\frac{1}{2}}} + \frac{3x^{\frac{5}{2}}}{40d^{\frac{3}{2}}} + \frac{5x^{\frac{7}{2}}}{112d^{\frac{5}{2}}} +$ &c.

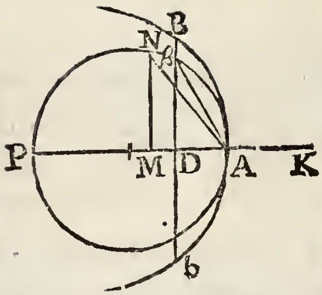
Et

Et AE — DB. AD :: AE. AG. Quare $AG = \frac{3}{2}d - \frac{1}{5}x - \frac{12\,xx}{175\,d}$ — vel + &c. Finge ergo $AG = \frac{3}{2}d - \frac{1}{5}x$: Et viciſſim erit DG $(\frac{3}{2}d - \frac{6}{5}x)$. DB :: DA. AE — DB. Quare $AE - DB = \frac{2\,x^{\frac{3}{2}}}{3\,d^{\frac{1}{2}}} + \frac{x^{\frac{5}{2}}}{5\,d^{\frac{3}{2}}} + \frac{23\,x^{\frac{7}{2}}}{300\,d^{\frac{5}{2}}}$ + &c. Adde DB; & prodit $AE = d^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}} + \frac{x^{\frac{3}{2}}}{6\,d^{\frac{1}{2}}} + \frac{3\,x^{\frac{5}{2}}}{40\,d^{\frac{3}{2}}} + \frac{17\,x^{\frac{7}{2}}}{1200\,d^{\frac{5}{2}}}$ + &c. Hoc aufer de valore ipſius AE ſupra habito, & reſtabit error $\frac{16\,x^{\frac{7}{2}}}{525\,d^{\frac{5}{2}}}$ + vel — &c. Quare, in AG, cape AH quintam partem DA, & KG = HC; & actæ GBE Gbe abſcindent Tangentem Ee quam proximè æqualem Arcui BAb; errore tantùm exiſtente $\frac{16\,x^3}{525\,d^3}\sqrt{dx}$ + vel — &c; multo minore ſcilicet quàm in Theoremate *Hugenii*. Quòd ſi fiat 7 AK. 3 AH :: DH. n; & capiatur KG = CH — n, erit error adhuc multo minor.

Atque ita, ſi Circuli ſegmentum aliquod BAb per Mechanicam deſignandum eſſet: Primò reducerem Aream iſtam in infinitam ſeriem, puta hanc $BbA = \frac{4}{3}d^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}} - \frac{2\,x^{\frac{5}{2}}}{5\,d^{\frac{1}{2}}} - \frac{x^{\frac{7}{2}}}{14\,d^{\frac{3}{2}}} - \frac{x^{\frac{9}{2}}}{36\,d^{\frac{5}{2}}}$ — &c. Dein quærerem conſtructiones Mechanicas quibus hanc ſeriem proximè aſſequerer; cujuſmodi ſunt hæ: Age rectam AB; & erit Segmentum $BbA = \frac{2}{3}\overline{AB + BD} \times \frac{4}{5}AD$ proximè; exiſtente ſcilicet errore tantùm $\frac{x^3}{70\,dd}\sqrt{dx}$ + &c. in defectu: Vel proximius, erit Segmentum illud (biſecto AD in F, & acta recta BF) $= \frac{4\,BF + AB}{15} \times 4\,AD$; exiſtente errore ſolummodo $\frac{x^3}{560\,dd}\sqrt{dx}$ + &c; qui ſemper minor erit quàm $\frac{1}{1500}$ totius ſegmenti, etiamſi ſegmentum illud ad uſque ſemicirculum augeatur.

Sic & in Ellipſi BAb, cujus vertex A, axis alteruter AK, & latus rectum AP; cape $PG = \frac{1}{2}AP + \frac{19\,AK - 21\,AP}{10\,AK} \times AD$. In Hyperbola verò, cape $PG = \frac{1}{2}AP + \frac{19\,AK + 21\,AP}{10\,AK} \times AD$. Et acta recta GBE abſcindet Tangentem AE quam proximè æqualem Arcui Elliptico vel Hyperbolico AB, dummodò Arcus ille non ſit nimis magnus.

Et



Et pro Area ſegmenti hyperbolici B b A; in DP cape $DM = \frac{3\,ADq}{4\,AK}$; & ad D & M erige perpendicula Dβ MN occurrentia ſemicirculo ſuper diametro AP deſcripto: Eritque $\frac{4\,AN + A\beta}{15} \times 4\,AD = BbA$ proximè: Vel proximius, erit $\frac{21\,AN + 4\,A\beta}{75} \times 4\,AD = BbA$; ſi modo capiatur $DM = \frac{5\,ADq}{7\,AK}$.

VI. Epistola D. Leibnitii *ad* D. Oldenburgium, 27. *Auguſti* 1676, *cum* D. Newtono *communicanda*.

Vir Clariſſime,

Literæ tuæ, die 26 *Julii* datæ, plura ac memorabiliora circa rem Analyticam continent, quàm multa volumina ſpiſſa de his rebus edita. Quare tibi pariter ac clariſſimis Viris *Newtono* ac *Collinio* gratias ago, qui nos participes tot meditationum egregiarum eſſe voluiſtis.

Inventa *Newtoni* ejus ingenio digna ſunt, quod ex Opticis Experimentis & Tubo Catadioptrico abundè eluxit.

Ejuſque methodus inveniendi Radices Æquationum, & Areas Figurarum per ſeries infinitas, prorſus differt à mea: ut mirari libeat diverſitatem itinerum per quæ eodem pertingere licet.

Mercator Figuras rationales, ſeu in quibus ordinatarum valor ex datis abſciſſis rationaliter exprimi poteſt, (ut ſcilicet indeterminata quantitas in vinculum non ingrediatur,) quadravit; & ad infinitas ſeries reducere docuit, per diviſiones: *Newtonus* autem, per Radicum Extractiones. Mea methodus, Corollarium eſt tantum doctrinæ generalis de Transformationibus; cujus ope Figura propoſita quælibet, quacunque Æquatione explicabilis, tranſmutatur in aliam analyticam æquipollentem; talem ut, in ejus Æquatione, ordinatæ dimenſio non aſcendat ultra Cubum aut Quadratum, aut etiam ſimplicem dignitatem, ſeu infimum gradum. Ita fiet ut quælibet Figura, vel per extractionem radicis cubicæ vel quadraticæ, *Newtoni* more; vel etiam, methodo *Mercatoris*, per ſimplicem diviſionem; ad ſeries infinitas reduci queat.

Ego

Ego verò, ex his Tranſmutationibus, ſimpliciſſimam ad rem præſentem delegi. Per quam ſcilicet unaquæque Figura transformatur in aliam æquipollentem rationalem; in cujus æquatione, ordinata in nullam prorſus aſcendit poteſtatem: Ac proinde ſola *Mercatoris* diviſione per infinitam ſeriem exprimi poteſt.

Ipſa porrò generalis Tranſmutationum methodus, mihi inter potiſſima Analyſeos cenſenda videtur. Neque enim tantùm ad ſeries infinitas, & ad approximationes, ſed & ad ſolutiones Geometricas, aliaque innumera vix alioqui tractabilia inſervit. Ejus verò fundamentum vobis candidè libereque ſcribo; perſuaſus quæ apud vos habentur præclara mihi quoque non denegatum iri.

Transformationis fundamentum hoc eſt: Ut figura propoſita rectis innumeris utcunque, modò ſecundùm aliquam regulam ſive legem ductis, reſolvatur in partes; quæ partes, aut aliæ ipſis æquales, alio ſitu, aliave forma reconjunctæ, aliam componant figuram priori æquipollentem, ſeu ejuſdem areæ; etſi alia longè figura conſtantem. Unde ad Quadraturas abſolutas, vel hypotheticas Geometricas, vel ſerie infinita expreſſas Arithmeticas, jamjam multis modis perveniri poteſt.

Ut intelligatur; Sit (Fig. 2.) A Q C D A. Ea, ductis rectis B D parallelis, reſolvi poteſt in Trapezia 1B 2D, 2B 3D, &c. Sed, ductis rectis convergentibus ED, reſolvi poteſt in Triangula E 1D 2D, E 2D 3D, &c. Tab. I. Fig. 2.

Si jam alia ſit curva A 1F 2F 3F, cujus Trapezia 1B 2F, 2B 3F, ſint Triangulis E 1D 2D, E 2D 3D, ordine reſpondentibus æqualia, tota figura A E 3D 2D 1DA, toti figuræ A 1F 2F 3F 3B A erit æqualis.

Quinetiam Trapezia Trapeziis conferendo, fieri poteſt ut 1N 2P, vel quod eodem redit, Rectangulum 1N 2N 2P, ſit æquale Trapezio reſpondenti 1B 2D, ſive Rectangulo 1B 2B 2D, tametſi recta 1N 1P non ſit æqualis rectæ 1B 1D, modo ſit 1N 2N ad 1B 2B ut 1B 1D ad 1N 1P; quod infinitis modis fieri poteſt.

Quæ omnia talia ſunt ut cuivis ſtatim ordine progredienti, ipſa natura duce, in mentem veniant; contineantque indiviſibilium methodum generaliſſimè conceptam, nec (quod ſciam) hactenus ſatis univerſaliter explicatam. Non tantùm enim parallelæ & convergentes, ſed & aliæ quæcunque certa lege ductæ, rectæ vel curvæ, adhiberi poſſunt ad reſolutionem. Quanta autem & quàm abſtruſa hinc duci poſſint, judicabit qui methodi univerſalitatem animo erit complexus. Certum enim eſt omnes Quadraturas hactenus notas, abſolutas vel hypotheticas, nonniſi exigua ejus ſpecimina eſſe.

Sed nunc quidem ſuffecerit applicationem oſtendere ad id de quo agitur; Series ſcilicet infinitas, & modum transformandi figuram datam in aliam æquipollentem rationalem, *Mercatoris* methodo tractandam.

A Q C A ſit Quadrans Circuli: Radius $AQ = r$: Abſciſſa $A\,1B = x$:

Ordinata 1B 1D $=y$: Æquatio pro Circulo $2rx - x^2 = y^2$. Ducatur recta A 1D : producaturque donec ipſi Q C etiam productæ occurrat in 1N: Et Q 1N vocetur z. Et erit A 1B ſeu $x = \frac{2r^3}{r^2 + x^2}$: Et 1B 1D ſive $y = \frac{2zr^2}{r^2+z^2}$. Eodem modo, ducta A 2D 2N ; ſi Q 2N $= z - \beta$ (poſita ſcilicet 1N 2N $= \beta$) erit A 2B $= \frac{2r^3}{r^2 + x^2 - 2z\beta + \beta^2}$; & A 2B — A 1B, ſive recta 1B 2B, erit $\frac{2r^3}{r^2+z^2-2z\beta+\beta^2} - \frac{2r^3}{r^2+z^2}$. Sive, poſita β infinitè parva, (poſt deſtructiones & diviſiones,) erit 1B 2B $= \frac{4r^3z\beta}{[2]\,\overline{r^2+z^2}}$. Habita ergo recta 1B 1D, & recta 1B 2B, habebitur valor Rectanguli 1D 1B 2B, multiplicatis eorum valoribus in ſe invicem; habebitur inquam $\frac{8r^5zz\beta}{[3]\,\overline{r^2+z^2}}$, pro valore Rectanguli 1D 1B 2B.

Sit jam Curvæ 1P 2P 3P &c. natura pro arbitrio aſſumpta talis, ut Ordinata ejus 1N 1P (ex data abſciſſa Q 1N ſive z) ſit $\frac{8r^5z^2}{[3]\,\overline{r^2+z^2}}$. Ideo, quoniam 1N 2N $= \beta$, erit rectangulum 1P 1N 2N, etiam $\frac{8r^5z^2\beta}{[3]\,\overline{r^2+z^2}}$. Ac proinde æquale Rectangulo 1D 1B 2B, & ſpatium 1P 1N 3N 3P 2P 1P æquale ſpatio circulari reſpondenti 1D 1B 3B 3D 2D 1D. Eſt autem quælibet Ordinata N P rationalis, ex data abſciſſa Q N ; quia, poſita QN $= z$, Ordinata N P eſt $\frac{8r^5z^2}{[3]\,\overline{r^2+z^2}}$ ſive $\frac{8r^5z^2.}{r^6+3r^4z^2+3r^2z^4+z^6}$. Ergò ipſa per Infinitam ſeriem integrorum exprimi poteſt, dividendo. Et ſpatium talibus ordinatis comprehenſum, æquipollens circulari, infinita ſerie numerorum rationalium, Methodo *Mercatoris* quadrari poteſt. Quod cùm facillimum ſit, facere hic omitto. Neque enim elegantiæ ſuæ, ſed Methodi generalis explicandæ causâ, hoc exemplum aſſumpſi.

Ita ſiquis loco Circuli mihi dediſſet curvam, in qua ordinata aſcendiſſet ad gradum cubicum, potuiſſem eam reducere ad curvam, in qua ordinata non aſſurrexiſſet ultra quadratum, vel etiam ne quidem ad quadratum.

Itaque ſemper, ſive extractionibus radicum *Newtonianis*, (gradûs cujuslibet dati,) vel Diviſionibus *Mercatoris*, poterit cujuslibet figuræ ſpatium inveniri, interventu alterius Æquipollentis. Multum autem ad ſimplicitatem intereſt quid eligas.

Omnium verò poſſibilium circuli, & Sectoris Conici centrum habentis, cujus-

cujuslibet, per Series infinitas quadraturarum ſimpliciſſimam hanc eſſe dicere auſim, quam nunc ſubjicio.

Sit Q A 1F (Fig. 2.) Sector, duabus rectis in centro Q concurrentibus, & Curva Conica A 1F, ad verticem A ſive Axis extremum perveniente, comprehenſus. Tangenti verticis AT occurrat Tangens 1FT. Ipſum AT vocemus t; & Rectangulum ſub ſemi-latere recto in ſemi-latus transverſum ſit unitas. Erit Sector hyperbolæ, circuli, vel ellipſeos, per ſemi-latus tranſverſum diviſus, $= \frac{t}{1} \pm \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} \pm \frac{t^7}{7}$ &c. Signo ambiguo $\pm$, valente $+$ in Hyperbola, $-$ in Circulo vel Ellipſi. Unde, poſito Quadrato circumſcripto 1, erit Circulus $\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7}$ &c. Quæ expreſſio, jam triennio abhinc & ultra à me communicata amicis, haud dubiè omnium poſſibilium ſimpliciſſima eſt maximeque afficiens mentem.

Unde duco Harmoniam ſequentem;

$$\frac{1}{3}\ \frac{1}{8}\ \frac{1}{15}\ \frac{1}{24}\ \frac{1}{35}\ \frac{1}{48}\ \frac{1}{63}\ \frac{1}{80}\ \frac{1}{99}\ \frac{1}{120}\ \text{\&c.} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{1}{3}\quad \frac{1}{15}\quad \frac{1}{35}\quad \frac{1}{63}\quad \frac{1}{99}\quad \text{\&c.} = \frac{2}{4}$$

$$\frac{1}{8}\quad \frac{1}{24}\quad \frac{1}{48}\quad \frac{1}{80}\quad \frac{1}{120}\ \text{\&c.} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{3}\qquad \frac{1}{35}\qquad \frac{1}{99}\quad \text{\&c.}$$

$$\frac{1}{8}\qquad \frac{1}{48}\qquad \frac{1}{120}\ \text{\&c.}$$

} Exprimit arcum { Circuli ABCD, fig. 3. Hyperbolæ æquilateræ CBEFC, fig. 3. Cujus Quadratum inſcriptum eſt $\frac{1}{4}$ TAB. I. Fig. 3.

Numeri 3, 8, 15, 24, &c. ſunt Quadrati Unitate minuti.

Viciſſim, ex Seriebus regreſſuum pro hyperbola hanc inveni. Si ſit numerus aliquis unitate minor $1 - m$, ejuſque Logarithmus hyperbolicus l. Erit $m = \frac{l}{1} - \frac{l^2}{1 \times 2} + \frac{l^3}{1 \times 2 \times 3} - \frac{l^4}{1 \times 2 \times 3 \times 4}$ &c. Si numerus ſit major unitate, ut $1 + n$; tunc pro eo inveniendo mihi etiam prodiit Regula, quæ in *Newtoni* Epiſtola expreſſa eſt; ſcilicet erit $n = \frac{l}{1} + \frac{l^2}{1 \times 2} + \frac{l^3}{1 \times 2 \times 3} + \frac{l^4}{1 \times 2 \times 3 \times 4}$. &c. Prior tamen celerius appropinquat. Ideoque efficio ut ea poſſim uti, etiam cùm major eſt Unitate numerus $1 + n$. Nam idem eſt Logarithmus pro $1 + n$ & pro $\frac{1}{1 + n}$. Unde, ſi $1 + n$ major unitate, erit $\frac{1}{1 + n}$ minor unitate. Fiat ergo $1 - m = \frac{1}{1 + n}$, ac inventa m, habebitur & $1 + n$ numerus quæſitus.

Quod regreſſum ex Arcubus attinet, incideram ego directè in Regulam;

quæ

quæ ex dato Arcu, Sinum complementi exhibet. Nempe, Sinus complementi $= 1 - \frac{a2}{1 \times 2} + \frac{a^4}{1 \times 2 \times 3 \times 4}$ &c. Sed poſtea quoque deprehendi, ex ea, illam nobis communicatam pro inveniendo Sinu Recto; qui eſt $\frac{a}{1} - \frac{a^3}{1 \times 2 \times 3} + \frac{a^5}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5}$ &c. poſſe démonſtrari. Quod tribus Verbis ſic fit. Summa ſinuum complementi ad arcum, ſeu omnium $1 - \frac{a^2}{1 \times 2} + \frac{a^4}{1 \times 2 \times 3 \times 4}$ &c. Eſt $\frac{a}{1} - \frac{a^3}{1 \times 2 \times 3} + \frac{a^5}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5}$ &c. Porro, Summa ſinuum complementi ad arcum (ſeu arcui in locis debitis inſiſtentium) æquatur Sinui recto, ducto in radium; ut notum eſt Geometris. Id eſt, æquatur ipſi Sinui recto; quia Radius hic eſt Unitas. Ergo Sinus rectus $= \frac{a}{1} - \frac{a^3}{1 \times 2 \times 3} + \frac{a^5}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5}$ &c. Hinc etiam, ex dato Arcu & Radio, ſine ulla prorſus aliorum notitia, haberi poteſt Area Segmenti circularis duplicati: quæ eſt $\frac{a^3}{1 \times 2 \times 3} - \frac{a^5}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5} + \frac{a^7}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7}$ &c. Unde optimè Segmentorum Tabula ad Gradus & Minuta &c. calculabitur.

Pro Trigonometricis autem operationibus, percommoda mihi videtur hæc expreſſio: Ut Sinus complementi c ponatur $= 1 - \frac{a^2}{1 \times 2} + \frac{a^4}{1 \times 2 \times 3 \times 4}$; quoniam, ſola memoria retenta, omnibus caſibus & operationibus, directis ſcilicet ſimul & reciprocis, ſufficit; Quod ideo fit, quoniam Æquatio $c = 1 - \frac{a^2}{2} + \frac{a^4}{24}$ eſt plana. Unde ſi viciſſim quæras Arcum, ex Sinu complementi radix extrahi poteſt; adeoque fiet Arcus $a = \sqrt{6 - \sqrt{24c + 12}}$ exactè ſatis ad uſum eorum qui in itineribus Tabularum commoditate carent; quia error æquationis non eſt $\frac{a^6}{720}$.

Innumera alia poſſent dici, quæ his fortaſſe elegantia & exactitudine non cederent. Sed ego ita ſum comparatus ut plerumque, Methodis generalibus detectis, rem in poteſtate habere contentus, reliqua libenter aliis relinquam. Neque enim iſta omnia magnopere æſtimanda ſunt, niſi quòd artem inveniendi perficiunt, mentemque excolunt. Si quæ obſcuriora videbuntur, ea libenter elucidabo: Et illud quoque explicabo, quomodo hac methodo Æquationum quoque, utcunque affectarum, radices per infinitam ſeriem dari poſſint, ſine ulla extractione; quod mirum fortaſſe videbitur.

Sed

Sed deſideraverim ut clariſſimus *Newtonus* nonnulla quoque ampliùs explicet: Ut, originem Theorematis quod initio ponit: Item, modum quo quantitates p, q, r, in ſuis Operationibus invenit: Ac denique, quomodo in methodo regreſſuum ſe gerat; ut, cùm ex Logarithmo quærit numerum. Neque enim explicat quomodo id ex methodo ſua derivetur.

Nondum mihi licuit ejus literas qua merentur diligentia legere: Quoniam tibi è veſtigio reſpondere volui. Unde non ſatis nunc quidem affirmare auſim, an nonnulla eorum quæ ſuppreſſit, ex ſola earum lectione conſequi poſſum. Sed optandum tamen foret, ipſum ea potiùs ſupplere *Newtonum*: Quia credibile eſt, non poſſe eum ſcribere, quin aliquid ſemper præclari nos doceat Vir (ut apparet) egregiarum meditationum plenus.

Ad alia tuarum literarum venio, quæ doctiſſimus *Collinius* communicare gravatus non eſt. Vellem adjeciſſet appropinquationis *Gregorianæ* (b) linearis demonſtrationem. Credo tamen aliam haberi ſimpliciorem, etiam in infinitum euntem; quæ fiat ſine ulla biſectione Anguli; imò, ſine ſuppoſita circuli conſtructione; ſolo rectarum ductu.

Vellem *Gregoriana* omnia conſervari. Fuit enim his certè ſtudiis promovendis aptiſſimus. Cæterùm ejus demonſtrationi editæ, de impoſſibilitate quadraturæ abſolutæ, circuli & hyperbolæ, multa haud dubiè deſunt.

De Æquationum radicibus ſurdis generalibus inveniendis; ſive, quod idem eſt, tollendis Æquationum poteſtatibus intermediis, multa & ego meditatus ſum; & jam Vere anni ſuperioris Specimina *Hugenio* communicaveram Regularum Cardanicis ſimilium. Seriem enim habebam ejuſmodi Regularum in infinitum euntem; in quibus & *Cardanica* continebatur. Sed ultra gradum cubicum non erant generales. Perſpexi tamen inde veram Methodum progrediendi longiùs. Quamquam multis adhuc opus ſit artibus; quas excutiendas libenter ingenioſiſſimo *Tſchirnhauſio* relinquo, qui hic ad eadem quæ ego habebam ſpecimina, imò & alia præterea, etiam de ſuo pervenit.

Ex iis quæ *Collinius* ait de *Gregoriana* Methodo, difficile non fuit nobis certò divinare in quo conſiſtat ejus ſubſtantia.

Imaginariarum quantitatum in realium radicum expreſſiones ingredientium ſublationem, fruſtra putem ſperari, imò quæri. Neque enim illæ ullo modo vel calculis vel conſtructionibus obſunt: Et veræ realeſque ſunt quantitates, ſi inter ſe conjunguntur, ob deſtructiones virtuales. Quod multis elegantibus exemplis & argumentis deprehendi.

Exempli gratiâ, $\sqrt{1+\sqrt{-3}}+\sqrt{1-\sqrt{-3}}=\sqrt{6}$. Tametſi enim

G 3 neque

(b) *Vide Davidis Gregorii Exercitationem de* Dimenſione figurarum, *Edinburgi* 1684.

neque ex Binomio $\sqrt{1+\sqrt{-3}}$, neque ex Binomio $\sqrt{1-\sqrt{-3}}$, radix extrahetur; nec proinde ſic deſtruetur imaginaria $\sqrt{-3}$; ſupponenda tamen eſt deſtructa eſſe virtualiter, quod actu appareret ſi fieri poſſet Extractio. Alia tamen via hæc ſumma reperitur eſſe $\sqrt{6}$. Unde in Cubicis Binomiis ubi realitas ejuſmodi formularum (tunc cùm extractio ex ſingulis Binomiis fieri nequit) ad oculum oſtendi non poteſt; mente tamen intelligitur. Quare fruſtrà *Carteſius* aliique expreſſiones *Cardanicas* pro particularibus habuere. Siquis poſſet invenire quadraturam circuli, & ejus partium, ex data hyperbola & ejus partium quadratura; is poſſet eas tollere; modo in ipſam quadraturam imaginariæ illæ non rurſus ingrediantur.

Cæterùm ex illis quas habeo meditationibus circa Radices æquationum irrationales, neceſſariò ſequitur res ſatis paradoxa: Scilicet omnes Æquationes gradus octavi, noni, decimi, poſſe ad gradum ſeptimum reduci. Itaque & omnia Problemata ad decimum gradum uſque occurrentia, poſſunt ad ſeptimum deprimi.

Horribiles calculi ſubeundi erunt illi, qui in hoc argumentum velut per vim irrumpet; ſed facillimi ipſi, qui antè meditabitur: cùm, ut prævideo, ipſa natura rei ducat ad compendia quædam, per quæ ſpes eſt calculi magnam partem abſcindi, remque elegantibus artificiis, ingenii potiùs vi quàm calculi labore, tranſigi poſſe.

Sed ſiquis laborem non ſubterfugeret, eum docere poſſum Methodum Analyticam generalem infallibilem, per quam omnium æquationum radices generales invenire liceret.

Verùm meliora illis proponerem agenda, qui calculo delectarentur. Conſilium enim habeo Tabularum Analyticarum, quæ non minoris futuræ eſſent uſûs in Analyſi, quàm Tabulæ Sinuum in Geometria practica; imò, arbitror, qui paulum in iis calculandis verſatus ſit, eum progreſſiones reperturum in infinitum, quarum ope magna Tabulæ pars ſine labore continuari poſſit. Nihil eſt quod norim in tota Analyſi momenti majoris. Nam in his Tabulis pleraque Problemata ſtatim ſoluta haberentur, aut levi operâ poſſent inde deduci.

Pendet negotium ex re longè majore; Arte ſcilicet combinatoria generali ac vera. Cujus vim ac poteſtatem neſcio an quiſquam hactenùs ſit conſequutus. Ea verò nihil differt ab Analyſi illa ſuprema, ad cujus intima, quantum judicare poſſum, *Carteſius* non pervenit. Eſt enim ad eam conſtituendam opus Alphabeto cogitationum humanarum. Et ad inventionem ejus Alphabeti, opus eſt Analyſi axiomatum. Sed non miror iſta nemini ſatis conſiderata: Quia plerumque facilia negligimus; & multa, quæ clara videntur, aſſumimus. Quod quamdiu faciemus, nunquam ad illud perveniemus, quod mihi videtur in rebus intellectualibus ſummum; nec genus calculi, etiam non-Mathematicis accommodati, obtinebimus.

Optarim

Optarim Cl. *Pellium* generalia ſua meditata, & illud ſpeciatim quod memoras *Cribrum Eratoſthenis*, non ſupprimere. Nam etſi omnia fortè, quæ deſtinarat, non abſolverit; meditata tamen ipſa, & conſilia egregiorum Virorum non perire, publici intereſt. Utilia quoque futura ſunt, quæ de Sinuum tabula ad æquationes accommodanda habet. Item de limitibus & radicibus.

Quod dicere videmini, pleraſque difficultates (exceptis Problematibus Diophantæis) ad ſeries infinitas reduci; id mihi non videtur. Sunt enim multa uſque adeò mira & implexa, ut neque ab Æquationibus pendeant, neque ex quadraturis. Qualia ſunt (ex multis aliis) Problemata methodi tangentium inverſæ; quæ etiam *Carteſius* in poteſtate non eſſe faſſus eſt.

In tomo 3° Epiſtolarum, una habetur ad *Beaunium*; in qua, ad propoſitas à *Beaunio*, curvas quaſdam invenire conatur; quarum una eſt ludus Naturæ, ut intervallum inter Tangentem ad (axem) directricem uſque productam, & ordinatim applicatam, ex curva ad directricem, ſit ſemper idem; recta ſcilicet conſtans. Hanc curvam nec *Carteſius* nec *Beaunius* nec quiſquam alius (quod ſciam) invenit. Ego verò qua primum die, imò hora, cœpi quærere; ſtatim certa Analyſi ſolvi. Fateor tamen nondum me quicquid in hoc genere deſiderari poteſt conſecutum, quamquam maximi momenti eſſe ſciam. Ac de his quidem nunc ſatis.

Ego id agere conſtitui, ubi primum otium nactus ero, ut rem omnem Mechanicam reducam ad puram Geometriam; Problemataque circa elateria, & aquas, & pendula, & projecta, & ſolidorum reſiſtentiam, & frictiones, &c. definiam. Quæ hactenus attigit nemo. Credo autem rem omnem nunc eſſe in poteſtate; ex quo circa regulas motuum mihi penitus perfectis demonſtrationibus ſatisfeci; neque quicquam ampliùs in eo genere deſidero. Tota autem res, quod mireris, pendet ex Axiomate Metaphyſico pulcherrimo; quod non minoris eſt momenti circa motum, quam hoc, totum eſſe majus parte, circa magnitudinem.

De Centro baricis quoque ſingularem quendam aditum reperi ad novas ac planè à prioribus diverſas contemplationes, in Geometria pariter ac Mechanica, magno uſui futuras. Hæc ubi (Deo volente) abſolvero, reliquum temporis, quod ſcilicet Philoſophicis meditationibus deſtinare fas erit, Naturæ indagationi debeo.

Tſchirnhauſius proximo Tabellione ſcribet.

VII. Epistola D. Newtoni *poſterior*, *ad D.* Oldenburgium, *Octob.* 24. (c) 1676. *cum D.* Leibnitio *communicanda.*

Vir Digniſſime,

Quanta cum voluptate legi Epiſtolas Clariſſimorum Virorum D. *Leibnitii* & D. *Tſchirnhauſii* vix dixerim.

Perelegans ſanè eſt *Leibnitii* methodus perveniendi ad ſeries convergentes: & ſatis oſtendiſſet ingenium Authoris, etſi nihil aliud ſcripſiſſet. Sed quæ alibi per Epiſtolam ſparſit ſuo nomine digniſſima, efficiunt etiam ut ab eo ſperemus maxima. Diverſitas modorum quibus eodem tenditur, eo magis placuit, quòd mihi tres Methodi perveniendi ad ejuſmodi Series innotuerant; adeò ut novam nobiſcum communicandam vix exſpectarem.

Unam è meis priùs deſcripſi: jam addo aliam; illam ſcilicet qua primum incidi in has Series. Nam incidi in eas antequam ſcirem diviſiones & extractiones radicum quibus jam utor. Et hujus explicatione pandendum eſt fundamentum theorematis ſub initio Epiſtolæ prioris poſiti, quod D. *Leibnitius* à me deſiderat.

Sub initio ſtudiorum meorum Mathematicorum, ubi incideram in opera Celeberrimi *Walliſii* noſtri, conſiderando ſeries quarum intercalatione ipſe exhibet aream circuli & hyperbolæ; utpote quod in ſerie curvarum, quarum baſis ſeu axis communis ſit x, & ordinatim applicatæ $\overline{1-xx}|^{\frac{0}{2}}$. $\overline{1-xx}|^{\frac{1}{2}}$. $\overline{1-xx}|^{\frac{2}{2}}$. $\overline{1-xx}|^{\frac{3}{2}}$. $\overline{1-xx}|^{\frac{4}{2}}$. $\overline{1-xx}|^{\frac{5}{2}}$. &c. ſi Areæ alternarum quæ ſunt x. $x-\frac{1}{3}x^3$. $x-\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5$. $x-\frac{3}{3}x^3+\frac{3}{5}x^5-\frac{1}{7}x^7$ &c. interpolari poſſent; haberemus Areas intermediarum; quarum prima $\overline{1-xx}|^{\frac{1}{2}}$ eſt circulus.

Ad has interpolandas notabam, quòd, in omnibus, primus terminus eſſet x, quodque ſecundi termini $\frac{0}{3}x^3$. $\frac{1}{3}x^3$. $\frac{2}{3}x^3$. $\frac{3}{3}x^3$. &c. eſſent in Arithmetica progreſſione; & proinde quòd duo primi termini ſerierum intercalandarum deberent eſſe $x-\frac{\frac{1}{2}x^3}{3}$. $x-\frac{\frac{3}{2}x^3}{3}$. $x-\frac{\frac{5}{2}x^3}{3}$. &c.

Ad reliquas intercalandas conſiderabam, quòd Denominatores 1, 3, 5, 7, &c. erant in Arithmetica progreſſione; adeoque ſolæ numeratorum coefficientes numerales eſſent inveſtigandæ. Hæ autem in alternis datis

(c) Sicubi pro *Octob.* 24. ſcriptum ſit *Auguſti* 24; id mendum eſt, & emendandum.

datis areis erant figuræ poteſtatum numeri 11. [*Intelligo* 1 + 1, *& ſic in ſequentibus.*] Nempe harum $\overline{11}|^{0}$. $\overline{11}|^{1}$. $\overline{11}|^{2}$. $\overline{11}|^{3}$. $\overline{11}^{4}$. Hoc eſt, primo 1: deinde 1, 1: tertio 1, 2, 1: quarto 1, 3, 3, 1: quinto 1, 4, 6, 4, 1: &c.

Quærebam itaque, quomodo in his ſeriebus, ex datis duabus primis figuris, reliquæ derivari poſſent. Et inveni quòd poſita ſecunda figura m, reliquæ producerentur per continuam multiplicationem terminorum hujus ſeriei,

$$\frac{m-0}{1} \times \frac{m-1}{2} \times \frac{m-2}{3} \times \frac{m-3}{4} \times \frac{m-4}{5} \text{ \&c.}$$

Exempli gratiâ; Sit (terminus ſecundus) $m = 4$; Et erit $4 \times \frac{m-1}{2}$ hoc eſt 6, tertius terminus; & $6 \times \frac{m-2}{3}$ hoc eſt 4, quartus; & $4 \times \frac{m-3}{4}$ hoc eſt 1, quintus; & $1 \times \frac{m-4}{5}$ hoc eſt 0, ſextus; quo ſeries in hoc caſu terminatur.

Hanc regulam itaque applicui ad ſeries interſerendas. Et cum, pro circulo, ſecundus terminus eſſet $\frac{\frac{1}{2}x^3}{3}$, poſui $m = \frac{1}{2}$; & prodierunt termini $\frac{1}{2} \times \frac{\frac{1}{2}-1}{2}$ ſive $-\frac{1}{8}$; $-\frac{1}{8} \times \frac{\frac{1}{2}-2}{3}$ ſive $+\frac{1}{16}$; $+\frac{1}{16} \times \frac{\frac{1}{2}-3}{4}$ ſive $-\frac{5}{128}$; & ſic in infinitum. Unde cognovi deſideratam Aream ſegmenti circularis eſſe $x - \frac{\frac{1}{2}x^3}{3} - \frac{\frac{1}{8}x^5}{5} - \frac{\frac{1}{16}x^7}{7} - \frac{\frac{5}{128}x^9}{9}$ &c.

Et eadem ratione prodierunt etiam interſerendæ areæ reliquarum curvarum: Ut & area Hyperbolæ & cæterarum alternarum in hac ſerie $\overline{1+xx}|^{\frac{0}{2}}$. $\overline{1+xx}|^{\frac{1}{2}}$. $\overline{1+xx}|^{\frac{2}{2}}$. $\overline{1+xx}|^{\frac{3}{2}}$. &c.

Et eadem eſt ratio intercalandi alias ſeries, idque per intervalla duorum pluriumve terminorum ſimul deficientium.

Hic fuit primus meus ingreſſus in has meditationes: Qui è memoria ſanè exciderat niſi oculos in adverſaria quædam ante paucas ſeptimanas retuliſſem.

Ubi verò hæc didiceram, mox conſiderabam terminos $\overline{1-xx}|^{\frac{0}{2}}$. $\overline{1-xx}|^{\frac{2}{2}}$. $\overline{1-xx}|^{\frac{4}{2}}$. $\overline{1-xx}|^{\frac{6}{2}}$. &c. hoc eſt, 1. $1-xx$. $1-2xx+x^4$. $1-3xx+3x^4-x^6$. &c. eodem modo interpolari poſſe ac areas ab ipſis generatas: Et ad hoc nihil aliud requiri quàm omiſſionem denominatorum 1, 3, 5, 7, &c. in terminis exprimentibus areas; hoc eſt, coefficientes terminorum quan-

quantitatis intercalandæ $\overline{1-xx}|^{\frac{1}{2}}$, vel $\overline{1-xx}|^{\frac{3}{2}}$, vel generaliter $\overline{1-xx}|^{m}$, prodire per continuam multiplicationem terminorum hujus ſeriei $m \times \frac{m-1}{2} \times \frac{m-2}{3} \times \frac{m-3}{4}$ &c.

Adeoque (exempli gratiâ) $\overline{1-xx}|^{\frac{1}{2}}$, valeret $1-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{8}x^4-\frac{1}{16}x^6$ &c. Et $\overline{1-xx}|^{\frac{3}{2}}$, valeret $1-\frac{3}{2}x^2+\frac{3}{8}x^4+\frac{1}{16}x^6$ &c. Et $\overline{1-xx}|^{\frac{1}{3}}$ valeret $1-\frac{1}{3}xx-\frac{1}{9}x^4-\frac{5}{81}x^6$ &c.

Sic itaque innotuit mihi generalis reductio radicalium in infinitas ſeries per regulam quam poſui initio Epiſtolæ prioris, antequàm ſcirem extractiones radicum.

Sed, hac cognita, non potuit altera me diu latere. Nam, ut probarem has operationes, multiplicavi $1-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{8}x^4-\frac{1}{16}x^6$ &c. in ſe; & factum eſt $1-xx$, terminis reliquis in infinitum evaneſcentibus per continuationem ſeriei. Atque ita $1-\frac{1}{3}xx-\frac{1}{9}x^4-\frac{5}{81}x^6$ &c. bis in ſe ductum, produxit etiam $1-xx$. Quod, ut certa fuerit harum Concluſionum demonſtratio, ſic me manuduxit ad tentandum è converſo, num hæ ſeries, quas ſic conſtitit eſſe radices quantitatis $1-xx$, non poſſent inde extrahi more Arithmetico. Et res bene ſucceſſit. Operationis forma in quadraticis radicibus hæc erat.

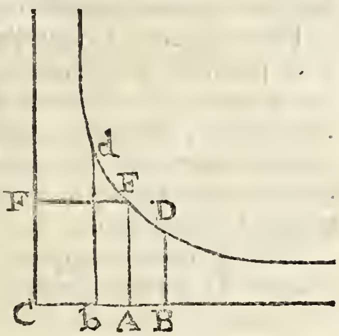
$$
\begin{array}{l}
1-xx\;(\,1-\frac{1}{2}xx-\frac{1}{8}x^4-\frac{1}{16}x^6 \text{ \&c.}\\
\underline{1\qquad\quad}\\
0-xx\\
\underline{\;-xx+\frac{1}{4}x^4}\\
\qquad\quad -\frac{1}{4}x^4\\
\qquad\quad \underline{-\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{8}x^6+\frac{1}{64}x^8}\\
\qquad\qquad\quad -\frac{1}{8}x^6-\frac{1}{64}x^8
\end{array}
$$

His perſpectis, neglexi penitus interpolationem ſerierum; & has operationes tanquam fundamenta magis genuina ſolummodo adhibui. Nec latuit reductio per diviſionem; res utique facilior.

Sed & reſolutionem affectarum æquationum mox aggreſſus ſum, eamque obtinui. Unde ſimul ordinatim applicatæ, ſegmenta axium, aliæque quælibet rectæ, ex areis curvarum vel arcubus datis innotuere. Nam regreſſio ad hæc nihil indigebat præter reſolutionem æquationum, quibus areæ vel arcus ex datis rectis dabantur.

Eo tempore peſtis ingruens, [*quæ contigit annis* 1665, 1666,] coegit me

me hinc fugere, & alia cogitare. Addidi tamen ſubinde condituram quandam Logarithmorum ex area hyperbolæ, quam hic ſubjungo.



Sit d F D Hyperbola, cujus centrum C, vertex F, & quadratum interjectum C A F E = 1. In C A cape A B A b hinc inde $= \frac{1}{10}$ ſeu 0, 1: Et, erectis perpendiculis B D b d ad Hyperbolam terminatis, erit ſemi-ſumma ſpaciorum AD & Ad $= 0.1 + \frac{0.001}{3} + \frac{0.00001}{5} + \frac{0.0000001}{7}$ &c. & ſemi-differentia $= \frac{0.01}{2} + \frac{0.0001}{4} + \frac{0.000001}{6} + \frac{0.00000001}{8}$ &c. Quæ reductæ ſic ſe habent,

0.1000000000000	0.0050000000000
3333333333	250000000
20000000	1666666
142857	12500
1111	100
9	1
0.1003353477310	0.0050251679267

Horum ſumma 0.1053605156577 eſt Ad; & differentia 0.0953101798043 eſt AD. Et, eadem ratione, poſitis A B A b hinc inde = 0.2, obtinebitur A d = 0.2231435513142, & A D = 0.1823215567939. Habitis ſic Logarithmis hyperbolicis numerorum quatuor decimalium 0.8, 0.9, 1.1, & 1.2; Cùm ſit $\frac{1.2}{0.8} \times \frac{1.2}{0.9} = 2$; & 0.8 & 0.9, ſint minores unitate: Adde Logarithmos eorum ad duplum Logarithmi 1.2, & habebis 0.6931471805597, Logarithmum hyperbolicum numeri 2. Cujus triplo adde Log. 0.8 (ſiquidem ſit $\frac{2 \times 2 \times 2}{0.8} = 10$,) & habebis 2.3025850929933, Logarithmum numeri 10: Indeque per additionem ſimul prodeunt Logarithmi numerorum 9 & 11: Adeoque omnium primorum horum 2, 3, 5, 11, Logarithmi in promptu ſunt. Inſuper, ex ſola depreſſione numerorum ſuperioris computi per loca decimalia, & additione, obtinentur Logarithmi Decimalium 0.98, 0.99, 1.01, 1.02; ut & horum 0.998, 0.999, 1. 001,

1.002. Et inde per additionem & ſubductionem, prodeunt Logarithmi primorum 7, 13, 17, 37, &c. Qui, unà cum ſuperioribus, per Logarithmum numeri 10 diviſi evadunt veri Logarithmi in tabulam inſerendi. Sed hos poſtea propiùs obtinui.

Pudet dicere ad quot figurarum loca has computationes otioſus eo tempore produxi. Nam tunc ſanè nimis delectabar inventis hiſce. Sed ubi prodiit ingenioſa illa *Nicolai Mercatoris* Logarithmotechnia (quem ſuppono ſua primùm inveniſſe) cœpi ea minùs curare; ſuſpicatus, vel eum noſſe extractionem radicum æquè ac diviſionem fractionum; vel alios ſaltem, diviſione patefacta, inventuros reliqua, priùs quàm ego ætatis eſſem maturæ ad ſcribendum.

Eo ipſo tamen tempore quo liber iſte prodiit, communicatum eſt per amicum D. *Barrow* (tunc Matheſeos Profeſſorem Cantab.) cum D. *Collinio*, compendium quoddam Methodi harum ſerierum; in quo ſignificaveram areas & longitudines curvarum omnium, & ſolidorum ſuperficies & contenta ex datis rectis; & vice verſa, ex his datis rectas determinari poſſe: Et Methodum ibi indicatam illuſtraveram diverſis ſeriebus.

Suborta deinde inter nos Epiſtolari conſuetudine; D. *Collinius*, Vir in rem Mathematicam promovendam natus, non deſtitit ſuggerere ut hæc publici juris facerem. Et ante annos quinque (1671) cùm ſuadentibus amicis conſilium ceperam edendi Tractatum de refractione lucis, & coloribus, quem tunc in promptu habebam; cœpi de his ſeriebus iterum cogitare; Et Tractatum de iis etiam conſcripſi, ut utrumque ſimul ederem.

Sed, ex occaſione Teleſcopii Catadioptrici, Epiſtolâ ad te miſsâ, qua breviter explicui conceptus meos de natura lucis, inopinatum quiddam effecit ut mei intereſſe ſentirem ad te feſtinanter ſcribere de impreſſione iſtius Epiſtolæ. Et ſubortæ ſtatim per diverſorum Epiſtolas (objectionibus aliiſque refertas) crebræ interpellationes me prorſus à conſilio deterruerunt; & effecerunt ut me arguerem imprudentiæ, quòd, umbram captando, eatenus perdideram quietem meam, rem prorſus ſubſtantialem.

Sub eo tempore *Jacobus Gregorius*, ex unica quadam ſerie è meis quam D. *Collinius* ad eum tranſmiſerat, poſt multam conſiderationem (ut ad *Collinium* reſcripſit) pervenit ad eandem methodum, & Tractatum de ea reliquit quem ſperamus ab amicis ejus editum iri. Siquidem pro ingenio quo pollebat non potuit non adjicere de ſuo nova multa, quæ rei Mathematicæ intereſt ut non pereant.

Ipſe autem Tractatum meum non penitùs abſolveram, ubi deſtiti à propoſito; neque in hunc diem mens rediit ad reliqua adjicienda. Deerat quippe pars ea qua decreveram explicare modum ſolvendi problemata quæ ad quadraturas reduci nequeunt, licet aliquid de fundamentis ejus poſuiſſem. Cæterum in Tractatu iſto, ſeries infinitæ non magnam partem obtinebant.

Alia

Alia haud pauca congeſſi, inter quæ erat methodus ducendi Tangentes, quam ſolertiſſimus *Sluſius* ante annos duos treſve tecum communicavit; de qua tu (ſuggerente *Collinio*) reſcripſiſti eandem mihi etiam innotuiſſe (d). Diverſa ratione in eam incidimus. Nam res non eget demonſtratione prout ego operor. Habito meo fundamento nemo potuit Tangentes aliter ducere, niſi volens de recta via deviaret.

Quinetiam non hic hæretur ad Æquationes radicalibus unam vel utramque indefinitam quantitatem involventibus utcunque affectas; ſed abſque aliqua talium æquationum reductione (quæ opus plerumque redderet immenſum) Tangens confeſtim ducitur. Et eodem modo ſe res habet in Quæſtionibus de Maximis & Minimis; aliiſque quibuſdam, de quibus jam non loquor.

Fundamentum harum operationum, ſatis obvium quidem, (quoniam jam non poſſum explicationem ejus proſequi,) ſic potiùs celavi (e) *6 a c c d æ 13 e f f 7 i 3 l 9 n 4 o 4 q r r 4 ſ 9 t 12 v x.*

Hoc fundamento conatus ſum etiam reddere ſpeculationes de Quadratura curvarum ſimpliciores; pervenique ad Theoremata quædam generaliora. Et, ut candidè agam, ecce primum Theorema.

Ad curvam aliquam ſit $d z^{\theta} \times \overline{e + f z^{n}}|^{\lambda}$ ordinatim-applicata, termino abſciſſæ ſeu baſis z normaliter inſiſtens: Ubi literæ $d e f$ denotant quaſlibet quantitates datas; & $\theta\ n\ \lambda$ indices poteſtatum ſive dignitatum quantitatum quibus affixæ ſunt. Fac $\frac{\theta + 1}{n} = r$, $\lambda + r = s$, $\frac{d}{nf} \times \overline{e + f z^{n}}|^{\lambda + 1} = Q$, & $r n - n = \pi$: & Area Curvæ erit, Q in $\frac{z^{\pi}}{s} - \frac{r - 1}{s - 1} \times \frac{e A}{f z^{n}} + \frac{r - 2}{s - 2} \times \frac{e B}{f z^{n}} - \frac{r - 3}{s - 3} \times \frac{e C}{f z^{n}} + \frac{r - 4}{s - 4} \times \frac{e D}{f z^{n}}$ &c. literis A B C D &c. denotantibus terminos proximè antecedentes; Nempe A terminum $\frac{z^{\pi}}{s}$, B terminum $- \frac{r - 1}{s - 1} \times \frac{e A}{f z^{n}}$ &c. Hæc ſeries, ubi r fractio eſt vel nume-

(d) Hoc intellexit *Newtonus* ex Epiſtola *Collinii* die 18 Junii 1673 ad ipſum data, cujus hæc ſunt verba, *As to Sluſius's Method of Tangents, it was by him well underſtood, when he published his Book* De Meſolabio; *but he did not then divulge it, becauſe he would not prevent his friend* Riccio, *who afterwards declining Mathematical Studies deſired* Sluſius *to divulge it, who not obtaining leiſure to write of it at large, promiſed to ſend it to Mr.* Oldenburg *to publish in the Tranſactions. Before it arrived, I wrote to you know what you knew of it, and having received your anſwer imparted it to Mr.* Oldenburg *to ſend to* Sluſius *to let him know that it was underſtood in England; tho' perchance not ſo long or ſo ſoon as himſelf had attain'd it.*

(e) Hoc eſt, Data æquatione quotcunque fluentes quantitates involvente, fluxiones invenire, & vice verſa.

rus negativus, continuatur in infinitum; ubi verò r integer eſt & affirmativus, continuatur ad tot terminos tantùm quot ſunt unitates in eodem r; & ſic exhibet Geometricam quadraturam curvæ. Rem exemplis illuſtro.

Exemplum I. Proponatur Parabola, cujus ordinatim-applicata ſit $\sqrt{az}$. Hæc in formam regulæ reducta fit $z^{0} \times \overline{0 + az^{1}}|^{\frac{1}{2}}$. Quare $d = 1$, $\theta = 0$, $e = 0$, $f = a$, $n = 1$, $\lambda = \frac{1}{2}$. Adeoque $r = 1$, $s = 1\frac{1}{2}$, $Q = \frac{1}{a} \times \overline{az}|^{\frac{3}{2}}$, $\pi = 0$. Et Area quæſita $\frac{1}{a} \times \overline{az}|^{\frac{3}{2}}$ in $\frac{1}{1\frac{1}{2}}$; Hoc eſt, $\frac{2}{3} z \sqrt{az}$. Et ſic in genere, ſi cz^{n} ponatur ordinatim-applicata, prodibit Area $\frac{c}{n+1} z^{n+1}$.

Exempl. 2. Sit ordinatim-applicata $\frac{a^{4} z}{c^{4} - 2cczz + z^{4}}$. Hæc per Reductionem fit $a^{4} z \times \overline{cc - zz}|^{-2}$; Vel etiam $a^{4} z^{-3} \times \overline{-1 + ccz^{-2}}|^{-2}$. In priori caſu eſt $d = a^{4}$, $\theta = 1$, $e = cc$, $f = -1$, $n = 2$, $\lambda = -2$. Adeoque $r = 1$, $s = -1$, $Q = \frac{a^{4}}{-2} \times \overline{cc - zz}|^{-1}$, hoc eſt $\frac{-a^{4}}{2cc - 2zz}$, $\pi = 0$. Et Area curvæ Q in $\frac{z^{0}}{-1}$, id eſt $= \frac{a^{4}}{2cc - 2zz}$. In ſecundo autem caſu, eſt $d = a^{4}$, $\theta = -3$, $e = -1$, $f = cc$, $n = -2$, $\lambda = -2$, $r = 1$, $s = -1$, $Q = \frac{a^{4}}{-2cc} \times \overline{-1 + ccz^{-\frac{1}{2}}}|^{-1}$, id eſt $\frac{-a^{4}zz}{2c^{4} - 2cczz}$, $\pi = 0$. Et Area $= Q$ in $\frac{z^{0}}{1}$, hoc eſt $\frac{a^{4}zz}{2c^{4} - 2cczz}$. Area his caſibus diverſimode exhibetur, quatenus computatur à diverſis finibus, quorum aſſignatio, per hos inventos valores arearum, facilis eſt.

Exempl. 3. Sit ordinatim-applicata $\frac{a^{5}}{z^{5}} \sqrt{: bz + zz :}$ hoc eſt, per reductionem ad debitam formam; vel $a^{5} z^{-\frac{9}{2}} \times \overline{b + z}|^{\frac{1}{2}}$; vel $a^{5} z^{-4} \times \overline{1 + bz^{-1}}|^{\frac{1}{2}}$. Et erit, in priori caſu, $d = a^{5}$, $\theta = -\frac{9}{2}$, $e = b$, $f = 1$, $n = 1$, $\lambda = \frac{1}{2}$. Adeoque $r = -\frac{7}{2}$, &c. Quare, cùm r non ſit numerus affirmativus, procedo ad alterum caſum. Hic eſt $d = a^{5}$, $\theta = -4$, $e = 1$, $f = b$, $n = -1$, $\lambda = \frac{1}{2}$. Adeoque $r = 3$, $s = 3\frac{1}{2}$, $Q = \frac{a^{5}}{-b} \times \overline{1 + bz^{-1}}|^{\frac{3}{2}}$, ſeu $-\frac{a^{5}z + a^{5}b}{bzz} \sqrt{zz + bz}$, $\pi = -2$. Et Area, Q in $\frac{z^{-2}}{3\frac{1}{2}} - \frac{2}{2\frac{1}{2}} \times \frac{z^{-1}}{3\frac{1}{2}b} + \frac{1}{1\frac{1}{2}} \times \frac{z}{2\frac{1}{2}} \times \frac{z^{0}}{3\frac{1}{2}bb}$, hoc eſt $= \frac{-30bb + 24bz - 16zz}{105bbzz} \times \frac{a^{5}z + a^{5}b}{bzz} \sqrt{zz + bz}$.

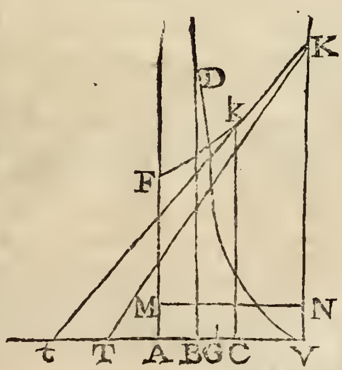
Exem-

Exempl. 4. Sit denique ordinatim - applicata

$$\frac{bz^{\frac{1}{3}}}{\sqrt{5}: c^3 - 3accz^{\frac{2}{3}} + 3aacz^{\frac{4}{3}} - a^3zz}.$$ Hæc ad formam regulæ reducta, fit $bz^{\frac{1}{3}} \times \overline{c - az^{\frac{2}{3}}}|^{-\frac{3}{5}}$. Indeque eſt $d = b$, $\theta = \frac{1}{3}$, $e = c$, $f = -a$, $n = \frac{2}{3}$, $\lambda = -\frac{3}{5}$, $r = 2$, $s = \frac{7}{5}$, $Q = \frac{3b}{-2a} \times \overline{c - az^{\frac{2}{3}}}|^{\frac{2}{5}}$, $\pi = \frac{2}{3}$. Et Area, $Q \times : \frac{5}{7}^{\frac{2}{3}} - \frac{5}{2} \times \frac{5c}{-7a}$, id eſt $-\frac{30abz^{\frac{2}{3}} + 75bc}{28aa} \times \overline{c - az^{\frac{2}{3}}}|^{\frac{2}{5}}$. Quòd ſi res non ſucceſſiſſet in hoc caſu, exiſtente r vel fractione vel numero negativo; tunc tentaſſem alterum caſum, purgando terminum $-az^{\frac{2}{3}}$ in ordinatim - applicata à coefficiente $z^{\frac{2}{3}}$; hoc eſt reducendo ordinatim - applicatam ad hanc formam, $bz^{-\frac{1}{15}} \times \overline{-a + cz^{-\frac{2}{3}}}|^{-\frac{3}{5}}$. Et ſi r in neutro caſu fuiſſet numerus integer & affirmativus, concluſiſſem curvam ex earum numero eſſe quæ non poſſunt Geometricè quadrari. Nam, quantum animadverto, hæc Regula exhibet in infinitis Æquationibus Areas omnium Geometricam quadraturam admittentium curvarum, quarum ordinatim - applicatæ conſtant ex poteſtatibus, radicibus, vel quibuslibet dignitatibus Binomii cujuſcunque: licèt non directè, ubi index dignitatis eſt numerus integer.

At, quando hujuſmodi curva aliqua non poteſt Geometricè quadrari; ſunt ad manus alia Theoremata pro comparatione ejus cum conicis ſectionibus, vel ſaltem cum aliis figuris ſimpliciſſimis quibuſcum poteſt comparari: Ad quod ſufficit etiam hoc ipſum unicum jam deſcriptum Theorema, ſi debitè concinnetur.

Pro Trinomiis etiam, & aliis quibuſdam, Regulas quaſdam concinnavi. Sed in ſimplicioribus vulgoque celebratis figuris vix aliquid relatu dignum reperi, quod evaſit aliorum conatus; niſi forte longitudo Ciſſoidis ejuſmodi cenſeatur. Ea ſic conſtruitur.



Sit V D Ciſſois, A V Diameter circuli ad quem aptatur, V Vertex, A F Aſymptota ejus, ac D B perpendiculare quodvis ad AV demiſſum. Cum ſemi-axe AF = AV, & ſemi-parametro A G = $\frac{1}{3}$ A V, deſcribatur Hyperbola F k K; & inter A B & AV ſumpta A C media proportionali, erigantur ad C & V perpendicula C k V K hyperbolæ occurrentia in k & K; Et agantur rectæ K T k t tangentes hyperbolam in eiſdem K & k, & occurrentes A V in T & t; Et ad A V conſtituatur rectangulum A V N M æquale ſpa-

tio

tio TKkt. Et Ciſſoidis VD longitudo erit ſextupla altitudinis VN. Demonſtratio perbrevis eſt. Sed ad infinitas ſeries redeo.

Quamvis multa reſtent inveſtiganda circa modos approximandi, & diverſa ſerierum genera quæ poſſunt ad id conducere: Tamen vix cum D. *Tſchirnhauſio* ſperaverim dari poſſe aut ſimpliciora aut magis generalia fundamenta reducendi quantitates ad hoc genus ſerierum, de quo agimus, quàm ſunt diviſiones & extractiones radicum, quibus *Leibnitius* & ego utimur: ſaltem non generaliora; quia pro quadratura & εὐθυνώσει curvarum ac ſimilibus, nullæ poſſunt dari ſeries ex hiſce ſimplicibus terminis Algebraicis (unicam tantùm indefinitam quantitatem involventibus) conſtantes, quas non licet hac methodo colligere.

Nam non poſſunt eſſe plures convergentes ſeries ad idem determinandum, quàm ſunt indefinitæ quantitates, ex quarum poteſtatibus ſeries conflentur: & ego quidem ex adhibita quacunque indefinita quantitate ſeriem novi colligere; & idem credo *Leibnitio* in poteſtate eſſe.

Nam quamvis mea methodo liberum ſit eligere, pro conflanda ſerie, quantitatem quamlibet indefinitam, à qua quæſitum dependeat; & methodus, quam ipſe nobiſcum communicavit, determinata videatur ad electionem talium indefinitarum quantitatum quibus opus commodè deduci poteſt ad fractiones; quæ per ſolam diviſionem evadant ſeries infinitæ: tamen aliæ quæcunque indefinitæ quantitates pro ſeriebus conflandis adhiberi poſſunt per methodum iſtam, qua affectæ Æquationes reſolvuntur, dummodo reſolvantur in propriis terminis; hoc eſt, conficiendo ſeriem ex ſolis terminis quos æquatio involvit.

Præterea, non video cur dicatur his diviſionibus & extractionibus problemata reſolvi per accidens: Siquidem hæ operationes eodem modo ſe habeant ad hoc genus Algebræ, ac vulgares operationes Arithmeticæ ad Algebram vulgò notam.

Quod autem ad ſimplicitatem methodi attinet; nolim fractiones & radicales abſque prævia reductione ſemper reſolvi in ſeries infinitas: Sed, ubi perplexæ quantitates occurrunt, tentandæ ſunt omnimodæ reductiones; ſive fiat augendo, minuendo, multiplicando, vel dividendo quantitates indefinitas; ſive per methodum tranſmutatoriam *Leibnitii*, aut alio quocunque modo qui occurrat. Et tunc reſolutio in ſeries per diviſionem & extractionem opportunè adhibebitur.

Hic autem præcipuè nitendum eſt, ut denominatores fractionum, & quantitates in vinculo radicum, reducantur ad quàm pauciſſimas & minimè compoſitas; & ad tales etiam quæ in ſeriem abeunt citiſſimè convergentem, etſi radices neque convertantur in fractiones neque deprimantur. Nam, per regulam initio alterius Epiſtolæ, extractio altiſſimarum radicum æquè ſimplex & facilis eſt ac Extractio radicis quadraticæ, vel diviſio: &, ſeries quæ per diviſionem eliciuntur, ſolent minimè omnium convergere.

Hactenus

Hactenus de ſeriebus unicam indefinitam quantitatem involventibus locutus ſum. Sed poſſunt etiam perſpecta Methodo ſeries ex duabus vel pluribus aſſignatis indefinitis quantitatibus pro arbitrio confici. Quinetiam beneficio ejuſdem methodi poſſunt ſeries ad omnes figuras efformari *Gregorianis* ad circulum & hyperbolam editis affines; hoc eſt, quarum ultimus terminus exhibebit quæſitam Aream. Sed calculum hic oneroſiorem nolim lubens ſubire.

Poſſunt denique ſeries ex terminis compoſitis eadem methodo conſtitui. Quemadmodum, ſi ſit $\sqrt{:aa - ax + \frac{x^3}{a}}$: Ordinatim-applicata curvæ alicujus; pono $aa - ax = zz$, & ex Binomio $zz + \frac{x^3}{a}$ extracta radice, prodibit $z + \frac{x^3}{2az} - \frac{x^6}{8aaz^3}$ &c. Cujus ſeriei omnes termini quadrari poſſunt per Theorema jam antè deſcriptum. Sed hæc minoris facio, quod ubi ſeries ſimplices non ſunt ſatis tractabiles, aliam nondum communicatam methodum habeo qua pro libitu acceditur ad quæſitum.

Ejus fundamentum eſt, commoda, expedita, generalis ſolutio hujus Problematis, *Curvam Geometricam deſcribere quæ per data quotcunque Puncta tranſibit.*

Docuit *Euclides* deſcriptionem circuli per tria data puncta. Poteſt etiam Conica Sectio deſcribi per quinque data puncta: Et curva trium dimenſionum per ſeptem data puncta; (adeo ut in poteſtate habeam deſcriptionem omnium curvarum iſtius ordinis, quæ per ſeptem tantùm puncta determinantur.) Hæc ſtatim Geometricè fiunt nullo Calculo interpoſito. Sed ſuperius Problema eſt alterius generis: Et quamvis prima fronte intractabile videatur; tamen res aliter ſe habet. Eſt enim ferè ex pulcherrimis quæ ſolvere deſiderem.

Seriei à D. *Leibnitio* pro quadratura Conicarum Sectionum propoſitæ, affinia ſunt Theoremata quædam, quæ pro comparatione curvarum cum Conicis Sectionibus in catalogum dudum retuli.

Poſſum utique cum Sectionibus Conicis Geometricè comparare curvas omnes (numero infinities infinitas,) quarum ordinatim-applicatæ ſunt

$$\frac{dz^{n-1}}{e + fz^n + gz^{2n}} \text{ vel } \frac{dz^{2n-1}}{e + fz^n + gz^{2n}} \text{ \&c.}$$

$$\text{Aut } \frac{dz^{\frac{1}{2}n-1}}{e + fz^n + gz^{2n}} \text{ vel } \frac{dz^{\frac{3}{2}n-1}}{e + fz^n + gz^{2n}} \text{ \&c.}$$

$$\text{Aut } \frac{d}{z}\sqrt{:e+fz^n+gz^{2n}:} \text{ vel } dz^{n-1}\times\sqrt{:e+fz^n+gz^{2n}:} \text{ \&c.}$$

$$\text{Aut } \frac{dz^{n-1}}{\sqrt{:e+fz^n+gz^{2n}}} \text{ vel } \frac{dz^{2n-1}}{\sqrt{:e+fz^n+gz^{2n}}} \text{ \&c.}$$

$$\text{Aut } \frac{dz^{n-1}\times\sqrt{e+fz^n}}{g+hz^n} \text{ vel } \frac{dz^{2n-1}\times\sqrt{e+fz^n}}{g+hz^n} \text{ \&c.}$$

$$\text{Aut } \frac{dz^{n-1}}{g+hz^n\times\sqrt{e+fz^n}} \text{ vel } \frac{dz^{2n-1}}{g+hz^n\times\sqrt{e+fz^n}} \text{ \&c.}$$

$$\text{Aut } \frac{d}{z}\sqrt{\frac{e+fz^n}{g+hz^n}} \text{ vel } dz^{n-1}\times\sqrt{\frac{e+fz^n}{g+hz^n}} \text{ \&c.}$$

Hic $d\,e\,f\,g$ ſignificant quaſvis datas quantitates cum ſuis ſignis + & — affectas; z, axem vel baſem curvæ; & n, $2n$, $\frac{1}{2}n-1$, $\frac{3}{2}n-1$, $n-1$, $2n-1$, Indices poteſtatum vel dignitatum z, ſive ſint affirmativi ſive negativi, ſive integri vel fracti; Et ſingula bina Theoremata ſunt duo primi termini ſeriei in infinitum progredientis. In tertio & quarto, $4\,e\,g$ debet eſſe non majus quàm ff niſi e & g ſint contrarii ſigni. In cæteris nulla eſt limitatio. Horum aliqua (nempe, ſecundum, tertium, quartum, quintum, & decimum tertium) ex Areis duarum Conicarum Sectionum conjunctis conſtant. Alia quædam (ut nonum, decimum, & duodecimum) ſunt aliter ſatis compoſita. Et omnia quidem in continuatione progreſſionum citò evadunt compoſitiſſima; adeo ut vix per tranſmutationem figurarum, quibus *Jacobus Gregorius* & alii uſi ſunt, abſque alio fundamento inveniri poſſe putem.

Ego quidem haud quicquam generale in his obtinere potui antequàm abſtraherem à contemplatione Figurarum, & rem totam ad ſimplicem conſiderationem ſolarum ordinatim-applicatarum reducerem. Sed, cùm hæc, & hiſce generaliora, ſint in poteſtate; non dubitabitur, credo, de Binomialibus longè facilioribus quæ in his continentur, & prodeunt ponendo literam aliquam e vel f vel g, $=0$; & $n=1$ vel 2; etſi ſeries, in quas iſta reſolvantur, non poſuerim in Epiſtola priori; nedum fortè computaverim; intentus, non in omnia particularia enumeranda, ſed in illuſtrandam Methodum per unam & alteram in ſingulis rerum generibus inſtantiam, quæ ad oſtendendam ejus generalitatem ſufficere videbatur.

Cæterum hæc Theoremata dant Series pluſquàm uno modo. Nam primùm ſi ponatur $f=0$, & $n=1$, evadit $\frac{d}{e+gzz}$; unde prodit ſeries nobis communicata. Sed ſi ponatur $2\,e\,g=ff$, & $n=1$, inde tandem

dem obtinemus hanc ſeriem $1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{13} - \frac{1}{15}$ &c. pro longitudine Quadrantalis Arcus, cujus chorda eſt unitas: vel, quod perinde eſt, hanc $\frac{1}{2} + \frac{1}{15} - \frac{1}{63} + \frac{1}{143} - \frac{1}{255}$ &c. pro longitudine dimidii ejus. Et has fortè, quia æquè ſimplices ſunt ac alteræ, & magis convergunt, non repudiabitis.

Sed ego rem aliter æſtimo. Illud enim melius quod utilius eſt, & Problema minori labore ſolvit. Sic, quamvis hæc æquatio $x^3 - x = 1$, appareat ſimplicior hacce $yy - 2y\sqrt{\overline{\tfrac{81}{25} - \sqrt{20}}} = \sqrt{20}$; tamen in confeſſo eſt poſteriorem revera ſimpliciorem eſſe, propterea quòd radicem ejus y Geometra faciliùs eruit.

Et ob hanc rationem ſeries pro obtinendis arcubus circuli; vel (quod eodem recidit) pro obtinendis ſectoribus Conicarum Sectionum, pro optimis habeo quæ componuntur ex poteſtatibus Sinuum.

Nam ſiquis vellet per ſimplex computum hujus Seriei $1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} +$ &c. colligere longitudinem quadrantis ad viginti figurarum loca decimalia, opus eſſet 5 000 000 000 terminis ſeriei circiter; ad quorum calculum milleni anni requirerentur. Et res tardiùs obtineretur per Tangentem 45 graduum. Sed, adhibito Sinu recto 45 graduum, quinquaginta quinque vel ſexaginta termini hujus ſeriei $\sqrt{\tfrac{1}{2}} \times \overline{1 + \tfrac{1}{12} + \tfrac{3}{160} + \tfrac{5}{896}}$ &c. ſufficerent: Quorum computatio tribus, ut opinor, vel quatuor diebus abſolvi poſſet.

Et tamen hic non eſt optimus modus computandi totam Peripheriam. Nam ſeries ex ſinu recto 30 graduum vel ſinu verſo 60 graduum conflata, multo citiùs dabit arcum ſuum; cujus ſextuplum vel duodecuplum eſt tota Peripheria. Neque majori labore eruitur area totius circuli ex ſegmento cujus ſagitta eſt quadrans diametri. Ejus computi ſpecimen, ſiquidem ad manus eſt, viſum fuit apponere; & una adjungere aream hyperbolæ; quæ eodem calculo prodit.

Poſito Axe tranſverſo $= 1$, & ſinu verſo ſeu ſegmenti ſagitta $= x$; erit ſemi-ſegmentum $\left.\begin{matrix}\text{Hyperbolæ}\\ \text{circuli}\end{matrix}\right\} = x^{\frac{1}{2}}$ in: $\overline{\tfrac{2}{3}x \pm \frac{xx}{5} - \frac{x^3}{28} \pm \frac{x^4}{72}}$ &c. Hæc autem ſeries ſic in infinitum producitur, ſit $2x^{\frac{3}{2}} = a$. $\frac{ax}{2} = b$. $\frac{bx}{4} = c$. $\frac{3cx}{6} = d$. $\frac{5dx}{8} = e$. $\frac{7ex}{10} = f$. &c. Et erit Semi ſegmentum $\left.\begin{matrix}\text{Hyperbolæ}\\ \text{circuli}\end{matrix}\right\}$ $= \frac{a}{3} \pm \frac{b}{5} - \frac{c}{7} \pm \frac{d}{9} - \frac{e}{11} \pm \frac{f}{13}$ &c. Eorumque ſemi-ſumma $\frac{a}{3} - \frac{c}{7} - \frac{e}{11} -$ &c. & ſemi-differentia $\frac{b}{5} + \frac{d}{9} + \frac{f}{13} +$ &c. His ita præparatis, ſuppono $x = \frac{1}{4}$, quadrantem nempe Axis; & prodit $a\ (= \frac{1}{4})$

$= 0.25$; $b\left(=\frac{ax}{2}=\frac{0.25}{1\times 8}\right)=0.03125$: $c\left(=\frac{bx}{4}=\frac{0.03125}{2\times 8}\right)$ $=0.001953125$: $d\left(=\frac{3cx}{6}=\frac{0.001953125}{8}\right)=0.000244140625$. Et ſic procedo uſque dum venero ad terminum depreſſiſſimum, qui poteſt ingredi opus. Deinde hos terminos per 3, 5, 7, 9, 11, &c. reſpectivè diviſos, diſpono in duas Tabulas: Ambiguos, cum primo, in unam; & Negativos in aliam; & addo ut hic vides,

0.0833333333333333	0.0002790178571429
625000000000000	3467906605 1
27126736 1111	834465027
5135169396	26285354
144628917	961296
4954581	38676
190948	1663
7963	75
352	4
16	0.0002825719389575
1	
0.0896109885646618	

Tunc à priori ſumma aufero poſteriorem, & reſtat 0.0893284166257043 Area ſemi-ſegmenti hyperbolici. Addo etiam eas ſummas, & aggregatum aufero à primo termino duplicato 0.1666666666666666, & reſtat 0.0767731061630473 Area ſemi-ſegmenti circularis. Huic addo Triangulum iſtud quo completur in ſectorem, hoc eſt $\frac{1}{32}\sqrt{3}$, ſeu 0.0541265877365274, & habeo Sectorem ſexaginta graduum, 0.1308996938995747 cujus ſextuplum 0.7853981633974482 eſt Area totius circuli: Quæ diviſa per $\frac{1}{4}$, quadrantem diametri, dat totam Peripheriam 3.1415926535897928. Si alias artes adhibuiſſem, potui per eundem numerum terminorum ſeriei perveniſſe ad multo plura loca figurarum, puta viginti quinque aut ampliùs: Sed animus fuit hic oſtendere, quid per ſimplex ſeriei computum præſtari poſſet. Quod ſanè haud difficile eſt, cùm in omni opere multiplicatores, ac diviſores magna ex parte non majores quàm 11, & nunquam majores quàm 41, adhibere opus ſit.

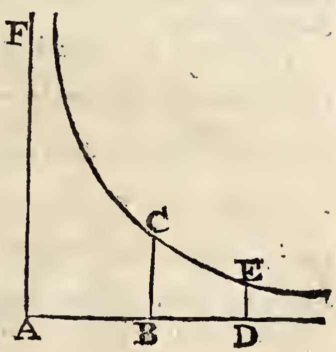
Per ſeriem *Leibnitii*, etiam ſi ultimo loco dimidium termini adjiciatur, & alia quædam ſimilia artificia adhibeantur, poteſt computum produci ad multas figuras. Ut &, ponendo ſummam terminorum $1-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{15}+\frac{1}{17}-\frac{1}{23}+\frac{1}{25}-\frac{1}{31}+\frac{1}{33}$ &c. eſſe ad totam ſeriem $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}$,

$+ \frac{1}{9} - \frac{1}{11} +$ &c. ut $1 + \sqrt{2}$ ad 2. Sed optimus ejus uſus videtur eſſe, quando vel conjungitur cum duabus aliis perſimilibus & citiſſimè convergentibus ſeriebus, vel ſola adhibetur ad computandum arcum 30 graduum, poſitâ Tangente $\sqrt{\frac{1}{3}}$. Tunc enim ſeries illa evadit $1 - \frac{1}{3 \times 3} + \frac{1}{5 \times 9} - \frac{1}{7 \times 27} + \frac{1}{9 \times 81}$ &c. quæ citò convergit. Vel, ſi conjunges cum aliis ſeriebus, pone circuli Diametrum $= 1$, & $a = \frac{1}{2}$; & area totius circuli erit $\frac{a}{1} - \frac{a^3}{3} + \frac{a^5}{5} - \frac{a^7}{7} +$ &c. $+ \frac{aa}{1} + \frac{a^5}{3} - \frac{a^8}{5} - \frac{a^{11}}{7} + \frac{a^{14}}{9} + \frac{a^{17}}{11} -$ &c. $+ \frac{a^4}{1} - \frac{a^{10}}{3} + \frac{a^{16}}{5} - \frac{a^{22}}{7} + \frac{a^{28}}{9}$ &c.

Hic conſideravimus ſeries quatenus adhibentur ad computandum totum circulum. Sed quando computandæ ſunt partes ejus, tunc quælibet ſeries habet proprium uſum, & in ſuo genere optima eſt. Si datur Tangens ſatis parva, vel ſatis magna; non recurrendum erit ad Sinum aliquem ut inde computetur Arcus, neque vice verſa. Series dato congruens eſt æquatio pro ſolvendo proprio Problemate.

Credo Cl. *Leibnitium*, dum poſuit ſeriem pro determinatione Co-ſinus ex Arcu dato, vix animadvertiſſe ſeriem meam pro determinatione Sinus verſi ex eodem arcu; ſiquidem hæc idem ſunt.

Neque obſervaſſe videtur morem meum generaliter uſurpandi literas pro quantitatibus cum ſignis ſuis + & — affectis, dum dividit hanc ſeriem $\frac{z}{b} + \frac{zz}{2abb} + \frac{z^3}{6aab^3} + \frac{z^4}{24a^3b^4}$ &c. Nam cum Area hyperbolica BE hic ſignificata per z ſit affirmativa vel negativa, prout jaceat ex una vel altera parte ordinatim-applicatæ BC; ſi area illa in numeris data ſit l, & l ſubſtituatur in ſerie pro z, orietur vel $\frac{l}{b} + \frac{ll}{2abb} + \frac{l^3}{6aab^3} + \frac{l^4}{24a^3b^4}$ &c. vel $-\frac{l}{b} + \frac{ll}{2abb} - \frac{l^3}{6aab^3} + \frac{l^4}{24a^3b^4}$ &c; prout l ſit affirmativa vel negativa. Hoc eſt, poſito $a = 1 = b$, & l logarithmo Hyperbolico; numerus ei correſpondens erit $1 + \frac{l}{1} + \frac{ll}{2} + \frac{l^3}{6} + \frac{l^4}{24}$ &c. ſi l ſit affirmativus; & $1 - \frac{l}{1} + \frac{ll}{2} - \frac{l^3}{6} + \frac{l^4}{24}$ &c. ſi l



I 3. ſit.

ſit negativus. Hoc modo fugio multiplicationem Theorematum; quæ alias in nimiam molem creſcerent. Nam v. g. illud unicum Theorema, quod ſuprà poſui pro quadratura curvarum, reſolvendum eſſet in 32 Theoremata, ſi pro ſignorum varietate multiplicaretur.

Præterea, quæ habet Vir clariſſimus de Inventione Numeri unitate majoris per datum Logarithmum hyperbolicum ope ſeriei $\frac{l}{1} - \frac{ll}{1 \times 2} + \frac{l^3}{1 \times 2 \times 3} - \frac{l^4}{1 \times 2 \times 3 \times 4}$ + &c. potiùs quàm ope Seriei $\frac{l}{1} + \frac{ll}{1 \times 2} + \frac{l^3}{1 \times 2 \times 3} + \frac{l^4}{1 \times 2 \times 3 \times 4}$ &c. nondum percipio. Nam ſi unus terminus adjiciatur ampliùs ad Seriem poſteriorem quàm ad priorem, poſterior magis appropinquabit. Et certè minor eſt labor computare unam vel duas primas figuras adjecti hujus termini, quàm dividere unitatem per prodeuntem Logarithmum hyperbolicum ad multa figurarum loca extenſum, ut inde habeatur Logarithmus hyperbolicus quæſitus. Utraque igitur ſeries (ſi duas dicere fas ſit) officio ſuo fungatur. Poteſt tamen $\frac{l}{1} + \frac{l^3}{1 \times 2 \times 3} + \frac{l^5}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5}$ &c. ſeries, ex dimidia parte terminorum conſtans, optimè adhiberi; ſiquidem hæc dabit ſemi-differentiam duorum numerorum, ex qua & rectangulo dato uterque datur. Sic & ex Serie $1 + \frac{ll}{1 \times 2} + \frac{l^4}{1 \times 2 \times 3 \times 4}$ &c. datur ſemi-ſumma numerorum, indeque etiam Numeri. Unde prodit relatio ſerierum inter ſe, qua ex una data dabitur altera.

Theorema de Inventione Arcus ex dato Co-ſinu, ponendo radium 1, Co-ſinum c, & arcum $\sqrt{6 - \sqrt{24c + 12}}$, minus appropinquat quàm prima fronte videtur. Poſito quidem ſinu verſo v, error erit $\frac{v^3}{90} + \frac{v^4}{194}$ + &c. Poteſt fieri ut $120 - 27v$ ad $120 - 17v$, ita Chorda ($\sqrt{2v}$) ad Arcum; & error erit tantùm $\frac{61 v^3 \sqrt{2v}}{44800}$ circiter; qui ſemper minor eſt quàm $5\frac{1}{4}$ minuta ſecunda, dum arcus non ſit major quàm 45 grad. Et ſingulis etiam biſectionibus diminuitur 128 vicibus.

Series $\frac{a^3}{1 \times 2 \times 3} - \frac{a^5}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5} + \frac{a^7}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7}$ &c. applicari poſſet ad computationem tabulæ ſegmentorum, ut obſervat Vir clariſſimus. Sed res optimè abſolvitur per Canonem Sinuum. Utpote cogni-

cognita Quadrantis Area, per continuam Additionem nonæ partis ejus habebis Sectores ad ſingulos decem gradus in ſemicirculo: Deinde per continuam Additionem decimæ partis partis hujus, habebis Sectores ad gradus; Et ſic ad decimas partes graduum & ultra procedi poteſt. Tunc, radio exiſtente 1, ab uno quoque Sectore & ejus complemento ad 180 gradus, aufer dimidium communis Sinus recti, & relinquentur ſegmenta in Tabulam referenda. [NB. eodem modo *Leibnitius* colligit ſeriem $\frac{a^3}{1\times2\times3} - \frac{a^5}{1\times2\times3\times4\times5} + \&c.$] Cæterùm quamvis Series hîc non proſint, in aliis tamen locum obtinent. Et quoniam hoc ad earum uſum ſpectat, non gravabor in aliquibus attingere.

Conſtructionem Logarithmorum non aliunde peti debere, credetis fortè ex hoc ſimplici proceſſu, qui ab iſtis pendet. Per methodum ſuprà traditam quærantur Logarithmi hyperbolici numerorum 10, 0.98, 0.99, 1.01, 1.02: id quod fit ſpatio unius & alterius horæ. Dein diviſis Logarithmis quatuor poſteriorum per Logarithmum numeri 10, & addito Indice 2, prodibunt veri Logarithmi numerorum 98, 99, 100, 101, 102, in Tabulam referendi. Hi per dena intervalla interpolandi ſunt, & exibunt Logarithmi omnium Numerorum inter 980 & 1020: Et omnibus inter 980 & 1000 iterum per dena intervalla interpolatis, habebitur Tabula eatenus conſtructa. Tunc ex his colligendi erunt Logarithmi omnium primorum numerorum & eorum multiplicium minorum quàm 100: Ad quod nihil requiritur præter Additionem & Subtractionem. Siquidem ſit

$$\sqrt{^{10}\frac{9984\times1020}{9945}} = 2.\ \sqrt{^{4}\frac{8\times9963}{984}} = 3.\ \tfrac{10}{2} = 5.\ \sqrt{\frac{98}{2}} = 7.\ \frac{99}{9} = 11.$$

$$\frac{1001}{7\times11} = 13.\ \frac{102}{6} = 17.\ \frac{988}{4\times13} = 19.\ \frac{9936}{16\times27} = 23.\ \frac{986}{2\times17} = 29.\ \frac{992}{32} = 31.$$

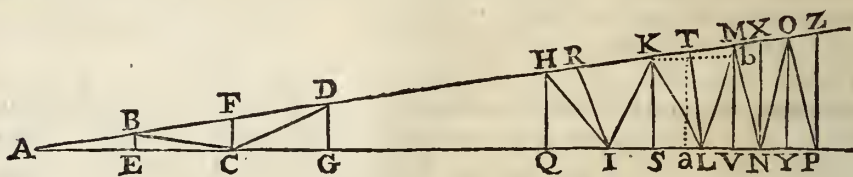
$$\frac{999}{27} = 37.\ \frac{984}{24} = 41.\ \frac{989}{23} = 43.\ \frac{987}{27} = 47.\ \frac{9911}{11\times17} = 53.\ \frac{9971}{13\times13} = 59.$$

$$\frac{9882}{2\times81} = 61.\ \frac{9849}{3\times49} = 67.\ \frac{994}{14} = 71.\ \frac{9928}{8\times17} = 73.\ \frac{9954}{7\times18} = 79.\ \frac{996}{12} = 83.$$

$\frac{9968}{7\times16} = 89.\ \frac{9894}{6\times17} = 97.$ Et habitis ſic Logarithmis omnium numerorum minorum quàm 100, reſtat tantùm hos etiam ſemel atque iterum per dena intervalla interpolare.

Conſtructionis Tabulæ Sinuum, à qua pendet tota res Trigonometrica, fundamentum optimum eſt continua Additio dati Anguli ad ſeipſum vel ad

ad alium datum. Utpote in Angulo addendo B A E; inſcribantur HI, IK, KL, LM, MN, NO, OP, &c. æquales radio AB: & ad oppoſita latera demittantur perpendiculares BE, HQ, IR, KS, LT, MV, NX, OY, &c. Et Angulorum HIQ, IKH, KLI, LMK, &c. differentiæ erunt Angulus A; Sinus HQ, IR, KS, &c; & Co-ſinus IQ, KR, LS, &c. Detur jam aliquis eorum LMK, & cæteri ſic eruentur. Ad SV & MV demitte perpendicula Ta & Kb; & (propter ſimilia triangula ABE, TLa, KMb, ALT, AMV, &c.) erit AB. BE :: TL. La ($=\frac{SL-LV}{2}$) :: KT ($=\frac{1}{2}$KM). $\frac{1}{2}$Mb ($=\frac{MV-KS}{2}$). Et AB. AE :: KT. Sa ($=\frac{SL+LV}{2}$) :: TL. Ta ($=\frac{KS+MV}{2}$). Unde dantur Sinus & Co-ſinus KS, MV, SL, LV.



Et ſimul patet ratio continuandi progreſſiones. Nempe AB. 2AE :: LV. TM + MX :: MX. VN + NY &c. :: MV. TL + XN :: XN. MV + OY &c. Vel AB. 2BE :: LV. XN — TL :: MV. TM — MX :: MX. OY — MV :: XN. VN — NY &c. Et retrò AB. 2AE :: LS. KT + RK &c. Pone ergo AB = 1, & fac BE × TL = La. AE × KT = Sa. Sa — La = LV. 2AE × LV — TM = MX &c. Sed nodus eſt, inventio Sinûs & Co-ſinûs Anguli A. Et hìc ſubveniunt ſeries noſtræ. Utpote cognita ex ſuperioribus Quadrantalis Arcûs longitudine 1.57079 &c; & ſimul Quadrato ejus 2.4694 &c; Divide quadratum hoc per quadratum numeri exprimentis rationem 90 graduum ad Angulum A: Et, Quoto dicto z, tres vel quatuor termini hujus ſeriei $1-\frac{z}{2}+\frac{zz}{24}-\frac{z^3}{720}+\frac{z^4}{40320}$ &c. dabunt Co-ſinum iſtius anguli A. Sic primò quæri poteſt Angulus 5 graduum, & inde Tabula computari ad quinos gradus; ac deinde interpolari ad Gradus vel dimidios gradus, per eandem methodum. Nam non convenit progredi per nimios ſaltus. Duæ tertiæ partes Tabulæ ſic computatæ, dant reliquam tertiam partem, per Additionem vel Sub-

Subtractionem more noto. Siquidem poſito KT Co-ſinu 60 graduum; ſit AE = SV, & BE = Mb. Tunc ad decimas & centeſimas partes graduum pergendum eſt per aliam methodum; ſubſtitutis tamen priùs Logarithmis Sinuum inventorum, ſi ejus generis Tabula deſideretur.

Ad computum Tabularum Aſtronomicarum *Kepleri*, poſui fundamentum aliquod in altera Epiſtola. Ejus Seriei tres primi termini & aliquando duo ſufficiunt. Sed ad diverſas partes Ellipſeos, diverſæ ejuſmodi ſeries aptari debent. Vel potiùs tales ſeries computandæ ſunt, quæ ex data Area ſectoris elliptici BGE immediatè exhibeant aream ſectoris circuli, cujus angulus eſt BEG, radius CB. Et habitis hiſce, computum earum ad duos, tres, aut fortè quatuor terminos, beneficio Logarithmorum, haud gravius erit quàm ſolita Reſolutio tot Triangulorum in aliis Hypotheſibus: Imò fortè minùs grave, ſi ſeries prius debitè concinnentur; ſiquidem unus Logarithmus è Tabula petitus determinet omnes iſtos terminos, addendo ipſum & ejus multiplices, ad Logarithmos datarum coefficientium in promptu habitos.

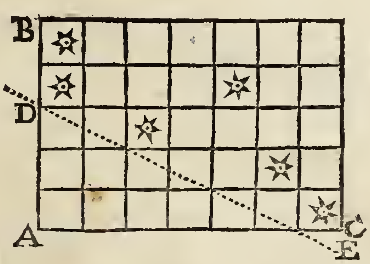
Quæ de hoc genere Tabularum dicuntur, ad alias transferri poſſunt, ubi ratiocinia Geometrica locum non obtinent. Sufficit autem per has Series computare triginta, vel viginti, aut fortè pauciores terminos Tabulæ in debitis diſtantiis; ſiquidem termini intermedii facilè interſeruntur per Methodum quandam, quam in uſum Calculatorum ferè hic deſcripſiſſem. Sed pergo ad alia.

Quæ Cl. *Leibnitius* à me deſiderat explicanda; ex parte ſuprà deſcripſi. Quod verò attinet ad Inventionem terminorum p, q, r, in extractione radicis affectæ: primum p ſic eruo. Deſcripto angulo recto BAC, latera ejus BA CA divido in partes æquales; & inde normales erigo

Fig. 1.

B	x^4	$x^4 y$	$x^4 yy$	$x^4 y^3$	$x^4 y^4$
	x^3	$x^3 y$	$x^3 yy$	$x^3 y^3$	$x^3 y^4$
	x^2	$x^2 y$	$x^2 yy$	$x^2 y^3$	$x^2 y^4$
	x	xy	xyy	xy^3	xy^4
A	o	y	yy	y^3	y^4 C

Fig. 2.



diſtribuentes angulare ſpatium in æqualia parallelogramma vel quadrata, quæ concipio denominata eſſe à dimenſionibus duarum indefinitarum ſpecierum, puta x & y, regulariter aſcendentium à termino A; prout vides in Fig. 1. inſcriptas. Ubi y denotat Radicem extrahendam; & x alteram inde-

indefinitam quantitatem, ex cujus poteſtatibus ſeries conficienda eſt. Deinde, cùm Æquatio aliqua proponitur, parallelogramma ſingulis ejus terminis correſpondentia inſignio nota aliqua; Et Regulâ ad duo vel fortè plura ex inſignitis parallelogrammis applicatâ, quorum unum ſit humillimum in columna ſiniſtra juxta A B, & alia ad Regulam dextrorſum ſita, cæteraque omnia non contingentia Regulam ſupra eam jaceant; Seligo terminos Æquationis per parallelogramma contingentia Regulam deſignatos, & inde quæro quantitatem Quotienti addendam.

Sic ad extrahendam Radicem y, ex $y^6 - 5xy^5 + \frac{x^3}{a}y^4 - 7a^2x^2y^2 + 6a^3x^3 + bbx^4 = 0$; parallelogramma hujus terminis reſpondentia ſigno nota aliqua *; ut vides in Fig. 2. Dein applico regulam D E ad inferiorem è locis ſignatis in ſiniſtra columna; eamque ab inferioribus ad ſuperiora dextrorſum gyrare facio, donec alium ſimiliter vel fortè plura è reliquis ſignatis locis cœperit attingere. Videoque loca ſic attacta eſſe $x^3 xxyy$ & y^6. E terminis itaque $y^6 - 7aaxxyy + 6a^3x^3$ tanquam nihilo æqualibus (& inſuper ſi placet reductis ad $v^6 - 7vv + 6 = 0$, ponendo $y = v\sqrt{ax}$,) quæro valorem y, & invenio quadruplicem, $+\sqrt{ax}$, $-\sqrt{ax}$, $+\sqrt{2ax}$, & $-\sqrt{2ax}$, quorum quemlibet pro primo termino Quotientis accipere licet, prout è radicibus quampiam extrahere decretum eſt.

Sic Æquatio $y^3 + axy + aay - x^3 - 2a^3 = 0$, quam reſolvebam in priori Epiſtola, dat $-2a^3 + aay + y^3 = 0$, & inde $y = a$ proximè: Cùm itaque a ſit primus terminus valoris y, pono p pro cæteris omnibus in infinitum, & ſubſtituo $a + p = y$. (Obvenient hic aliquando difficultates nonnullæ; ſed ex iis, credo, D. *Leibnitius* ſe proprio marte extricabit.) Subſequentes verò termini q r s &c. eodem modo ex æquationibus ſecundis, tertiis, cæteriſque eruuntur, quo primus p è prima, ſed cura leviori; quia cæteri valores y ſolent prodire dividendo terminum involventem infimam poteſtatem indefinitæ quantitatis x per coefficientem radicis p q r aut s.

Intellexi credo ex ſuperioribus, Regreſſionem ab Areis curvarum ad lineas rectas, fieri per hanc extractionem radicis affectæ. Sed duo alii ſunt modi quibus idem perficio.

Eorum unus affinis eſt computationibus quibus colligebam approximationes ſub finem alterius Epiſtolæ, & intelligi poteſt per hoc exemplum. Proponatur Æquatio ad Aream hyperbolæ $z = x + \frac{1}{2}xx + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5$ &c. Et partibus ejus multiplicatis in ſe, emerget $zz = x^2 + x^3 + \frac{11}{12}x^4 + \frac{5}{6}x^5$ &c. $z^3 = x^3 + \frac{3}{2}x^4 + \frac{7}{4}x^5$ &c. $z^4 = x^4 + 2x^5$ &c. $z^5 = x^5$ &c. Jam de z aufero $\frac{1}{2}zz$, & reſtat $z - \frac{1}{2}zz = x - \frac{1}{6}x^3 - \frac{5}{24}x^4 - \frac{13}{60}x^5$ &c. Huic addo $\frac{1}{6}z^3$, & fit $z - \frac{1}{2}zz + \frac{1}{6}z^3 = x + \frac{1}{24}x^4 + \frac{3}{40}x^5$ &c. Aufero $\frac{1}{24}z^4$, & reſtat $z - \frac{1}{2}zz + \frac{1}{6}z^3 - \frac{1}{24}z^4 = x - \frac{1}{120}$

$-\frac{1}{120}x^5$ &c. Addo $\frac{1}{120}z^5$, & fit $z - \frac{1}{2}zz + \frac{1}{6}z^3 - \frac{1}{24}z^4 + \frac{1}{120}z^5 = x$ quamproximè; ſive $x = z - \frac{1}{2}zz + \frac{1}{6}z^3 - \frac{1}{24}z^4 + \frac{1}{120}z^5$ &c.

Eodem modo, Series de una indefinita quantitate, in aliam transferri poſſunt. Quemadmodum ſi poſito r radio circuli, x ſinu recto arcûs z, & $x + \frac{x^3}{6rr} + \frac{3x^5}{40r^4} +$ &c. longitudine arcûs iſtius; atque hanc Seriem à Sinu recto ad Tangentem vellem transferre: Quæro longitudinem Tangentis $\frac{rx}{\sqrt{rr - xx}}$, & reduco in infinitam Seriem $x + \frac{x^3}{2rr} + \frac{3x^5}{8 \times 4} +$ &c. Vocetur hæc quantitas, t. Colligo poteſtates ejus $t^3 = x^3 + \frac{3x^5}{2rr}$ &c. $t^5 = x^5 +$ &c. Aufero autem t de z, & reſtat $z - t = -\frac{x^3}{3} - \frac{3x^5}{10}$ — &c. Addo $\frac{1}{3}t^3$, & fit $z - t + \frac{1}{3}t^3 = \frac{1}{5}x^5 +$ &c. Aufero $\frac{1}{5}t^5$, & reſtat $z - t + \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{5}t^5 = 0$ quamproximè. Quare eſt $z = t - \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{5}t^5$ — &c. Sed ſiquis in uſus Trigonometricos me juſſiſſet exhibere expreſſionem Arcûs per Tangentem; eam non hoc circuitu, ſed directa methodo quæſiviſſem.

Per hoc genus computi colliguntur etiam Series ex duabus vel pluribus indefinitis quantitatibus conſtantes; & Radices affectarum Æquationum magna ex parte extrahuntur. Sed ad hunc poſteriorem uſum adhibeo potius methodum in altera Epiſtola deſcriptam tanquam generaliorem, & (Regulis pro Eliſione ſuperfluorum terminorum habitis) paulo magis expeditam.

Pro Regreſſione verò ab Areis ad lineas rectas, & ſimilibus, poſſunt hujuſmodi Theoremata adhiberi.

Theorema 1. Sit $z = ay + byy + cy^3 + dy^4 + ey^5$ &c. Et viciſſim erit $y = \frac{z}{a} - \frac{bzz}{a^3} + \frac{2bb - ac}{a^5}z^3 + \frac{5abc - 5b^3 - aad}{a^7}z^4 + \frac{3a^2c^2 - 21abbc + 6aabd + 14b^4 - a^3e}{a^9}z^5 +$ &c. Exempli gratiâ. Proponatur Æquatio ad Aream hyperbolæ, $z = y - \frac{yy}{2} + \frac{y^3}{3} + \frac{y^4}{4} + \frac{y^5}{5}$ &c. Et ſubſtitutis in Regula 1 pro a, $-\frac{1}{2}$ pro b, $\frac{1}{3}$ pro c, $-\frac{1}{4}$ pro d, & $\frac{1}{5}$ pro e; viciſſim exurgit, $y = z + \frac{1}{2}zz + \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{24}z^4 +$ &c.

Theorema 2. Sit $z = ay + by^3 + cy^5 + dy^7 + ey^9 +$ &c. Et viciſſim erit $y = \frac{z}{a} - \frac{bz^3}{a^4} + \frac{3bb - ac}{a^7}z^5 + \frac{8abc - aad - 12b^3}{a^{10}}z^7$

$+ \frac{55 b^4 - 55 abbc + 10 aabd + 5 aacc - a^3 e}{a^{13}} z^9 + \&c.$ Exempli gratiâ. Proponatur Æquatio ad Arcum circuli, $z = y - \frac{y^3}{6rr} + \frac{3y^5}{40r^4} + \frac{5y^7}{112r^6} + \&c.$ Et ſubſtitutis in Regula 1 pro a, $\frac{1}{6rr}$ pro b, $\frac{3}{40r^4}$ pro c, $\frac{5}{112r^6}$ pro d &c; orietur $y = z - \frac{z^3}{6rr} + \frac{z^5}{120r^4} - \frac{z^7}{5040r^6} + \&c.$

Alterum modum regrediendi ab Areis ad Lineas rectas, celare ſtatui. Ubi dixi, omnia penè Problemata ſolubilia exiſtere; volui de iis præſertim intelligi circa quæ Mathematici ſe hactenus occuparunt, vel ſaltem in quibus Ratiocinia Mathematica locum aliquem obtinere poſſunt. Nam alia ſanè adeo perplexis conditionibus implicata excogitare liceat, ut non ſatis comprehendere valeamus; & multo minus tantarum computationum onus ſuſtinere quod iſta requirerent.

Attamen, ne nimium dixiſſe videar, inverſa de Tangentibus Problemata ſunt in poteſtate, aliaque illis difficiliora. Ad quæ ſolvenda uſus ſum duplici methodo; una concinniori, altera generaliori. Utramque viſum eſt impræſentia literis tranſpoſitis conſignare, ne propter alios idem obtinentes, inſtitutum in aliquibus mutare cogerer. (f) *5 a c c d æ 10 e f f h 12 i 4 l 3 m 10 n 6 o q q r 7 i 11 t 10 v 3 x: 11 a b 3 c d d 10 e æ g 10 i l l 4 m 7 n 6 o 3 p 3 q 6 r 5 ſ 11 t 7 v x, 3 a c æ 4 e g h 6 i 4 l 4 m 5 n 8 o q 4 r 3 ſ 6 t 4 v, a a d d æ e e e e e i i i m m n n o o p r r r s s s s t t u u.*

Inverſum hoc Problema de Tangentibus, quando Tangens inter punctum contactus & axem Figuræ eſt datæ longitudinis, non indiget his methodis. Eſt tamen curva illa mechanica, cujus determinatio pendet ab Area hyperbolæ.

Ejuſdem generis eſt etiam Ploblema, quando pars Axis inter Tangentem & ordinatim-applicatam datur longitudine.

Sed hos caſus vix numeraverim inter ludos naturæ. Nam quando in Triangulo Rectangulo, quod ab illa Axis parte & Tangente ac ordinatim applicata conſtituitur, relatio duorum quorumlibet laterum per æquationem quamlibet definitur, Problema ſolvi poteſt abſque mea Methodo generali: Sed ubi pars Axis ad punctum aliquod poſitione datum terminata ingreditur vinculum; tunc res aliter ſe habere ſolet.

Com-

(f) Hoc eſt, Una methodus conſiſtit in extractione fluentis quantitatis ex æquatione ſimul involvente fluxionem ejus: Altera tantum in aſſumptione ſeriei pro quantitate qualibet incognita, ex qua cætera commodè derivari poſſunt, & in collatione terminorum homologorum æquationis reſultantis, ad eruendos terminos aſſumptæ Seriei. *Walliſii nota.*

Communicatio Reſolutionis affectarum æquationum per Methodum *Leibnitii*, pergrata erit; juxta & Explicatio quomodo ſe gerat, ubi Indices poteſtatum ſunt Fractiones; ut in hac Æquatione $20 + x^{\frac{3}{7}} - x^{\frac{6}{5}} y^{\frac{2}{3}} - y^{\frac{7}{11}} = 0$; aut ſurdæ quantitates, ut in hac, $\overline{x^{\sqrt{2}} + x^{\sqrt{7}}}\Big|^{\sqrt{[3]\frac{2}{3}}} = y$: ubi $\sqrt{2}$ & $\sqrt{7}$ non deſignant coefficientes ipſius x, ſed indices poteſtatum ſeu dignitatum ejus; & $\sqrt{[3]\frac{2}{3}}$ indicem dignitatis binomii $x^{\sqrt{2}} + x^{\sqrt{7}}$. Res, credo, mea methodo patet; aliter deſcripſiſſem.

Sed meta tandem prolixæ huic Epiſtolæ ponenda eſt. Literæ ſanè Excellentiſſimi *Leibnitii* valde dignæ erant, quibus fuſiùs hoc Reſponſum darem. Et volui hac vice copioſior eſſe, quia credidi amœniora tua negotia ſeveriori hoc ſcribendi genere non debere à me crebrò interpellari.

VIII. Epistola D. Collinii, ad D. Newtonum, *Latinè reddita.*

Vir Clariſſime,

ADerat hic D. *Leibnitius* per unam ſeptimanam, in menſe Octobris; in reditu ſuo ad Ducem *Hannoveræ*; cujus literis revocatus erat, in ordine ad quandam Promotionem.

Dum aderat, impertivit mihi ſcripta quorum ſpero me tibi Apographa propediem miſſurum. Allocutus ſum eum de duobus aſſertis D. *Jacobi Gregorii.*

Quorum prius eſt, in literis ſuis, 15. Febr. 1671. viz. » Quod attinet ad methodum meam pro inveniendis radicibus omnium Æquationum: Una ſeries exhibet nonniſi unam radicem. Sed pro quaque radice poſſunt eſſe ſeries numero infinitæ. Eſt autem induſtriæ opus, pro inchoanda ſerie; & judicando, quam illa reſpicit radicem. «

Poſterius eſt, in literis ſuis, 17. Jan. 1672. » Unica (ſaltem optima), Methodus univerſalis, quam hactenus novi, pro inveniendis Radicibus Æquationum, eſt, Series infinita. Poteſt exhiberi una, quæ inſerviat cubicis æquationibus omnibus. Alia, pro omnibus biquadraticis. Alia, pro omnibus ſuperſolidis. Et credo, Tabulas hujuſmodi ſerierum, fore methodum omnium optimam, pro ſublevando tædio, in exquirendo quæſitas Radices.

Dixit *Leibnitius*, ſe poſſe & velle conſilia impertire, pro obtinendis ejuſmodi ſeriebus, abſque ſpecioſa Extractione radicum Æquationum affectarum; modo quis velit laborem illum obire.

Et conſequenter ad hoc, (poſtquàm ego D. *Bakerum* ipſi nominaveram,) literis ejus ad D. *Oldenburgium*, datis Amſtelodami, $\frac{18}{28}$ Novemb. 1676. hæc ſcribit.

» Rogo à me officioſiſſimè Cl. *Newtonum* ſalutes, atque ei ſignifices, » *Hugenium* mihi aſſeveraſſe, captum à ſe aliquoties Experimentum, duorum ſpeculorum planorum metallicorum, quæ, ritè juncta, etiam exhauſto aere in Recipiente non ſunt dilapſa; nec proinde ea de re dubitari debere.

» D. *Collinio* hæc quæſo communica. Dixit ille mihi D. *Bakerum*, doctum admodum & induſtrium apud vos Analyticum, utilibus conſiliis exequendis parem eſſe. Elegi ego unum præ reliquis utile & facile. » Nimirum, Methodus Tangentium à *Sluſio* publicata nondum rei faſtigium tenet. Poteſt aliquid amplius præſtari in eo genere, quod maximi foret uſûs ad omnis generis Problemata: Etiam ad meam (ſine extractionibus æquationum) ad Series reductionem. Nimirum, Poſſet » brevis quædam calculari circa Tangentes Tabula, eouſque continuanda, » donec progreſſio Tabulæ apparet; ut eam ſcilicet quiſque, quouſque » libuerit, ſine calculo continuare poſſit.

TAB. I. » Fundamentum calculi hic exponam; ejuſque ſimul exemplum dabo.

Fig. 4. » In Figura 4, ſit A B vel A 2B æq. x. B C vel 2B 2C ſit y. Quæ » duæ quantitates indeterminatæ. Sint aliæ determinatæ a, b, c, d, e, f. Et » ſit Æquatio exprimens relationem inter x & y talis.

$$» \; a x^2 + b y^2 + c y x + d x + e y + f \text{ æquale } 0.$$

» Quæ æquatio in ſuo gradu (quadratico ſcilicet) generaliſſima eſt; omnibuſque exemplis applicari poteſt pro varia literarum determinatarum » explicatione; cùm etiam ipſi o (ſive nihilo) vel terminis ipſo nihilo minoribus (ſeu negativis) quoque applicari poſſit.

» Jam $\frac{BC}{TB}$ vocetur z. Poſito T C eſſe Tangentem, erit (per methodum tangentium vel *Huddenii* vel *Sluſii*) $-z$ æq. $\frac{2ax + cy + d}{2by + cx + e}$, ut » exponenti ſtatim patebit.

» Verùm id nondum eſt ultimum quod in eo genere fieri poteſt aut » debet. Nam, ex hoc valore ipſius z invento, poteſt tolli alterutra indeterminatarum, x vel y, & inveniri relatio ipſius z ad ſolam remanentem. Tollamus y & quæramus relationem z ad x.

» Tollemus autem y ex inventa Æquatione, ope datæ Æquationis. Nam, » ex data æquatione, fiet y æq. $\frac{-ax^2 - dx - f}{by + cx + e}$. Ponendo (compendii

„ cauſa)

» cauſa) $- a x^2 - d x - f$ æq. p, & $c x + e$ æq. q: Et $2 a x + d - c x z$
» $- e z$ æq. r, & $2 b x - c$ æq. s; habebimus duos ipſius y valores.
» Unum y æq. $\frac{p}{b y + q}$; alterum y æq. $\frac{r}{s}$. Quos duos valores inter ſe æ-
» quando, fiet $p s$ æq. $b r y + q r$. Et, ex hac æquatione, novum ha-
» bebimus valorem y æq. $\frac{p s - q r}{b r}$. Quem æquando præcedenti y æq. $\frac{r}{s}$,
» habebitur æquatio in qua ſublata eſt litera y; nempe $p s^2$ æq. $b r^2 + q r s$.
» Et, in locum literarum p, q, r, s, ſubſtituendo valores aſſumptos, æqua-
» tionemque ordinando; prodibit

$$\left\{ \begin{array}{llllll} 3bc^2 \; x^2z^2 & +6bce \; xz^2 & -12abc \; x^2z & +4ab^2 \; x^2 & +3be^2 \; z^2 & -8abe \\ 4ab^2 & +4b^2d & -\quad c^3 & +3ac^2 & +4b^2f^2 & -4bcdzz \\ & & & & & -3c^2e \\ +4abd & -4bde & +bd^2 & & & \\ +2ace \; x & -ce^2 \; z & +cde \text{ æq. } 0. & & & \\ +2c^2d & -4bcf & +fc^2 & & & \end{array} \right.$$

» Quæ eſt æquatio quæſita, exprimens relationem z ad ſolam x. Quæ no-
» viſſima eſt; neque ab ulla litera ampliùs purgari poteſt.
» Idem optarim fieri in ſequente gradu, aſſumptâ æquatione

$$g x^3 + h y^3 + l x^2 y + m x y^2 + a x^2 + b y^2 + c x y + d x + e y + f \text{ æq. } 0.$$

» Eodemque modo quærendo ipſius z ad x relationem.
» Quod ſi in aliquot gradibus, quouſque commodum, continuaretur;
» haberemus Tabulam Tangentium analyticam, uſûs maximi, tum ad alia
» multa, tum ad meam Æquationum per ſeries reſolutionem.
» Rectiùs initio ſcripſiſſem $a + b x + c y + d x y + e x^2 + f y^2 + f = 0$;
» ut, ſervato eodem ordine, poſtea pergi poſſit in ſequente gradu ad hanc
» formam,

$$a + b x + c y + d x y + e x^2 + f y^2 + g x^2 y + h x y^2 + l x^3 + m y^3 \text{ æq. } 0.$$

» & ſic porrò.
» Amſtelodami cum *Huddenio* locutus ſum; cui negotia civilia tempus
» omne eripiunt. Eſt enim ex numero 12 urbis Conſulum, qui ſubinde
» imperium obtinent: Nuper Conſul Regens erat; nunc Theſaurarii mu-
» nus exercet. Præclara admodum in ejus ſchedis ſupereſſe certum eſt.
» Methodus Tangentium à *Sluſio* publicata dudum illi fuit nota. Am-
» plior ejus Methodus eſt, quàm quæ à *Sluſio* fuit publicata. Sed &
» qua-

„ quadratura hyperbolæ *Mercatoris* ipſi jam anno 1662 innotuit. Hactenus
„ *Leibnitius*.

D. *Baker* eſt indefatigabilis induſtriæ Vir; qui lubenter in ſe ſuſcipiet laborem calculi, qui cenſebitur utilis. Sed credo eum in *Methodo Tangentium* vix ſatis peritum; quam puto, in ſcriptis hactenus editis nondum eſſe demonſtratam. Si itaque tu dignaberis ipſi impertire conſilia tua hac in re, hoc promovebit opus.

Bakerus huc imprimendam miſit, Exercitationem ſuam *de Continuè-proportionalibus*; aliamque cui Titulus, *Cardanus Promotus*.

Narrat mihi D. *Loggan* (Chalcographus) quod effigiem tuam delineavit ille, in ordine ad ſculpturam; Quæ præfigenda ſit libro tuo de *Lumine*, *Coloribus*, *Dioptricis*, &c. quem edendum intendis. Qua de re deſideramus eſſe certiores. Sum &c. *Lond.* 5. *Martii*, 167$\frac{5}{7}$.

P. S.

Exemplar Epiſtolæ tuæ (quatuor ſchedarum) nondum eſt ad D. *Leibnitium* miſſum: Sed, intra ſeptimanam, eſt quidam hinc profecturus *Hanoveram*, qui tum illud, tum libros quoſdam laturus eſt.

IX. Epistola D. Leibnitii ad D. Oldenburgium, *cum D.* Newtono *communicanda*.

Ampliſſime Domine,

Accepi Literas tuas diu expectatas, cum incluſis *Newtonianis* ſanè pulcherrimis; quas plus ſemel legam cum cura & meditatione; quibus certè non minùs dignæ ſunt quàm indigent. Nunc pauca quæ feſtinante oculo obeunti incidêre è veſtigio annotabo.

Egregiè placet, quod deſcripſit, qua via in nonnulla ſua elegantia ſane Theoremata inciderit. Et quæ de *Walliſianis* Interpolationibus habet, vel ideo placent, quia hac ratione obtinetur harum interpolationum demonſtratio, cùm res ea antea (quod ſciam) ſola inductione niteretur; tametſi pars eorum per Tangentes ſit demonſtrata.

Clariſſimi *Sluſii* methodum Tangentium nondum eſſe abſolutam, Celeberrimo *Newtono* aſſentior. Et jam à multo tempore rem Tangentium longè generaliùs tractavi; ſcilicet per differentias ordinatarum. Nempe
TAB. I. T 1 b (intervallum Tangentis ab Ordinata in Axe ſumptum) eſt ad 1B
Fig. 4. 1C Ordinatam; ut 1C D (differentia duarum Abſciſſarum A 1B, A 2B,) ad D 2C (differentiam duarum Ordinatarum 1B 1C, 2B 2C.) Nec refert quem

quem angulum faciunt ordinatæ ad axem. Unde patet, nihil aliud eſſe, invenire Tangentes, quàm invenire differentias ordinatarum, poſitis differentiis abſciſſarum (ſeu 1B 2B $\sqcap$ 1C D) ſi placet æqualibus. [$\sqcap$ *eſt nota Æqualitatis.*] Hinc nominando in poſterum, $\bar{d}_y$ differentiam duarum proximarum y (nempe A 1B & A 2B;) & $\bar{d}_x$ ſeu D 2C differentiam duarum proximarum x (prioris 1B 1C, poſterioris 2B 2C;) patet $\bar{d}_{y^2}$ eſſe $2y\bar{d}_y$; & $\bar{d}_{y^3}$ eſſe $3y^2\bar{d}_y$, &c. & ita porrò. Nam ſint duæ proximæ ſibi (id eſt, differentiam habentes infinitè parvam) ſcilicet A 1B, y; & A 2B, $y+\bar{d}_y$. Quoniam ponimus $\bar{d}_{y^2}$ eſſe differentiam quadratorum ab his duabus rectis, Æquatio erit $\bar{d}_{y^2} \sqcap y^2 + 2y\bar{d}_y + \bar{d}_y|^2 - y^2$. Seu, omiſſis $y^2 - y^2$ quæ ſe deſtruunt, item omiſſo quadrato quantitatis infinitè parvæ (ob rationes ex methodo de Maximis & Minimis notas,) erit $\bar{d}_{y^2} \sqcap 2y\bar{d}_y$. Idemque eſt de cæteris potentiis. Hinc etiam haberi poſſunt differentiæ quantitatum ex diverſis indefinitis in ſe invicem ductis factarum: ut $\bar{d}_{yx}$ erit $\sqcap y\bar{d}_x + x\bar{d}_y$; & $\bar{d}_{y^2x} \sqcap 2xy\bar{d}_y + y^2\bar{d}_x$. Hinc ſi æquatio $a+by+cx+dyx+ey^2+fx^2+gy^2x+hyx^2$ &c. $\sqcap 0$; ſtatim habetur tangens curvæ ad quam eſt iſta Æquatio. Nam ponendo A B $\sqcap y$, & A 2B $\sqcap y+\bar{d}_y$ (ſcilicet, quia 1B 2B ſeu 1C D $\sqcap \bar{d}_y$;) Itemque ponendo 1B 1C $\sqcap x$, & 2B 2C $\sqcap x+\bar{d}_x$ (ſcilicet, quia 2C D $\sqcap \bar{d}_x$,) Et quia eadem æquatio exprimit quoque relationem inter A 2B & 2B 2C, quæ eam exprimebat inter A 1B & 1B 1C; Tunc in æquatione illa pro y & x ſubſtituendo $y+\bar{d}_y$, & $x+\bar{d}_x$, fiet

$$\left.\begin{array}{l} a+by+cx+dyx+ey^2+fx^2+gy^2x+hyx^2 \\ \hline b\bar{d}_y+c\bar{d}_x+dy\bar{d}_x+ey\bar{d}_y+2fx\bar{d}_x+2gxy\bar{d}_y+2hxy\bar{d}_x \ \&c. \\ \qquad +dx\bar{d}_y \qquad\qquad\qquad\qquad +gy^2\bar{d}_x+hx^2\bar{d}_y \ \&c. \\ \hline \qquad +d\bar{d}_x\bar{d}_y+e\bar{d}_y|^2+f\bar{d}_x|^2+g\bar{d}_y|^2x+h\bar{d}_x|^2y \\ \qquad\qquad\qquad\qquad +2gy\bar{d}_y\bar{d}_x+2hx\bar{d}_x\bar{d}_y \ \&c. \\ \qquad\qquad\qquad\qquad +y\bar{d}_x\bar{d}_y|^2+h\bar{d}_y\bar{d}_x^2 \end{array}\right\} \sqcap 0.$$

d eſt quantitas communi more.
$\bar{d}$ eſt nota differentiæ.

Ubi, abjectis illis quæ ſunt ſupra primam lineam, quippe nihilo æqualibus per æquationem præcedentem; & abjectis illis quæ ſunt infra ſecundam, quia in illis duæ infinitè parvæ in ſe invicem ducuntur; hinc reſtabit tantùm æquatio hæc $\begin{array}{l} b\bar{d}_y+c\bar{d}_x+dy\bar{d}_x \ \&c. \sqcap 0. \\ +dx\bar{d}_y \end{array}$ quidquid ſcilicet reperitur inter lineam primam & ſecundam. Et, mutata æquatione in rationem ſeu analogiam, fiet

$$\frac{-\bar{d}_y}{\bar{d}_x} \sqcap \frac{c+dy+2fx+gy^2+hxy \ \&c.}{b+dx+2ey+2gxy+hx^2 \ \&c.} \text{ Id eſt}$$

$$\left(\text{quia } \frac{-\bar{d}_y}{\bar{d}_x} \text{ ſeu } \frac{-\text{1B 2B ſeu } -\text{1C D}}{\text{D 2C}} \sqcap \frac{-\text{T 1B}}{\text{1B 1C}}\right) \text{ erit } \frac{c+dy\ \&c.}{b+dx\ \&c.} \sqcap \frac{-\text{T 1B}}{\text{1B 1C}}.$$

 Quod

Quod coincidit cum Regula *Sluſiana*, oſtenditque eam ſtatim occurrere hanc methodum intelligenti.

Sed methodus ipsâ (priore) noſtra longè eſt amplior. Non tantùm enim exhiberi poteſt, cùm plures ſunt literæ indeterminatæ quàm y & x (quod ſæpe fit maximo cum fructu;) Sed & tunc utilis eſt cùm interveniunt irrationales, quippe quæ eam nullo morantur modo, neque ullo modo neceſſe eſt irrationales tolli, quod in methodo *Sluſii* neceſſe eſt, & calculi difficultatem in immenſum auget.

Quod ut appareat, tantùm utile erit in irrationalitatibus ſimplicioribus rem explanare. Et primum ſit in ſimpliciſſimis generaliter. Si ſit aliqua potentia, ut radix x^z; erit $d\bar{x}^z \sqcap z\,\bar{x}|^{z-1}\,d\bar{x}$.

Si z ſit $\frac{1}{2}$, ſeu ſi x^z ſit $\sqrt[2]{x}$, erit $d\bar{x}^z$, ſeu hoc loco $d\overline{\sqrt[2]{x}}$, $\sqcap \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}}\, d\bar{x}$ ſeu $\frac{d\bar{x}}{2\sqrt{x}}$; ut notum, aut facilè demonſtrabile.

Sit jam Binomium, ut $\sqrt[3]{\overline{a+by+cy^2}}$ &c. quæritur $d\sqrt[3]{\overline{a+by+cy^2}}$, ſeu $d\bar{x}^z$, poſito $\frac{1}{3}\sqcap z$, & $a+by+cy^2$ &c. $\sqcap x$. Eſt autem $d\bar{x} \sqcap b\,d\bar{y} + 2cy\,d\bar{y}$ &c. Ergo $d\bar{x}^z$ ſeu $\frac{d\bar{x}}{3\sqrt[3]{x}}$ erit $\sqcap \frac{b\,d\bar{y}+2cy\,d\bar{y}\ \&c.}{3\sqrt[3]{:a+by+cy^2}}$. Eadem methodus adhiberi poteſt etſi Radices in Radicibus implicentur. Hinc ſi detur æquatio valdè intricata, ut $a + bx\sqrt[2]{\overline{y^2+b\sqrt[3]{\overline{1+y}}}} + hx^2y\sqrt[2]{\overline{y^2+y\sqrt[2]{\overline{1-y}}}} \sqcap 0$, ad aliquam curvam cujus abſciſſa ſit y (AB) ordinata x (BC) tunc Æquatio proveniens utilis ad inveniendam Tangentem TB, ſtatim ſine calculo ſcribi poterit; & erit hæc

$$\left.\begin{matrix} b\,d\bar{x}\sqrt[2]{\overline{y^2+b\sqrt[3]{\overline{1+y}}}} \\ +2hxy\,d\bar{x} \\ +hx^2\,d\bar{y}\end{matrix}\right\}\frown\sqrt[2]{\overline{y^2+y\sqrt{\overline{1-y}}}}\;\Bigg|\;\frac{+hyx^2}{1\sqrt[2]{\overline{y^2+y\sqrt{\overline{1-y}}}}}\;\Bigg|\;\left.\begin{matrix}\dfrac{+bx}{2\sqrt[2]{\overline{y^2+b\sqrt[3]{\overline{1+y}}}}}\frown 2y\,d\bar{y}+\dfrac{b\,d\bar{y}}{3\sqrt[3]{\overline{1+y}}} \\ \hline \frown 2y\,d\bar{y}+d\bar{y}\sqrt[2]{\overline{1-y}}-\dfrac{y\,d\bar{y}}{2\sqrt[2]{\overline{1-y}}}\end{matrix}\right\}$$

(Nota $\frown$ mihi eſt nota multiplicationis, ex. g. $a \frown b$ idem quod ab) Seu, mutando quotientem hanc inventam in Analogiam; erit $-d\bar{y}$ ad $d\bar{x}$, ſeu $-$ 1T 1B ad 1B 1C, ut omnes provenientis æquationis termini per $d\bar{x}$ multiplicati, ad omnes ejuſdem terminos per $d\bar{y}$ multiplicatos.

Ubi ſane mirum & maximè commodum evenit, quod $d\bar{y}$ & $d\bar{x}$ ſemper extant extra vinculum irrationale. Methodo autem *Sluſiana*, omnes ordine irrationales tollendas eſſe, nemo non videt.

Arbitror,

Arbitror, quæ celare voluit *Newtonus* de Tangentibus ducendis, ab his non abludere. Quod addit, ex hoc eodem fundamento quadraturas quoque reddi faciliores, me in ſententia hac confirmat; nimirum ſemper figuræ illæ quadrabiles quæ ſunt ad Æquationem Differentialem; (Æquationem Differentialem, voco talem qua valor ipſius $d\bar{x}$ exprimitur;) quæque ex alia derivata eſt qua valor ipſius x exprimebatur. Exempli gratiâ; ſit $AB \sqcap y : EB \sqcap \omega$.

$$\text{Ponatur } \frac{b + cy + dy^2 + ey^3 \ \&c.}{z\sqrt{}^2\, 1 + by + \frac{c}{2}y^2 + \frac{d}{3}y^3 + \frac{e}{4}y^4 \ \&c.}$$

Quæritur Quadratum figuræ A B E A (quamquam fortè ſæpe tale trilineum non ſit proditurum quale hoc ſchemate depinximus.) Deſcribatur alia curva A C, talis ut B C ſit $\sqrt{z} : 1 + by + \frac{c}{2}y^2 + \frac{d}{3}y^3 + \frac{e}{4}y^4$ ipſam &c. ſignificat; [*mendum ſuſpicor.*] & Rectangulum ſub recta AV repræſentante Unitatem conſtructionis, & ſub ordinata nova B C, æquabitur figuræ A B E A. Ejuſmodi Theoremata condi poſſunt infinita: Imò pleraque ſub generaliſſimis quibuſdam complecti. Licèt nihil refert ſive Series hæ producantur, ſive ubilibet finiantur. Unde patet hanc unicam Regulam pro infinitis figuris quadrandis inſervire, diverſæ planè naturæ ab iis quæ hactenus quadrari ſolebant.

Pulcherrimæ ſunt illæ ſeries *Newtonianæ* quæ ex infinitis in finitas degenerant; qualis illa eſt quam exhibet pro extractione radicum binomii, aut ejus quadratura. Quodſi in ipſius generali illa Æquationis affectæ indefinitæ extractione, cùm ſit $z \sqcap ay + by^2 + cy^3$ &c. & y fit $\frac{z}{a} - \frac{bz^2}{a^3}$ &c: vel $y \sqcap \frac{z}{a} - \frac{bz^3}{a^4}$ &c: idem præſtari poſſet; ut ſcilicet, inter extrahendum radices ex æquationibus aut binomiis, invenire liceret radices rationales finitas quando eæ inſunt, vel etiam irrationales: Tunc dicerem Methodum ſerierum infinitarum ad ſummam perfectionem eſſe productam.

Opus eſſet tamen præterea, diſcerni poſſe varias æquationis ejuſmodi radices: Item neceſſe eſſet, ope ſerierum, diſcerni, æquationes poſſibiles ab impoſſibilibus. Quodſi hæc nobis obtinuerit Vir in his ſtudiis maximus, atque effecerit ſcilicet ut poſſimus ſeriem infinitam convertere in finitam quando id fieri poteſt, aut ſaltem agnoſcere ex quanam finita ſit deducta: Tunc in methodo ſerierum infinitarum, quæ diviſione & extractione inveniuntur, vix quicquam ampliùs optandum reſtabit. Hæc, ſi quiſquam mortalium, certè *Newtonus* præſtare poterit. Eadem credo opera efficie-

L 2 tur,

tur, ut, ex multis ſeriebus infinitis, poſſimus deligere maximè naturales; quales haud dubiè illæ erunt, quæ ita erunt comparatæ, ut, cùm fieri poteſt, atque opus eſt, degenerent in finitas. Atque ita egregie apparebit methodum extractionum per ſeries infinitas, minimè indirectam ſed maximè naturalem eſſe.

Problema eſt perelegans cujus meminit, Curvam deſcribere quæ per data quæcunque tranſeat puncta. *Huddenius* mihi *Amſtelodami* dixit, poſſe ſe Curvam deſcribere Analyticam, ſeu certa æquatione uniformi conſtantem, quæ faciei hominis cujuſdam noti lineamenta deſignet.

TAB. I. Fig. 5. Cæterum quærendum eſt, an hoc *Newtonus* intelligat de Punctis infinitis; ut ſi ſit Axis A 1B 2A 2B 3A &c. in infinitum productus; & duæ curvæ datæ infinitæ Analyticæ, una A 1C 2C 3C &c, altera A 2D 3D &c; ſi ponamus A 1B, 1B 2A, 2A 2B, 2B, 2B 3A, &c. inter ſe & datæ cuidam quantitati F æquales; Quæritur an dari poſſit curva analytica, ſeu æquationis capax, quæ in infinitum producta tranſeat (alternis) per puncta 1C, 2D, 2C, 3D, 3C, &c. *Fermatius* alicubi ſcribit, ſe Methodum habere per quam curva inveniri poſſit cujus proprietas ſpecifica data non pertineat ad unum punctum, ut vulgò fit, cùm ordinatæ referuntur ad partes Axis; ſed ad duo quælibet ſimul, vel etiam ad tria quælibet ſimul, &c.

Quæ de variis Seriebus ſuis & noſtris examinandis atque inter ſe comparandis dicit Clariſſimus *Newtonus*; in ea me immergere non audeo, antequàm in gratiam cum Analyſi rediero: nam harum rerum veſtigia in animo meo propè nunc obliterata ſunt. Agnoſco interim pulcherrima & utiliſſima ab eo annotari. Elegantiſſima & minimè expectata eſt via qua ſeriem meam $\frac{t}{1} - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5}$ &c. deduxit ex ſua.

Quod ait, Problemata methodi Tangentium inverſæ, eſſe in poteſtate; hoc arbitror ab eo intelligi per Series ſcilicet infinitas: Sed à me ita deſiderantur, ut Curvæ exhibeantur Geometricè quatenus id fieri poteſt, ſuppoſitis (minimum) quadraturis. Exempli cauſa. Cycloidem deprehendit *Hugenius* ſui ipſius evolutione deſcribi: Difficile autem fuiſſet, credo, ſolvere hoc Problema, Invenire curvam quæ ſui ipſius evolutione deſcribitur. Neque refert quod curvæ deſcriptio quadraturam circuli ſupponit: Et hoc Problema etiam ex eorum ſit numero, quæ voco Methodi Tangentium inverſæ. Ita inter Methodos Tangentium inverſas generales, eſt, invenire curvam analyticam cujus longitudines ſint areis datæ figuræ, curvâ analyticâ comprehenſæ, proportionales. Contrarium enim dudum poſſumus. Quod Problema arbitror non eſſe inſolubile; & videtur non contemnendum: Facilius enim eſt lineam quàm ſpatium organicè metiri. Et, reducta ſpatiorum dimenſione ad dimenſionem linearum, ſolis filis in rectum extenſis Mechanica fieri poterit conſtructio; & ſpatia poterunt in data ratione ſecari inſtar linearum rectarum.

Cùm

Cùm ait *Newtonus*, inveſtigationem curvæ quando Tangens, vel intervallum tangentis & ordinatæ in Axe ſumptum, eſt recta conſtans, non indigere his Methodis: innuit credo ſe intelligere, Methodum tangentium inverſam generalem, in poteſtate eſſe per methodos ſerierum appropinquativas; in hoc verò caſu ſpeciali non opus eſſe ſeriebus. Ego verò Methodum quærebam quæ accuratè Curvam quæſitam exhibeat, ſaltem ex ſuppoſitis quadraturis; &, cujus ope, ejus Æquationem, ſi quam habet, aut aliam primariam proprietatem poſſumus invenire.

Quod ait, Problemata in quibus datur relatio inter duo latera Trianguli T B C ſemper poſſe ſolvi. Id verum eſt; at ex meis quoque artibus fluit; ac ſæpe ne quadraturis quidem accitis, ſimplici Analytica Æquatione præſtari poteſt. Ut, ſi B C poſita x, ſit T B $\sqcap$ $bx + cx^2 + dx^3$, quæritur qualiſnam ſit hæc curva quæ hanc Tangentium habeat proprietatem: id eſt, quænam ſit æquatio relationem exprimens inter A B ſeu y, & B C ſeu x. Aio eam fore $y \sqcap bx + \frac{cx^2}{2} + \frac{dx^3}{3}$. Si fuiſſet TB $\sqcap$ $a + bx + cx^2$, opus fuiſſet quadratura hyperbolæ ad inveniendam curvam quæſitam. Generaliter autem, quomodocunque datur relatio inter duo ex lateribus hujus Trianguli, quod ego characteriſticum (ob crebros uſus) vocare ſoleo: ſemper, ſuppoſitis quadraturis figurarum analyticarum, haberi poteſt curva quæſita. Quod tamen neſcio an præter *Newtonum* præſtiturus ſit quiſquam. TAB. II. Fig. 6.

Mea Methodo, res unius lineolæ calculo peragitur ac demonſtratur. Sed & rem infinitis caſibus præſtare poſſum, tametſi ipſa y ſeu A B ingrediatur in ipſius T B expreſſionem. Ut, ſi ſit T B $\sqcap$ $bx + cx^2 + dx^3 - y$, fiet Æquatio Curvæ $yx \sqcap bx + \frac{cx}{2} + \frac{dx^2}{3}$. [*Fortè legendum*, TB $\sqcap$ $b + cx + dx^2 - y$, *fiat æquatio curvæ*, $yx \sqcap bx + \frac{cx^2}{2} + \frac{dx^3}{3}$.] Itaque ſi habeatur valor ipſius T A ex B C haberi poterit curva.

Quod verò Clariſſimus *Newtonus* ait, non æquè rem procedere ſi detur relatio ipſius T B ad partem Axis, ſeu ad AB vel y: Ad hoc reſpondeo, mihi æquè facile eſſe invenire curvæ naturam vel æquationem, ſi detur relatio ipſius TB ad AB, quàm (ſi ut ipſe requirit) detur relatio ad BC. Generalem verò methodum tangentium inverſam, nondum quod ſciam habemus.

Sunt & alia Problematum genera quæ hactenus in poteſtate non habeo; quorum ecce exempla: Sint duæ Æquationes $x^y + y^x \sqcap xy$, & $x^x + y^y \sqcap x + y$; duæ ſunt Incognitæ $x\,y$, duæque ad eas inveniendas Æquationes. Quæritur valor tam unius quàm alterius literæ. Talia Problemata vel in numeris vel in lineis ſolvere difficillimum arbitror. Si tamen de appro-

pinquationibus agatur, puto poſſe iis ſatisfieri. Siquam huic difficultati lucem afferre poteſt *Newtonus*, pro ea qua pollet ingenii vi, multum Analyſin promovebit.

Analyſis quoque *Diophantæa*, ſeu ſolutio Problematum in numeris rationalibus, nondum habito.

Hæc annotavi feſtinans, atque inter legendum. Ad reliqua majore otio opus eſt.

Interea celeberrimum *Newtonum* quæſo officioſiſſimè à me ſaluta; &, poſt actas maximas gratias, eum roga ut communicet continuationem harum ſerierum. Nempe, poſita $z \sqcap ay + by^2 + cy^3 + dy^4$ &c. ait fore $y \sqcap \frac{z}{a} - \frac{bz^2}{a^3} + \frac{2b^2 - ac\,z^3}{a^5} z^3$ &c; Vel [ſi ſit $z \sqcap ay + by^3 + cy^5$ &c. erit] $y \sqcap \frac{z}{a} - \frac{bz^3}{a^4} + \frac{3b^2 - ac}{a^7} z^5$ &c. Et ſiqua alia in promptu habet Theoremata nonnihil generalia; quoniam ad Calculum contrahendum plurimum ſerviunt. Quodſi eorum originem ſive demonſtrationem addet, tanto magis obligabit.

Velim etiam noſſe, an per extractiones in ſeriebus diſcernere poſſit Æquationes poſſibiles ab impoſſibilibus. Nam ſi generalis ejuſmodi extractio procederet, ſequeretur, nullam Æquationem fore impoſſibilem.

Item, Quomodo inveniat diverſas ejuſmodi æquationis Radices; ita ut ex pluribus radicibus eam poſſit invenire quam quærimus.

Item, An tales habeat ſeries quarum ope extrahendo æquationis [*radices*] inveniuntur valores finiti quando tales inſunt.

Denique, Quid ſentiat de Reſolutione Æquationum quales paulo ante poſui: ut $x^y + y^x \sqcap xy$, & $x^x + y^y$ [*legendum puto* $x^x + y^y$] $\sqcap x + y$; ubi ſcilicet incognita ingreditur in Exponentem.

Oblitus eram dicere, pulchram mihi videri Ciſſoidis extenſionem in rectam, quam *Newtonus* invenit, ex ſuppoſita Quadratura hyperbolæ. Ego mihi videor eodem modo etiam metiri poſſe curvam hyperbolæ æquilateræ: ſed, nondum omnis: Neque curvam ellipſeos quantum memini.

Antequàm finiam, adjiciam uſum pulcherrimum ſerierum, qui imprimis *Collinio* noſtro non erit ingratus. Scis magnam eſſe difficultatem circa extrahendas radices ex Binomiis cubicis, quando eas ingreditur quantitas imaginaria, orta ex Radice quadratica negativæ quantitatis, ut $\sqrt[3]{a + \sqrt{-b}} + \sqrt[3]{a - \sqrt{-b}}$ (puta M + N) ubi utraque quantitas M & N eſt ſingulatim impoſſibilis; ſumma autem (ut alibi oſtendi) eſt quantitas poſſibilis & realis; æqualis cuidam quæſitæ z. Ut verò ea denatur, & ut extrahatur Radix; nempe ut inveniatur $\frac{z}{2} + e\sqrt{-b^2} \sqcap$

$\sqrt[3]{a}$

$\sqrt{^3\,a+\sqrt{^2-b^2}}$ & $\frac{z}{2}-e\sqrt{-b^2}\sqcap\sqrt{^3\,a-\sqrt{^2-b^2}}$ (modo ſit $\sqrt{^3\,a+\sqrt{^2-b^2}}+\sqrt{^3\,a-\sqrt{^2-b^2}}\sqcap z$;) non poteſt adhiberi Methodus *Schotenii* Geometriæ Carteſianæ ſubjecta; quia opus eſt ad eam, ut valor ipſius $\sqrt{^3\,a+\sqrt{^2-b^2}}$ exhibeatur, ſaltem approximando, quod notis methodis impoſſibile eſt. Quis enim valorem ipſius $\sqrt{^2-b^2}$ prope verum dabit? Neceſſe eſt enim invenire $b\sqrt{-1}$: quis autem exprimat $\sqrt{-1}$ appropinquando?

Scripſi olim *Collinio*, me remedium inveniſſe quod etiam ad omnes gradus ſuperiores valeat. Id ecce uno verbo. Ex binomio $\sqrt{^3\,a+\sqrt{^2-b^2}}$, extraho Radicem per ſeriem infinitam, ſive per Theorema *Newtonianum*, ſive etiam more meo priore, inſtituendo calculum ſecundùm naturam cujuſque gradus; cùm ſcilicet nondum Theorema generale abſtraxiſſem. Quæ radix ponatur eſſe $l+m\sqrt{-b^2}+n+p\sqrt{-b^2}$ &c. Extrahatur jam & radix ex binomio altero $\sqrt{^3\,a-\sqrt{^2-b^2}}$; fiet illa $+l-m\sqrt{-b^2}+n-p\sqrt{-b^2}$ &c. ut facilè demonſtrari poteſt ex calculo. Ergo, addendo hæc duo extracta, deſtruentur imaginariæ quantitates, & fiet $z\sqcap 2l+2n$ &c. Quæ ſunt eæ ſeriei portiones in quibus nulla reperitur imaginaria. Invento igitur valore ipſius z, quantum ſatis eſt propinquo, quemadmodum *Schotenius* poſtulat, reliqua Methodo *Schoteniana* perinde ac in aliis binomiorum extrahendorum generibus tranſigentur. *Junii* 21. 1677.

X. EPISTOLA D. LEIBNITII ad D. OLDENBURGIUM, *cum* D. NEWTONO *communicanda*.

Ampliſſime Domine,

Nuperas meas credo acceperis. Nunc iſtas maturè ſummitto, ne facilitate D. *Newtoni* abutamur. Rogaveram enim in prioribus, ut quædam ſuæ Epiſtolæ loca explicaret; Nempe, quomodo inveniſſet Theoremata, quod poſito $z\sqcap ay+by^2+cy^3$ &c. fit $y\sqcap\frac{z}{a}-\frac{bz^2}{a^3}+\frac{2b^2-ac}{a^5}z^3$, vel [ſi ſit $z\sqcap ay+by^3+cy^5$ &c. erit] $y\sqcap\frac{z}{a}-\frac{bz^3}{a^4}+\frac{3b^2-ac}{a^7}z^5$, &c. Nunc verò, relictis ejus literis, video id facilè non

tantùm

tantùm ex ejus extractionibus derivari, ſed & altera illa methodo ſub finem literarum ejus expoſita inveniri; qua me quoque aliquando uſum in veteribus meis ſchedis reperio: ſed, cùm in exemplo quod fortè in manus meas ſumpſeram nihil prodiiſſet elegans, ſolita impatientia eam porrò adhibere neglexiſſe.

Difficultatem moveram in præcedentibus literis, circa Æquationes impoſſibiles, quarum Radices poſſibiles videntur inveniri per ſeries infinitas. Necdum verò illa ſublata eſt; & meretur res excuti diligentiùs.

Illud tamen video, ſi in Æquatione data $z \sqcap ay + by^2 + cy^3$ &c. literæ z & y ſint indeterminatæ; tunc Æquationem ſemper eſſe poſſibilem: ſed ſi z eſſet determinata, rurſuſque in ipſis a vel b &c. lateret Æquatio, poſſet eſſe impoſſibilis; & tamen, per ſeriem generalem, aliqua prodire videretur Radix poſſibilis. Cujus difficultatis ſolutionem, re diligenter expenſa, reperiri poſſe arbitror: ſed nunc in iſta accuratiùs inquirere non licet. Meretur autem explicari, tum quomodo ex ſeriebus agnoſci poſſit, æquationes eſſe impoſſibiles (quamquam id aliàs ſatis facilè inveniatur,) tum quomodo dignoſcantur diverſæ Radices.

Præter ea quæ in ſuperiore Epiſtola notavi; ſcilicet Methodum Tangentium inverſam & Geometricam (ſaltem ſuppoſitis curvarum analyticarum quadraturis) & alia id genus: Deeſt nobis, circa quadraturas, ut ſcire certò poſſimus, annon quadratura figuræ alicujus propoſitæ reducatur ad quadraturam circuli aut hyperbolæ. Nam pleræque figuræ, hactenus tractatæ, ope alterutrius quadrari potuerunt. Quod ſi demonſtrari poteſt (ut arbitror.) quaſdam figuras non eſſe quadrabiles nec per circulum nec per hyperbolam, reſtat ut alias quaſdam figuras primarias altiores conſtituamus, ad quarum quadraturam reducantur cæteræ omnes, quando id fieri poteſt. Hoc quamdiu non fit, hæremus; & ſæpe per Seriem infinitam particularem quærimus, quod ad circuli aut hyperbolæ aut aliam notioris figuræ quadraturam reduci poterat.

Crediderat *Gregorius*, dimenſionem Curvarum Hyperbolæ & Ellipſeos non pendere à quadratura circuli aut hyperbolæ. Ego verò reperi aliquam ſpeciem curvæ hyperbolicæ, quam ex data ipſius hyperbolæ quadratura metiri poſſum. De cæteris nondum mihi liquet. *Hanoveræ*, 12. *Julii* 1677.

N°. VI.

N°. VI.

COMMERCIUM EPISTOLICUM
G. G. LEIBNITII,
ET JOHANNIS WALLISII,

Geometriæ Profeſſoris *Saviliani* in Celeb. Academiâ Oxonienſi.

Ex Tom. III. operum ejuſdem Walliſii.

COMMERCIUM EPISTOLICUM
G. G. LEIBNITII
ET JOHANNIS WALLISII,

Geometriæ Profeſſoris *Saviliani* in Celeb. Academiâ Oxonienſi.

I. Epistola D. Wallisii ad G. G. Leibnitium.

Nobiliſſime & Celeberrime Vir,

Accepi nuper (tardo itinere, per neſcio quas manus intermedias ad me miſſam, (Schedulam quandam (ut à te ſcriptam) in hæc verba, » Vir Celeberrimus *Joannes Walliſius* rogatur, ut quæ de *Area Hyperbolæ* » per ſeriei cujuſdam interpolationem exhibenda promiſit in Commercio » Epiſtolico; & quæ alibi in hoc genere præſtitiſſe dixit Dominum Vi- » ce-comitem *Brounkerum*, ad eorum inſtar quæ de Circulo in Arithme- » tica infinitorum habentur, edere velit. Etſi enim hodie aliæ quoque ex- » preſſiones ſint inventæ; attamen & iſtæ ſuam peculiarem elegantiam » habent. Scribebam Hanoveræ, 6. Decemb. 1695. *Godefridus Guilielmus* » *Leibnitius*. Et quidem gratias habeo Nobiliſſimo Viro, quòd aliquam mei curam habeas, & rerum mearum.

Promiſſum illud meum quod memoras in Commercio Epiſtolico à me factum, (illud, credo, vis quod ſub finem Epiſtolæ XVI. habetur;) nimirum, Expoſita ſerie numerorum $1, \frac{5}{6}, \frac{31}{30}, \frac{209}{140}, \frac{1471}{630}, \frac{10525}{2772}$, &c; Si terminum inter 1 & $\frac{5}{6}$ intermedium, ſeriei congruum exhibuerit *Fermatius*, exhibiturum me Hyperbolæ Quadraturam: Id ego jam tum præſtiteram. Eſt enim hæc ſeries, eadem ipſa quæ habetur Prop. 161. Arithmeticæ Infinitorum; unde colligitur Hyperbolæ quadratura Prop. 165. Ad quam nihil deeſt aliud, quàm exhibitio numeri intermedii inter 1 & $\frac{5}{6}$; qui ita reſpiciat ordinatas in hyperbola, ut $\frac{5}{6}$ reſpicit earum quadrata. Sicut enim, ope ſeriei Prop. 133, nempe $1, \frac{1}{6}, \frac{1}{30}, \frac{1}{140}, \frac{1}{630}, \frac{1}{2772}$, &c. colligitur circuli

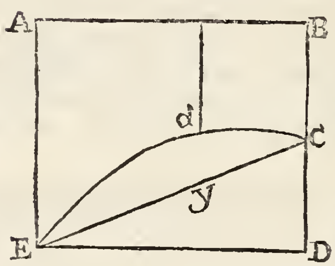
culi quadratura Prop. 135, ex intermedio numero inter 1 & $\frac{1}{6}$ in hac ſerie; ſic hyperbolæ quadratura colligitur ex numero intermedio inter 1 & $\frac{5}{6}$ in illa ſerie. (Suntque iidem Denominatores numeri utriuſque ſeriei.) Poteſtque numerus ille, *Approximando*, pluribus modis exhiberi (quod & à pluribus factum eſt.) Sed *Accurate*, credo, (quod quærebatur,) numero finito non poſſe, juxta receptam adhuc aliquam notationis formam.

Pariter; Ut ope ſeriei 1, $\frac{2}{3}$, $\frac{8}{15}$, $\frac{48}{105}$, &c. Prop. 118. colligitur quadratura circuli Prop. 121, ex numero intermedio inter 1 & $\frac{2}{3}$: Sic, ope ſeriei 1, $\frac{4}{3}$, $\frac{28}{15}$, $\frac{288}{105}$, &c. Prop. 158, colligenda eſt quadratura hyperbolæ, ex interpoſito numero medio inter 1 & $\frac{4}{3}$. (Quæ hyperbolam exteriorem ſpectat.)

Brounkeri quadratura hyperbolæ (ex eiſdem principiis,) habetur in *Philoſophicis Tranſactionibus* Londinenſibus Num. 34, pro menſe *Aprilis* 1668. Quæ tibi, credo, non diſplicebit. Nempe, Poſito ABDE = 1.

$$\left.\begin{aligned} \text{Erit ABCdEA} &= \frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{3\times 4}+\frac{1}{5\times 6}+\frac{1}{7\times 8}+\frac{1}{9\times 10}\ \&c. \\ \text{EdCDE} &= \frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{4\times 5}+\frac{1}{6\times 7}+\frac{1}{8\times 9}+\frac{1}{10\times 11}\ \&c. \\ \text{EdCyE} &= \frac{1}{2\times 3\times 4}+\frac{1}{4\times 5\times 6}+\frac{1}{6\times 7\times 8}+\frac{1}{8\times 9\times 10}\ \&c. \end{aligned}\right\}\ \text{in infinitum.}$$

Quorum Demonſtrationes ibidem habentur.



Aliam autem ille tum ante mihi monſtraverat (quæ mihi potior videbatur:) ſed quam periiſſe credo (cum aliis ipſius ſcriptis) in ædium ſuarum conflagratione: & quam ego (poſt tot annos) non ſatis reminiſcor.

Dum hæc ſcripturus eram, oſtendit mihi non nemo, heſterno die, *Acta Lipſica*, pro menſe *Junii* præſentis Anni 1696. Quorum eruditus Editor dignatus eſt inibi amplam meorum Operum Mathematicorum (Oxonii editorum) mentionem facere. Quo nomine me ipſi obſtrictum ſentio, & gratias habeo.

Sed conqueri videtur (ſaltem ſubinſinuare,) quod, quum *Newtoni* Methodos fuſius expoſuerim; de *Leibnitianis* parciùs dixerim. At nolim ego te (quem magni æſtimo) à me quoquo modo læſum iri. Sed gratulor

potiùs,

potiùs, te, in tanta nobilitate poſitum, ad res noſtras Mathematicas deſcendere voluiſſe. Et tantum abeſt ut velim ego tibi quocunque modo iniquus eſſe, ut, ſiqua ferat occaſio, demerere malim.

Dum addit eruditus Editor, illas me forte præteriiſſe quod de illis mihi non ſatis conſtiterit; id omninò verum eſt.

Dicam utique quod res eſt (neque enim fateri pudet:) Tuarum ego rerum nihil (quod memini) vidi quicquam, præter hæc duo. Quorum alterum, illud eſt quod inter Londinenſium *Collectiones Philoſophicas* habetur (ſed abſque demonſtratione) ex *Actis Lipſicis* deſcriptum; De *Quadrato Diametri, ad Aream Circuli*; ut 1 ad $\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11}$ &c. in infinitum. Quod ego meis inſerui (ut à te factum) ad Algebræ meæ Prop. 95.

Alterum, eſt illud de *Teſtudine Quadrabili*; cujus ego (ut de tuo) mentionem facio in Algebræ meæ poſtremo folio. Præter hæc duo, ſi plura noverim, non reticuiſſem.

Tuam *Geometriam Incomparabilium* vel *Analyſin Infinitorum*, (quam ibidem à te memoratam dixi,) ego nondum vidi; nec ejus quicquam vel de nomine ante inaudiveram, quàm prout ibidem ad calcem Algebræ dictum eſt.

Neque *Calculi Differentialis* vel nomen audiviſſe me memini, niſi poſtquàm utrumque volumen abſolverant operæ, eratque Præfationis (præfigendæ) poſtremum folium ſub prelo, ejuſque typos jam poſuerant Typothetæ. Quippe tum me monuit amicus quidam (harum rerum gnarus) qui peregre fuerat, tum talem methodum in Belgio prædicari, tum illam cum *Newtoni* methodo *Fluxionum* quaſi coincidere. Quod fecit ut (tranſmotis typis jam poſitis) id monitum interſeruerim.

Sed & antè monueram, Algebræ Prop. 95. pag. 389. (quod ſolùm potui) *Leibnitium* & *Tſchürnhauſium* talia meditatos; ſed quæ ego non videram. (Necdum vidi.) Et ſicubi fortè viderim literas *G. G. L.* neſciebam quem illæ Virum indicabant.

Extant, credo, plura in *Actis Lipſicis*; ſed quæ ego non vidi: Uti nec tu, credo, vidiſti *Brounkeri Quadraturam Hyperbolæ*, quæ extat in Tranſactionibus Londinenſibus. Mihique condonari poteſt, hac ætate, (qui annum octogeſimum ſuperavi,) ſi non omnia ſciſcitarer.

Noveram quidem jamdudum (& indicavi) de rebus hujuſmodi nonnulla te meditatum eſſe; Tibique cum *Newtono* (mediante *Oldenburgio*) interceſſiſſe Literas quaſdam tuas: Sed, quas ego non vidi, nec ſcio quales fuerint: eratque *Oldenburgius* diu mortuus, ut non potuerim ab illo ſciſcitari. Rogabam quidem (per literas) *Newtonum* noſtrum, ut, ſi eas penes ſe haberet, earum mihi copiam faceret literarum; ſed retulit ille, ſe non habere. (Et quidem periiſſe credo, flammis inopinato correptas, cum pluribus *Newtoni* ſcriptis, meliori luce dignis: &, niſi per me ſte-

tiſſet, periiſſent etiam *Newtoni* literæ.) Eoque animo rogabam, ut tuas illas cum *Newtoni* literis junctim ederem. Idque etiamnum, ſi ferat occaſio, facturus fortè ſum, modò mihi dignaberis earum copiam facere.

Quod *Henricus Oldenburgius* fuerit *Bremenſis*, & *Nicolaus Mercator*, *Holſatus*; (quod ſuggerit eruditus Editor;) omninò verum eſſe credo; ſaltem Anglos non fuiſſe, ſatis novi, (eoſque propterea Germaniæ veſtræ non invideo:) Adeoque non *Noſtrates* dixi, ſed *Apud Nos*: nec tamen ideo minùs eos aut amavi, aut æſtimavi. Nam mihi perinde eſt qua quis gente ſit (*Tros Tyriuſve foret*, *nullo diſcrimine*) modò ſit vir bonus, & bene meritus. Sed *apud nos* diu vixerant; &, quicquid hac in re fecerint, *apud nos* factum eſt.

Quæ fuſius expoſui, ut ſentias quàm tibi non iniquus fuerim, aut parum candidus.

Ubi autem eruditus Editor extenuatum it meas methodos, quaſi ad ſolas figuras integras, non ad earum partes, ſe extenderint: Non id malo animo factum judico; ſed, quod non ſatis ad hoc attenderit, quod *Altitudo A* (quam pro numero terminorum ſubſtituo) ubi tota figura conſideratur, intelligenda eſt de altitudine totius figuræ; ſed, ubi de ſegmento agitur, intelligenda eſt de altitudine iſtius ſegmenti: Pariterque, *Terminus ultimus*, illic de ultimo totius figuræ; hic, de ultimo iſtius ſegmenti: Quod ego alicubi, ni malè memini, inſinuavi.) Atque, ſic, meæ methodi (cautè adhibitæ) de ſegmentis pariter procedunt atque de figuris integris. Et quidem, ſegmentum illud, eſt figura.

Miror autem eum dixiſſe pag. 254. me *quoad totum ſpatium Cycloidale*, *non verò quoad Segmenta*, rationem accommodaſſe; cùm manifeſtum ſit, me oſtendiſſe, tum totam Cycloidem totius circuli triplam eſſe, tum partem partis reſpectivè ſumptæ triplam. (Quod *Dettonvilius* ſeu *Paſchalius* non oſtendit; nec, quod ſciam, ante me quiſquam alius.) Et, de Ciſſoide ſimiliter.

Dicit, Quadraturas meas (aliquas, credo, vult, non omnes) *Fermatio*, *Robervallio*, & *Paſchalio*, antè fuiſſe notas. Quod ſi ſit, clam me fuit; nec ſcio id ab illis antè fuiſſe editum, nedum demonſtratum. Nominaſſet ille potiùs *Cavallerium*; qui (in Tractatu *de Uſu Indiviſibilium in Poteſtatibus Coſſicis*) Paraboloidum quadraturas aliquas antè exhibuerat, & demonſtraverat, (unde forſan illi alteri habuerint:) ſed me tunc inſcio, & ex aliis principiis.

Quod notat de meo *per Inductionem* proceſſu (quod quadantenus verum eſt;) de hoc abunde dictum eſt Algebræ cap. 78. & 79. Sed & recordandum erat, me non tam *Demonſtrandi* methodum tum docere, quàm methodum *Inveſtigandi*, (& quidem *novam*, & minimè contemnendam, quod ne quidem adverſarii negare poterunt:) Cui methodus Inductionum apprimè convenit. Quod ſi, ubi hæc ego ritè inveſtigaverim, velint alii

(demon-

(demonſtrationibus apagogicis) porrò confirmare, per me licet. Ego, quantum ſatis eſt, me confirmaſſe exiſtimo.

Quod autem queritur, me demonſtrationem ne pro una quidem ſerie attuliſſe: id factum videat (ut de Monadicis & Lateralibus nihil dicam) Algebræ cap. 78. de Quadraticis, & Cubicis (Archimedea methodo) ut Paradigmata id ipſum faciendi in ſeriebus ſequentibus, quouſque quis voluerit. Quod & clariſſimus *Bullialdus* in pluribus fecit.

Ubi autem notat, *Inductionem* non pariter applicabilem ſeriebus pro *Ordinatis Irrationalibus*: huic facilè ſubvenitur. Verbi gratiâ; Cùm oſtenderim complementum parabolæ (quæ eſt ſeries ſecundanorum) eſſe $\frac{1}{3}$ Parallelogrammi circumſcripti; hinc ſtatim ſequitur, Parabolam ipſam (quæ eſt ſeries ſubſecundanorum) eſſe $\frac{2}{3}$ ejuſdem Parallelogrammi (Prop. 23. Arith. Infinitorum;) & de reliquis ſimiliter.

Et nullus dubito, quin, quum præjudicium depoſuerint æmuli, tandem agnituri ſint, inſignem hanc fuiſſe Matheſeos promotionem. (Quod & à plurimis factum video. Fatebuntur ſaltem, abunde ſatis pro prima vice (in tractatu non longo) oſtendiſſe me de hac methodo (nova quidem & ſatis fœcunda) ejuſque utilitate; quæ poſſit ab aliis indies promoveri.

Quippe hæc non dicta ſunt, quaſi nollem ego, aut non poſſe putem, hanc ultra promoveri, (aut etiam promotam eſſe:) quin id ipſe feci in libris aliis poſt editis; ipſeque (tum alibi paſſim, tum) ad operis hujus calcem ſuggerebam; quod & fore præſagiebat *Oughtredus* noſter (hujuſmodi rerum judex idoneus) deque eo mihi gratulatus eſt. Ipſeque tantum abeſt ut id nollem, ut mihi potiùs gratuler, quòd videam, me adhuc vivo, hoc contigiſſe. Sed de his hactenus.

Cycloidis inventionem, ego (cum hoc Authore) *Galileo* potiùs tribuerim quàm *Merſenno*; quamvis & hic potuerit, ſuo marte, id ipſum excogitaſſe. Sed multo adhuc antiquiorem hanc figuram reperio, inter Cardinalis *Cuſani* opera quæ habemus manuſcripta (circiter annum 1454.) pulchre delineatam, eadem forma qua eſt apud *Dettonvilium*: Cum circulo genitore in altero vel utroque extremo. In *Manuſcripto*, dico; nam in Codicibus editis perperam deſcribitur. Atque apud *Bovillum* extare dicitur, circa annum 1510.

De invento *Nelii*, qui (traditis à me ad Prop. 38. Ar. Infinitorum, inſiſtens) primus omnium exhibuit æqualem curvæ rectam: Quod dixerat *Hugenius*, (eum non procul abſuiſſe, non tamen omnino aſſecutum,) id poſt retraxit *Hugenius* (in ſuis ad me literis) juſſitque ut id iterum *Nelio* aſſererem. Num *Nelius* ſtatim ſciverit, per omnia, qualis fuerit illa curva, ego non certus ſcio: Sed *Brounkerus* & ego protinus deteximus Paraboloidem eſſe; cui ego nomen feci *Semi-cubicalem*.

Nolim autem celeberrimum Editorem dubitare (quod præcavere ſatagit)

git) quin ego Veſtratibus & Inventis veſtris, favere fuero proclivis; non autem invidere, vel extenuare: qui aliorum inventa ſoleo candidè æſtimare, aut etiam *benigna interpretatione* adjuvare; (quod de *Cavallerii* methodo *Indiviſibilium* factum puto; quam ego ſic expono ut Mathematicum ferre poſſit rigorem, à quorundam Exceptionibus libera:) Qui plurima *Brounkeri*, *Wrenni*, *Nelii*, *Hugenii*, *Mercatoris*, *Newtoni*, *Caſwelli*, aliorumque inventa conſervavi, quæ, niſi ego ediderim, periiſſent, (dum ipſi ſua edere neglexerint,) de tuis paria facturus, ſi ad manus meas pervenerint. Scio quidem mihi Gallorum aliquos (non omnes tamen) aliquatenus infenſos eſſe, ſed immerenti; (eo potiſſimum, quod *Harrioti* meminerim, quem ipſi mallent ignoratum:) id autem de Germanis veſtris nolim ſuſpicari; nec velim ut tale quid de me ſuſpicentur ipſi.

Si petis, Quid ego nunc ago? Poſt edita *Ptolemæi* Harmonica; *Porphyrii* in eum Commentarium, & *Bryennii*, nunc edo, quatenus per preli moras licet. Ut tandem Muſicæ Scriptores Græcos (qui extant) omnes, editos habeamus. Vale. *Oxonii Decemb.* 1. 1696.

Salutatum velim (ſi ferat occaſio) meo nomine, Celeberrimum Actorum *Lipſicorum* Editorem.

II. Epistola D. Leibnitii ad Wallisium.

Vir plurimum Reverende & Celeberrime,

Literæ tuæ, beneficio Domini *Creſſeti*, Ablegati (ad Aulas noſtras) Regii, mihi ſunt redditæ. Quibus non tantùm ſchedæ cuidam meæ humaniſſimè reſpondes, deſiderioque meo ſatisfacis; ſed &, occaſione recenſionis operum tuorum menſe *Junio* anni ſuperioris in *Actis Lipſienſibus* exhibitæ, quædam monita erudita, & (ut verbo dicam) te digna, mecum communicas.

Et, quoniam videris nonnulla, in Actis dicta, ita accepiſſe, quaſi animi parum erga Germanos æqui accuſeris, & quaſi viciſſim tua recenſendo extenuentur; putavi non ingratum tibi fore, ſi Epiſtolam Dominis Editoribus Actorum ſcriberem (cujus hic exemplum addo;) quâ (ſi ipſis videretur) Actis iiſdem inſertâ, ſatisfieri tibi, ſcrupulis illis ſublatis, poſſit. [*Habetur in Actis Lipſicis pro menſe Junio* 1697.]

Ego qui te magni facio, & publicè profeſſus ſum, quantum meo judicio tibi debeat altior Geometria, æquiſſimum puto viris præclarè non de ſuo tantùm ſeculo ſed & poſteritate meritis debitas gratias rependi. Ut autem animi mei certior eſſe poſſis, ecce verbo tenus tranſcripta quæ ipſe

ipſe de tuis meritis Geometricis dixi, *Actorum Lipſienſium Menſe Junio* 1686. pag. 298.

» Paucis dicam, quid potiſſimum inſignibus noſtri ſeculi Mathematicis
» in hoc Geometriæ genere meâ ſententiâ debeatur.

» Primùm *Galilæus* & *Cavallerius* involutiſſimas *Cononis* & *Archimedis*
» artes detegere cœperunt.

» Sed *Geometria Indiviſibilium Cavallerii*, Scientiæ renaſcentis non niſi
» infantia fuit. Majora ſubſidia attulerunt Triumviri celebres; *Fermatius*,
» inventa methodo de *maximis & minimis*: *Carteſius*, oſtenſa ratione li-
» neas Geometriæ communis (Tranſcendentes enim excluſit) exprimendi
» per *Æquationes*: Et P. *Gregorius à S. Vincentio*, multis præclaris inven-
» tis. Quibus egregiam *Guldini* Regulam de *Motu Centri Gravitatis* addo.

» Sed & hi intra certos limites conſtitêre; quos tranſgreſſi ſunt *Huge-*
» *nius* & *Walliſius*, Geometriâ inclyti. Satis enim probabile eſt Hugeniana
» *Heuratio*, & Walliſiana *Nelio* & *Wrennio* (qui primi curvis æquales
» rectas demonſtravêre) pulcherrimorum inventorum occaſionem dediſſe.
» Quod tamen meritiſſimæ laudi inventionum nihil detrahit.

» Secuti ſunt hos *Jacobus Gregorius* Scotus & *Iſaacus Barrovius* Anglus,
» qui præclaris in hoc genere Theorematibus ſcientiam mirificè locuple-
» tarunt.

» Interea *Nicolaus Mercator* Holſatus, Mathematicus & ipſe præſtantiſ-
» ſimus, primus (quod ſciam) quadraturam aliquam dedit per *Seriem in-*
» *finitam*.

» At idem inventum non ſuo tantùm Marte aſſecutus eſt, ſed & uni-
» verſali quadam ratione abſolvit, profundiſſimi ingenii Geometra *Iſaa-*
» *cus Newtonus*. Qui, ſi ſua cogitata ederet, quæ illum adhuc premere
» intelligo, haud dubiè nobis novos aditus ad magna Scientiæ incrémenta
» compendiaque aperiret.

Quibus deinde nonnihil de iis addo, quæ meâ operâ acceſſere; Præ-ſertim dum novo Calculi genere effeci ut etiam Algebram tranſcendentia Analyſi ſubjiciantur; & Curvas, quas *Carteſius* à Geometria malè excluſerat, ſuis quibuſdam Æquationibus explicare docui. Unde omnes earum proprietates certo calculi filo deduci poſſunt. Exemplo *Cycloidis*, cui Æquationem ibidem aſſigno, $y = \sqrt{2x - xx} + \int \frac{dx}{\sqrt{2x - xx}}$. Ubi $\int$ ſignificat Summationem; & d, Differentiationem; x, Abſciſſam ex Axe inde à Vertice; & y, Ordinatam normalem.

De te autem queri, nunquam mihi in mentem venit; quem facilè apparet noſtra, in *Actis Lipſienſibus* prodita, non ſatis vidiſſe.

Quæ inter *Oldenburgium* & me commutatæ ſunt Literæ, quibus aliqua acceſſerant à Dn. *Newtono*, excellentis ingenii Viro, variis meis itineribus

& negotiis ab hoc ſtudiorum genere planè diverſis, vel periere, ut alia multa, vel jacent in mole chartarum aliquando excutienda digerendaque, ubi à neceſſariis occupationibus vacatio erit; quam mihi tam ſubitò, quàm vellem, promittere non poſſum.

Cæterùm libens ex tuis literis intelligo, quod ego à te fieri deſiderabam, & ex tuis meditationibus ſequi judicabam, jam in ipſa tua *Arithmetica Infinitorum* fuiſſe factum; &, in Hyperbola, idem quod in Circulo, præſtitum eſſe. Quod mihi, tua nunc ad manum non habenti, non apparuerat; &, olim legenti, aliter viſum fuiſſe memoria decepta ſuggeſſerat. Interim vellem exiſteret qui tuam illam Methodum proſequeretur ad altiores & magis compoſitas lineas: nam utilitate ſua non caret.

Cùm videam in Recenſione dici, Methodum Arithmeticæ Infinitorum non porrigi ad Quadraturas Segmentorum, ſed tantùm ad Totales; tuas verò literas contrarium aſſerere: Rem accuratiùs inſpicere volui in exemplo *Ciſſoidis*. Cujus tam recenſio, quàm tuæ literæ mentionem faciunt. Et viſum mihi eſt, applicationem ad Segmenta non carere difficultate: quia locum non facilè habent collectiones numerorum in unum. Exempli gratiâ; Pro Ciſſoidis ſpatio totali metiendo, ais; Si ſeries ſubſecundanorum $\sqrt{a}$ ducatur reſpectivè in ſeriem primanorum inverſam $D - a$, fiet ſeries $D\sqrt{a} - a\sqrt{a}$; quæ eſt ad ſeriem æqualium, ſive totidem $D\sqrt{D}$, ut $\frac{2}{3} - \frac{2}{5}$ ad 1, ſeu 4 ad 15. Et eodem modo quæruntur hujuſmodi aliæ proportiones, quibus denique interpolatio interſeritur. Cujus ope, pulchrè invenitur Area integri ſpatii Ciſſoidalis, ex ſuppoſita Circuli quadratura. Verùm, in partialibus ſegmentis, duo termini generaliter in unum numerum addi non poſſunt. Unde illa numerorum in unum collectorum elegans in totalibus progreſſio, qua nititur interpolatio, ceſſare videtur in partialibus ſeu ſegmentis in univerſum ſumptis. Equidem ſi ultimæ a, aſſignemus certam rationem ad D, rurſus collectio fieri poterit; & fortaſsè tunc novæ progreſſiones orientur; præſertim ſi ultima a certa lege varietur. Neſcio tamen an tunc facile futurum ſit pervenire ad progreſſiones numerorum aptas interpolationi: ſaltem novæ in eo necdum à teipſo publicè exhibitæ inquiſitionis materia foret. Itaque optarem à te oſtendi, ſi commodè fieri poteſt, quomodo Methodum illam tuam ad ſegmenta Ciſſoidis, aliaque id genus, applicari poſſe arbitreris: Quandoquidem ejus rei ſpem facere tuæ literæ videntur.

Jucundum lectu mihi fuit, & ad Hiſtoriam Scientiæ locupletandam notatu dignum videtur, quod indicas, Cycloidis aliquam deſcriptionem jam extare apud Cardinalem *de Cuſa*. Manuſcriptum operum ejus Codicem, quem apud vos haberi memoras, Oxonii, ni fallor, extare eo ipſo indicas.

Ut vicem aliquam reddam (nam *Cuſanus* erat natione Germanus) admonebo, in Recenſione eorum qui calculo valuere olim, quos tua memorat

morat Algebra, prætermitti *Johannem Suiſſet* veſtratem, κατ' ἐξοχὴν dictum *Calculatorem*; quod Gradus qualitatum ſeu formarum calculo ſubjeciſſet. Memini me nonnulla ejus manuſcripta videre in meis itineribus, quæ vel ob tempus Authoris edi digna videbantur. Scis, à *Julio Cæſare Scaligero* aliiſque, magni fuiſſe factum; & alios quoſdam Scholaſticos quædam *ſemi mathematica* ejus exemplo dediſſe, quæ extant.

Qui Algebram tuam in *Actis Lipſienſibus* 1686. p. 283. recenſuit, optavit, ut de arte divinandi occultè ſcripta, (in qua, egregia à te ſpecimina data ait,) aliquid ederes. Verba ejus hæc ſunt:

» Cæterùm, cùm celeberrimus Autor, quemadmodum intelleximus, » excellat in ſolvendis, vel (ut vulgò loquuntur) *deciphrandis* Crypto- » graphematibus: eaque Scientia magnam cum illis quæ hoc opere tradun- » tur affinitatem habeat; præſertim cùm ea quæ hactenus proſtant valdè » ſint imperfecta. Ita, in hoc quoque genere, *Vietæ* laudes æquabit, » imò vincet; ſi duraturo ad poſteritatem ſpecimine oſtendat; quod il- » lum feciſſe ſolo *Thuani* teſtimonio credere cogimur.

His ego nunc meas preces adderem, niſi gravis ætas tua obſtaret; in qua æquum eſt gaudere te ac frui anteactorum laborum gloria, non verò ad novos labores vocari. Siqui tamen adeſſent tibi juvenes ingenioſi & diſcendi cupidi, poſſent, coram, paucis verbis à te multa diſcere, quæ intereſſet non perire.

Poſtremò adjiciam, intellectum mihi ex aliorum libris, præclarè nuper à te fuiſſe ſcriptum de *Sacro-ſancta Trinitate*. Id mihi pergratum fuit ob argumenti dignitatem; quod tractari à Viro compertæ profunditatis & ἀκριβείας, publicè interfuit.

Non dubito quin multas in variis doctrinæ partibus, ſed præſertim in Phyſicis & Mathematicis, cogitationes adhuc premas; quas vel per Saturam & per compendium annotari conſervarique magis optarem, quàm ut antiquos Muſicos Græcos nobis des reſtitutos; qui multo majora ipſe per te potes. Vale. *Dabam Hanoveræ* $\frac{19}{29}$ *Martii* 1697.

III. Epistola Walliſii ad D. Leibnitium.

Vir Nobiliſſime Celeberrimeque.

Literas tuas humaniſſimas Martii $\frac{19}{29}$ Hanoveræ datas, accepi (& exoſculatus ſum) *Martii* 31. ſtilo noſtro, 1697. Hoc eſt, *Apr.* 10. ſtilo novo. Mihique gratulor quòd Nobiliſſimo Viro ego meaque non diſplicuerint. Veniam interim exorare debeo, ſi locorum diſtantia fecerit, ut eruditiſſima tua ſcripta & inventa minùs ego ſciverim aut intellexerim,

 quàm

quàm vellem; & quidem, quis ſit ille tuus *Calculus Differentialis* non ſatis mihi compertum ſit, niſi quod mihi nuper nunciatum eſt, eum cum *Newtoni Doctrina Fluxionum* quaſi coincidere.

Nec pudet me meam hac in parte ignorantiam fateri, qui jam ab aliquot annis contentus fuerim (hac ætate) *lampadem tradere*; aliiſque permittere, ut promoveant ea quæ (ſiqua) ego non infeliciter detexerim.

Quod literas ſcripſeris (in mei gratiam) ad Editores Actorum *Lipſicorum*, favori tuo debeo, & grates habeo.

Quis eorum ille ſit qui mea ſcripta recenſuit in *Actis Lipſicis* pro menſe *Junii* 1696. ego quidem non ſcio; ſed ei gratias habeo. Neque enim eſt cur ego ei ſuccenſere debeam, ſi non (primo intuitu) ſtatim perſpexerit omnia quæ penitiùs rimanti occurriſſent, aut etiam ſint occurſura. Sufficit enim inſtituto ſuo, ut ſumma quæque carpat, & magis obvia; Lectoribus permittendo, ſi penitiora deſiderent, apud Authores indicatos quærere.

Nolim autem exiſtimet quod in gentem veſtram minùs æquo ſim animo; nam ſecus eſt.

Quod Methodos meas in Arithmetica Infinitorum putaverit ad *integras tantùm figuras* pertingere, & non item ad earum *partes*; inde factum credo, quod non ſatis attenderit ad Prop. 66. (ubi docetur, *Ex cognita magnitudine ſeriei integræ, cognoſci magnitudinem ejuſdem obtruncatæ*,) aliaſque quæ huc ſpectant; puta Prop. 67, 68, 69, 70, 71, 72, 108, 109, 110, &c.

Quod autem ad ſpatia *Cycloidalia* partialia non pertigerint meæ methodi, non dixiſſet, ſi ad Mechanicorum cap. 5. prop. 20. advertiſſet; ubi docetur *Semicycloidem Semicirculi totam totius triplam eſſe, & partes partium reſpectivè ſumptarum.* Atque ad eandem formam dictum eſt, Prop. 17, 18, 19, 21, 22.

Et quidem ego primus omnium (eorum qui figuram hanc tractaverunt) Cycloidis ſic in partes ſuas reſolutionem, ſecundùm ipſius Anatomiam veram, oſtendi: Eoque inſignem huic toti negotio affundi lucem: (pariterque in figuris aliquot aliis:) aliiſque anſam dedi, hujus imitatione, figuras alias ſic reſolvendi.

Reſpectivè ſumptarum, inquam: non autem *utcunque ſumptarum*; ſed debito modo ſumptarum, ſecundùm cujuſque Figuræ veram Anatomiam.

Sed inquis, [in Epiſtola tua ad Actorum collectores] *Preli mendo*, (Actorum pag. 254.) *irrepſit vox* Cycloidale, *ubi dicendum erat* Ciſſoidale. (Eſto.) *Totumque Ciſſoidale ſpatium me redegiſſe ad meas Methodos, non autem Partialia.*

Rectè quidem (nempe non in eo ad *Hugenium* tractatu *Epiſtolari.*) Interrogatus enim eram de *Ciſſoide tota* (& ad interrogata reſpondi) non de *partibus*: (quod enim ibi de partibus dicitur, *Hugenius* poſt ſuggeſſit quàm id Reſponſi dederam.)

Sed

Sed ad Mechanicorum cap. 5. prop. 29. idem videas de *Ciſſoidis partibus* præſtitum, quod erat de partibus Cycloidis; & utriuſque Figuræ conſenſum ibidem indicatum. Non autem eadem prolixitate Ciſſoidem ibi proſequor, qua uſus fueram ad Cycloidem, ejuſque ſolida, & ſolidorum ſuperficies, centraque gravitatis omnium, (ut nec alias figuras aliquot,) quia ſic opus in immenſum excreſceret.

Sed Cycloidem fuſiùs proſequutus ſum, ut ſit Paradigmatis loco, ad cujus imitationem poſſit quis (cui libet, & vacat,) Figuras alias tractare, (mutatis mutandis pro cujuſque figuræ charactere,) ſive ex duabus ſive ex *pluribus* figuris implicatis conſtet iſtiuſmodi figura compoſita. Nam methodi meæ ratio eſt ibi ſatis evidens, attentè conſideranti.

Ubi autem notas, *difficultatem* aliquam eſſe in accommodando ea, quæ de Ciſſoide tota dicuntur, ad ejus partes: Dicendum eſt, ingenio opus eſſe (ubi figura *compoſita* eſt, ex pluribus implicatis componentibus,) ad diſquirendum, (ex figuræ conſtructione,) quæ partes hujus, quibus illius componentium figurarum partibus, conſociandæ ſint; (præſertim ubi diſſimili ſitu ponuntur figuræ componentes;) atque tum demum, partibus ſic detectis, accommodandæ ſunt meæ methodi. Quod à me factum videas in Cycloide, Ciſſoide, Conchoide, aliiſque.

Sic ego diſtribuo Semi-Cycloidem (non ut Lanius, ſed ut Anatomiſta) in Semicirculum & figuram Arcuum; quibus ſeparatim meas methodos adhibeo: Eſt utique Cycloidis ordinata, $f = a + s$, aggregata ex arcu & ſinu recto; ejuſque continua incrementa (quas vos Differentias dicitis) aggregata ex incrementis horum. Et, ubi ad curvam ipſam reſpicitur, obliquitas Tangentis in quoque puncto (propter figuram arcuum ex loco ſuo detruſam & luxatam, ob interjectum Semicirculum) quæ eſt iſtius puncti obliquitas (angulum intelligo quem ad axem facit illa Tangens,) componitur ex Tangentium utriuſque figuræ obliquitatibus (& quidem ſi tertia quartave interponeretur figura, componeretur ex omnium obliquitatibus.) Unde originem ducit *Newtoni Doctrina Fluxionum*, & veſter (ſi eum ſatis intelligo) *Calculus Differentialis*. Sic Conchoidem dirimo in Quadrantem Circuli, & figuram tangentium. Ordinata in Ciſſoide, eſt ad ordinatam in Semicirculo, & interceptum Axem, tertia continuè proportionalis: Atque ex talibus tertiis conflatur ea figura.

Quod meam *Interpolandi* methodum ſpectat; ea minima pars eſt mearum methodorum de Infinitis; atque tum demum in ſubſidium advocatur, cùm intervenit *Radix Univerſalis*, (ſive Binomii, ſive Apotomes.) Quo caſu non expedienda res videtur (veris numeris) niſi per eam quàm ego voco *Continuam Approximationem*; alii, *ſeriem convergentem*; alii, *ſeriem infinitam*. Quæ præſumit (quod neſcio an me prior quiſpiam animadvertit) Æquationes intermedias inter (quas vocamus) Laterales, Quadraticas, Cubicas, &c. Ubi autem non talis intervenit *Radix Univerſalis*; directè procedunt meæ methodi.

Ubi dicitur, *Nicolaum Mercatorem primum eſſe qui Quadraturam aliquam dedit per Seriem Infinitam*: Vide annon mea talis ſit, Ar. Infin. pr. 191. $\square = \frac{3\times3\times5\times5\times7\times7\times9\times\;9\times\;\&c.}{2\times4\times4\times6\times6\times8\times8\times10\times\;\&c.}$

Et *Brounkeri* $\square = 1\,\frac{1}{2\,\frac{9}{2\,\frac{25}{2\,\frac{49}{2\,\frac{81}{2}\,\&c.}}}}$

Sed & omnes mearum tabellarum ſeries, in Arithmetica Infinitarum, ſunt *Series Infinitæ*; & earum plurimæ quales quæ vobis dicuntur (novo nomine) ſeries *Tranſcendentales*.

Nolim utique ut Clariſſimo Viro fraudi ſit nova compellatio. Nam quas ego vocaveram *Continuas Approximationes*; vocat *Jacobus Gregorius*, *Series convergentes*; & *Newtonus*, *Series infinitas*; ſed res eadem eſt. Sic quod ego vocaveram *Centrum percuſſionis*, vocat *Hugenius* (novo nomine) *Centrum oſcillationis*; ſed eadem res eſt. Et *Fermatii Hyperbolæ infinitæ*, eædem ſunt cum meis *Seriebus reciprocis*. Et *Galilæi Cycloides*, *Merſenni Trochoides*, mea *Cyclois*, & *Cuſani* Curva (quocunque nomine dicatur) ſunt res eadem. Sic rectificata Curva *Nelii*, & Curva *Heuratii*, & Curva demum *Fermatii*, eadem eſt cum mea *Paraboloide ſemi-cubicali.* Et Gallorum *Socia Cycloidis* eſt ea Curva quæ (mihi) terminat figuram *Sinuum rectorum.* Et, ni fallor, (ſic ſaltem mihi nunciatum eſt,) *Newtoni Doctrina Fluxionum*, res eadem (vel quam ſimillima) quæ vobis dicitur *Calculus Differentialis*: Quod tamen neutri præjudicio eſſe debet. Et vide annon *Fermatii* Methodus *de Maximis & Minimis* (quæ qualis ſit non certus ſcio, nec ſcio an uſpiam ſit publici juris facta) non ſit reapſe idem proceſſus quem ego adhibeo (nominis ignarus) in Parabolæ, Hyperbolæ, Ellipſeos, (aliarumque Curvarum) Tangentibus inveſtigandis (in Tractatu de Conicis Sectionibus & alibi,) ſic variandus ut cujuſque curvæ character poſtulat: Qui (ni fallor) *Apollonio* dicitur περὶ μοναχῶν. Eſtque, Curvarum duarum tactus, punctum illud quo Recta utramque tangit.

Suiceti (an *Suiſſeti*) nomen (ni fallor) *Rogerus* fuit, (certè, non *Johannes*,) & neſcio an quicquam præſtiterit in Algebra; ſed erat vir alias ſubtilis ingenii.

Cuſani figuram Cycloidis, tranſcriptam habebis ex Codice MS, qui hic habetur in *Saviliana* Bibliotheca Mathematica, (ex dono meo.)

Quod memoras, de Arte divinandi occultè ſcripta, eſt ea res non certis regulis coercenda, propter infinitam varietatem ciphras ponendi, (& quarum difficultas, jam ſatis ardua, quotidie creſcit;) quæ à conjecturis principio poſitis inchoanda eſt; quæ prout ſuccedere vel non ſuccedere deprehenduntur, vel proſequendæ ſunt vel mutandæ, donec quid certi conſtat. Sed tanti laboris res eſt, ut vix ſit qui velit ediſcere. Miſi tamen

(ex

(ex multis) exemplar unum ; Epiſtolæ ciphris ſcriptæ , prout ea ad manus meas pervenit intercepta , cum ejuſdem expoſitione à me præſtita , ad D. [*Menkenium*] Editorem *Actorum Lipſicorum.* Quod ad manus ejus perventurum ſpero (ſaltem opto) quamvis neſciverim illum de nomine compellare.

Quæ ego de *Sacra Trinitate* conſcripſi (lingua Anglicana) quomodo ad te tranſmittam neſcio : Siquis autem ex Bibliopolis veſtris commercium habeat cum noſtris Londinenſibus , haberi poſſunt apud *Thomam Parkhurſt*, Bibliopolam Londinenſem , qui ea edidit.

Quando autem ego alicubi inſinuaverim *Cavallerii Geometriam Indiviſibilium* non aliam eſſe quàm Veterum Methodum *Exhauſtionum* compendioſiùs traditam ; nolim quis id à me dictum putet in ejus derogationem, ſed in ejuſdem confirmationem. Cùm enim objecerint aliqui , non id eſſe Geometriæ conſonum , ut (verbi gratiâ) ex lineis rectis (nullius latitudinis) compleri cenſeatur ſuperficies plana. Per Rectas haſce (commoda interpretatione) intelligenda dixerim Parallelogramma , quorum latitudo ſit infiniteſima pars altitudinis totius figuræ ; Qualibus , numero infinitis , compleri poſſe ſpatium illud , ſatis Geometricè dici poſſit ; ſaltem , ex talibus fieri figuram vel inſcriptam vel circumſcriptam , quæ inter ſe differant (adeoque & ab expoſita figura) dato minus. Atque ſic intellectum, eodem fundamento niti cum Veterum exhauſtionibus ; nec magis convelli poſſe quàm illæ , aut ἀγεωμετρησίας incuſari. Qua benigna interpretatione non læſum iri putem *Cavallerii* methodum , ſed adjutum ; ut quæ compendioſiùs tradat aliorum prolixiores exhauſtiones. Atque hæc ſunt quæ ad humaniſſimas tuas literas reſpondenda cenſui. 6. *April.* 1697.

IV. Epistola D. Leibnitii ad Wallisium.

Vir plurimum Reverende & Celeberrime ,

ALteræ tuæ Literæ , non minùs ac priores , multis nominibus mihi gratiſſimæ ſunt. Docent enim ſemper aliquid quod faciat ad ſcientiæ incrementum. Sed ſi vel hoc unum oſtenderent , valere te & noſtri amanter meminiſſe ; plurimum voluptatis afferrent. De æquitate tua , & benevolo etiam in noſtros animo , nunquam dubitavi , ejuſque indicia dudum habui ; atque adeo & ipſe , data occaſione , quanti tua in Scientias merita facerem , oſtendi.

Tuam Methodum Interpolationum inprimis magni facio ; & puto aliquid habere adhuc in receſſu. Vellemque adeo produci ipſam longiùs ad alia binomia , trinomia &c. tum etiam ad partes ipſas figurarum. Has enim

enim hactenus, ni fallor, non hac ſed alia ratione conſequeris, quantum ex tua reſponſione colligo.

Tametſi vocabulis generaliùs acceptis pro iiſdem haberi poſſint *continuæ appropinquationes*, & *ſeries convergentes*, & *ſeries infinitæ*; Ego tamen, docendi causâ, multis modis hæc diſtinguere ſoleo. Non omnis *continua appropinquatio* continuò exhibet incognitæ valorem exactum, omnes appropinquationes ſimul comprehendentem. Et valor ille exactus qualis tuus $\square = \frac{3,\ 3,\ 5,\ 5,\ 7,\ 7,\ 9,\ 9,\ \&c.}{2,\ 4,\ 4,\ 6,\ 6,\ 8,\ 8,\ 10,\ \&c.}$ vel *Brounkerianus*, (cujus non ſatis perſpexi originem,) $\square = 1\ \frac{1}{2}\ \frac{9}{2}\ \frac{25}{2}\ \frac{49}{2}$ &c.

A me tamen diſtinguuntur, à valore exacto per *ſeries infinitas* propriè dictas, quæ per meram terminorum collectionem conflantur; quales, ni fallor, primus dedit *Nicolaus Mercator*, ampliavit *Newtonus*, atque ego quoque excolui nonnihil.

Interim vellem, *tuas*, & *Brounkerianas* exprimendi rationes, & *Hugenio-Gregorianam* quoque ſerierum convergentium methodum, promoveri.

Oſtendit mihi olim *Hugenius*, Pariſiis, *Jacobi Gregorii* perbrevem libellum in 4°, in quo videbatur aliqua contineri promotio ſerierum convergentium, ſed αἰνιγματικῶς· quamquam mihi inſpicere tantùm in tranſitu, non legere vacarit. Vellem, quod ibi deeſt, à Dn. *Davide Gregorio* (ejus cognato) ſuppleri poſſet. Vides igitur unamquamque methodum à me ſuo pretio cenſeri.

Dixi aliquando, in *Lipſienſibus* eruditorum *Actis*, mihi omnes Methodos Tetragoniſticas ad duo ſumma genera reducendas videri: Vel enim colliguntur in unum quantitates infinitæ numero, quantitate incomparabiliter minores toto; Vel, ſemper manetur in quantitatibus toti comparabilibus, quarum tamen numerus infinitus eſt quando totum exhauriunt. Utriuſque Methodi ſpecimina jam dedit *Archimedes*; Sed noſtrum ſeculum utramque longiùs produxit. Itaque, ſtrictiùs loquendo, Methodus *Exhauſtionum*, à Methodo *Indiviſibilium*, diſtingui poteſt: tametſi commune omnibus ſit Principium demonſtrandi; ut error oſtendatur infinitè parvus, ſeu minor quovis dato; *Euclidis* jam exemplo.

Methodum *Fluxionum* profundiſſimi *Newtoni*, cognatam eſſe methodo meæ *Differentiali*, non tantùm animadverti poſtquam opus ejus & tuum prodiit; ſed etiam profeſſus ſum in Actis Eruditorum, & alias quoque monui. Id enim candori meo convenire judicavi, non minùs quàm ipſius merito. Itaque communi nomine deſignare ſoleo, *Analyſeos Infiniteſimalis*; quæ latiùs quàm Methodus *Tetragoniſtica* patet.

Interim, quemadmodum & *Vietæa* & *Carteſiana* methodus, *Analyſeos Specioſæ* nomine venit; diſcrimina tamen nonnulla ſuperſunt: ita fortaſſe & *Newtoniana* & *mea* differunt in nonnullis.

Mihi,

Mihi, conſideratio Differentiarum & Summarum in ſeriebus Numerorum, primam lucem affuderat, cùm animadverterem Differentias Tangentibus, & Summas Quadraturis, reſpondere. Vidi mox, Differentias Differentiarum, in Geometria *Oſculis* exprimi. Et notavi mirabilem analogiam relationis inter differentias & ſummas, cum relatione inter potentias & radices. Itaque judicavi, præter (affectiones quantitatis hactenus receptas $y, y^2, y^3, y^{\frac{1}{2}}, y^{\frac{1}{3}}$, &c. vel generaliter y^e, ſive $[p^e]\ y$, vel potentiæ ipſius y ſecundum exponentem e; poſſe adhiberi novas Differentiarum vel Fluxionum affectiones, $\mathrm{d}^{\overline{\ }}y$, $\mathrm{d}^{\overline{2}}\ y$, (ſeu $\mathrm{d}^{\overline{\ }}\mathrm{d}^{\overline{\ }}y$,) $\mathrm{d}^{\overline{3}}y$, (ſeu $\mathrm{d}^{\overline{\ }}\mathrm{d}^{\overline{\ }}\mathrm{d}^{\overline{\ }}y$, imò utiliter etiam occurrit $\mathrm{d}^{\overline{\frac{1}{2}}}y$, & ſimiliter generaliterque $\mathrm{d}^{\overline{e}}y$.

Hac jam affectione admiſſa, vidi commodè per Æquationes exprimi poſſe quantitates quas à ſua Analyſi & Geometria excluſerat *Carteſius*; & Curvas, quas ille non rectè vocat *Mechanicas*, hac ratione calculo non minùs ſubjici, quàm ab ipſo in Geometriam receptas. Et, quemadmodum Veteres jam Æquationes Curvarum *Locales* obſervaverant, ſed *Carteſius* tamen utilem operam nobis navavit dum eas calculo ſuo expreſſit: ita putavi me non inutiliter facturum, ſi oſtenderem Methodum Curvas ab ipſo excluſas ſimiliter per Æquationes exprimendi; quarum ope omnia de iis certo calculi filo haberi poſſint.

Et licèt fatear, quemadmodum rem ipſam, in Æquationibus curvarum localibus facilioribus, calculo *Carteſii* expreſſam, jam tenebant Veteres; ita rem ipſam, meis Æquationibus differentialibus facilioribus expreſſam, non potuiſſe tibi aliiſque egregiis Viris eſſe ignotam: Non ideo minùs tamen puto & *Carteſium* & *me* aliquod utile præſtitiſſe. Nam antequam talia ad conſtantes quoſdam characteres calculi analytici reducuntur, tantumque omnia vi mentis & imaginationis ſunt peragenda, non licet in magis compoſita abditaque penetrare; quæ tamen, calculo ſemel conſtituto, luſus quidem jocuſque videantur.

Unde jam mirum non eſt, Problemata quædam, poſt receptum calculum meum, ſoluta haberi, quæ antea vix ſperabantur: Ea præſertim quæ ad tranſitum pertinent à Geometria ad Naturam. Quoniam ſcilicet vulgaris Geometria minùs ſufficit, quoties Infiniti involvitur conſideratio; quam pleriſque Naturæ operationibus ineſſe conſentaneum eſt, quo meliùs referat Autorem ſuum.

Hugenius certè, qui hæc ſtudia haud dubiè profundiſſimè inſpexerat, multiſque modis auxerat, initio parvi faciebat calculum meum, nondum perſpecta ejus utilitate. Putabat enim, dudum nota, ſic tantum novè exprimi, prorſus quemadmodum *Robervallius* & alii, initio, *Carteſii* curvarum calculos parvi faciebant. Sed mutavit poſtea *Hugenius* ſententiam ſuam, cùm videret, quàm commoda eſſet hæc exprimendi ratio, & quàm facilè per eam res involutiſſimæ evolverentur. Itaque maximi eam

à ſe fieri aliquot ante obitum annis, non tantùm in privatis ad me aliosque literis, ſed publicè quoque eſt profeſſus.

Cæterum *Tranſcendentium* appellationem, nequid à me præter rationem in phraſi Geometrica novari putes, ſic accipio ut Tranſcendentes quantitates opponam Ordinariis & Algebraicis: Et Algebraicas quidem vel Ordinarias voco Quantitates, quarum relatio ad datas exprimi poteſt Algebraicè; id eſt, per Æquationes certi gradus, primi, ſecundi, & tertii, &c. quales quantitates *Carteſius* ſolas in ſuam Geometriam recipiebat: Sed *Tranſcendentes* voco, quæ omnem gradum Algebraicum tranſcendunt. Has autem exprimimus, vel per valores infinitos, & in ſpecie per ſeries, (neque enim ipſas ſeries, Tranſcendentales voco, ſed Quantitates ipſis exprimendas;) vel, per Æquationes finitas; eaſque vel Differentiales (ut cùm Ordinata Cycloidis methodo mea exprimitur per Æquationem $y = \int \frac{x\,dx}{\sqrt{ay - yq}}$;) vel Exponentiales, (ut cùm incognita quædam x exprimitur per hanc Æquationem $x^x + x = 1$.) Et quidem Tranſcendentium exponentialem, pro perfectiſſima habeo; quippe, qua obtenta, nihil ultra quærendum reſtare arbitror; quod ſecus eſt in cæteris.

Primus autem, ni fallor, etiam *Exponentiales* Æquationes introduxi, cùm ignota ingreditur exponentem. Et jam Anno primo *Actorum Lipſienſium*, ſpecimen dedi in exemplo quantitatis ordinariæ, tranſcendentaliter expreſſæ; ut res fieret intelligibilior; Nempe, ſi quæratur $x^x + x = 30$, putet $x = 3$ ſatisfacere; cùm ſit $3^3 + 3 = 27 + 3 = 30$.

Hæc ad te fuſius ſcribere volui, Vir egregie, tum ut rationem tibi redderem Nomenclaturæ meæ, atque ὀνοματοποιΐας, neve videar ſolis vocabulis quæſîſſe novitatem; (ut quos *Trochoidem* pro *Cycloide* dixiſſe notas;) tum verò maximè, ut gradus & diſcrimina Methodorum noſtrarum, aliarumque, ex mente mea, explicatius cognoſcerentur; proficereque mihi liceat, ex judicio tuo. Cujus ea vis eſt & penetratio, ut pro certo habeam plurimas tibi ſupereſſe præclaras cogitationes; quibus, licet nondum abſolutis, vellem non fraudari poſteritatem.

Itaque, licèt facilè agnoſcam *Cryptographematum* ſolutionem certa methodo abſolvi non poſſe; Specimina tamen ejus aliqua à te extare proderit, quibus ipſa Ars ratiocinandi occultaque perveſtigandi augeatur.

Tua de *Trinitate* ſcripta, & quicquid omnino tuum eſt, ut ad nos deferatur operam dabo.

Unum tantùm de *Suiſſeto* veſtro adhuc addam. Verum eſſe, quod ais, Algebram non tractaſſe; ſed cum, initio operis de Algebra tui, etiam de inventione Notarum Arithmeticarum, variarumque calculandi rationum ab Algebra differentium, ageres; poteras *Suiſſeti* veſtratis, ſi in mentem veniſſet, optimo jure facere mentionem. Itaque nunc ſuggeſſi, ut aliquid

pro

pro *Cuſano* noſtrate redderem ; pro cujus figura nunc à te miſſa gratias ago. Vale diu , & ſave. *Dabam Hanoveræ* , 28. *Maii* 1697.

P. S. Unum addo : Placuiſſe mihi phraſin acutiſſimi *Newtoni* , qui *Geometrice - Irrationalia* vocat , quæ *Carteſius* in Geometriam ſuam non recipit. Sed hæc à *Tranſcendentibus* diſtinguo , tanquam genus à ſpecie. Nam illa *Geometrice-Irrationalia* duûm generum facio. Alia enim ſunt gradûs certi , ſed Irrationalis ; quorum Exponens eſt Numerus ſurdus , ut $\sqrt[\sqrt{2}]{2}$, ſeu poteſtas de 2 cujus exponens ſit $\frac{1}{\sqrt{2}}$; & hæc voco *Interſcendentia* ; quia Gradus eorum cadit inter gradus Rationales : poſſent etiam , ſtrictiore ſenſu , Geometricè (vel , ſi mavis Algebraicè) Irrationalia appellari. Alia verò ſunt gradûs indefiniti , ut x^y : & hæc magis propriè *Tranſcendentia* appello. Et tale problema eſt , *Rationem vel Angulum in data ratione ſecare.*

Siqua eſſet occaſio Dn. *Newtono* , ſummi ingenii Viro , (fortè per amicum) ſalutem officioſiſſimam à me nunciandi , eumque meo nomine precandi , ne ſe ab edendis præclaris meditationibus diverti pateretur ; hoc beneficium à te petere auderem. [*Sequebantur pauca , quæ rem Mathematicam non ſpectant.*]

Amicus quidam meus , Linguarum ſtudioſus , libenter noſſe vellet , an extet alicubi liber *Adami Bohoriz* , cui titulus *Horæ Arcticæ de antiqua Lingua Carniolana* ; quoniam aliqua ex eo loca obtinere optaret. Fac mihi , quæſo , hanc gratiam , & apud vos inquiri cura , an alicubi lateat.

V. Epistola Wallisii ad D. Leibnitium.

Nobiliſſime & Celeberrime Vir ,

Literas tuas pergratiſſimas *Maii* 28 datas accepi jam ante aliquot ſeptimanas. Cùm autem inibi de pluribus quæris , non ſtatim vacabat (aliàs item occupato) ſingulis reſpondere ; & metuo ne jam non poſſim omnibus.

Continuas approximationes , *Series convergentes* , *Series infinitas* , quod ſpectat , (& ſiqua ſunt ejuſmodi alia ,) quæ mihi videntur tantundem ſignificare ; cùm tamen id (quicquid ſit) plurimis modis fieri poſſit (& quidem factum eſt ,) non repugno quin tu ſingulis modis ſua affigas nomina , aut hæcce nomina (tantundem ſignificantia) pro arbitrio diſtinguas ; præſertim ſi vacet etiam diſtinctè definire , quid quoque nomine ſignificatum velis.

Queſtus utique ſum aliquoties, quòd Viri Magni ſuas Methodos nomine tenus venditant (quas apud ſe clam celant;) non autem in publicum exhibent, quænam illæ ſint. Sic *Fermatius* antehac methodum ſuam de *Maximis & Minimis*; *Robervallius* ſuam de *Compoſitione motuum*; *Freniclius* ſuam de *Excluſionibus*; neſcio autem an eorum quiſquam ſuam in publicum diſtinctè tradiderit; ſed hariolandum nobis permiſerunt, quales fuerint; aut, ut novas comminiſcamur ipſi. Et ſiquid poſt factum eſt, imperfectè factum eſt.

Optaverim item ut tibi vacet tuum *Calculum Differentialem*, & *Newtono* ſuam *Fluxionum methodum*, juſto ordine exponere; ut quid ſit utrique commune, & quid interſit diſcriminis, & utramque diſtinctiùs, intelligamus.

Quod non omnes *continuæ appropinquationes* tandem exhibent exactum valorem, omninò verum eſt. (Sic enim Hyperbola, ad parallelam rectam, ultra Aſymptoton poſitam, continuò appropinquat; ſed, non ad dato minus.) Adeoque ego dicere ſoleo *Approximationes*; hoc eſt, quæ ita *quam-proximè* accedunt, ut dato minus diſtent: Ut quæ in infinitum continuatæ cenſendæ ſunt coincidere. Taleſque ſunt quas ego indicavi.

Si tu id intereſſe putes, quod tua (approximandi methodus) per *Additionem* procedat; mea, per continuam *Multiplicationem*: id facilè accommodabitur. Quippe tantundem eſt, ſive ego dixerim, $\square = \frac{9\times25\times49\times\&c.}{8\times24\times48\times\&c.}$ ſive $\square = 1 + \frac{1}{8}A + \frac{1}{24}B + \frac{1}{48}C + \&c.$ Res eadem eſt; ſed, ſub notatione diverſa. Et, utrovis modo, proceditur ad dato minus; quod (proceſſu in infinitum) tandem evaneſcit. Et in *Brounkeriana* pariter.

Ego quidem, in ſcriptis meis, plurimas adhibeo *Methodos*, (& pro nova quaque difficultate novam comminiſcor,) quas attentus Lector facilè animadvertat & imitetur; ſed, de imponendis nominibus, parum fui ſolicitus; fortaſſe minùs quàm oportuit.

Sic, verbi gratia, anguli contactûs ad circulum, nullius eſſe magnitudinis, aſſerui jam pridem; non quidem omnium primus, ſed *Peletarii* doctrinam, (authoritate *Clavii* aliorumque oppreſſam,) vindicavi. Cumque eadem ſit ratio, hac in re, Curvarum omnium; hinc meritò concludamus, angulum contactûs ad quamvis curvam nullius eſſe magnitudinis; (quam voces, *Methodum Contactuum.*) Atque hinc ſtatim colligitur, cujuſcunque Curvæ quodvis punctum eam habere directionem, obliquitatem, inclinationem, (& quæ ſunt hujuſmodi,) quæ eſt rectæ ibidem Tangentis; poteſtque propterea conſiderari, ut pars infiniteſima iſtius Rectæ. Atque hinc ortum ducit, tota de Curvis rectificandis doctrina. (Quam ego primus inſinuabam ad Prop. 38. *Ar. Infin.*) Eademque porrò ampliari poteſt ad complanationem Curvarum ſuperficierum.

Sed & eadem contactuum methodus (ad ſpeculationem Arithmeticam redacta)

redacta) adhiberi poteſt, ubicunque eſt plurium magnitudinum (cujuſcunque generis) ſuperfœtatio; quarum una aliqua (vel etiam plures) ſic ſenſim decreſcit ut tandem evaneſcat. Adeoque, ampliori nomine, dici poterit, Methodus de *Magnitudine evaneſcente*; quæ accommodari poteſt mille modis pro re nata.

Porrò, ne divaricationis, in contactibus conſpicuæ, nulla ratio habeatur; hanc dico *menſuram* eſſe *curvedinis*, intenſivè conſideratæ: Puta, qua ratione (in circulis) totus ambitus eſt ambitu minor, (aut arcus ſimili arcu;) ea ratione eſt illa peripheria (intenſivè) magis curva: ut quæ habet tantundem curvedinis in minori quanto: quæ vocetur *Methodus Curvedinum.*

Quemadmodum verò Peripheriæ punctum quodvis aliam atque aliam habere cenſeatur directionem; ſic, in curvis diſſimilaribus, alia atque alia eſt, in ſingulis punctis intenſiva curvitas, ſeu gradus curvedinis aut flexionis: Atque ut illa æſtimanda eſt ex Recta Tangente; ſic hæc, ex Circulo ibidem exoſculante. Nam, ut cujuſque puncti, in Recta, eadem eſt Directio: ſic eſt cujuſque puncti, in eadem peripheria, æquabilis curvedo: Quod (ex curvis omnibus) ſoli circulo, & ſpirali circa cylindrum, convenit.

Hinc ortum ducat tuus *Calculus Differentialis*, & *Newtoni Methodus Fluxionum;* ſi ego utramque methodum rectè intelligo. Poteſtque utraque (ſecluſa lineæ curvæ conſideratione) Arithmetica ſpeculatione conſiderata, aliis item magnitudinibus, pro re nata, accommodari.

Porrò; Quod ſit in gravi quoddam (quod dicitur) *Centrum Gravitatis*, ſupponunt omnes, ſaltem Mechanicorum Scriptores; (quod neſcio an quiſquam me prior demonſtravit;) nempe punctum aliquod, per quod ſi grave plano utcunque ſecetur, erunt utrinque ſegmenta æquè gravia. Quod Centrum variis modis quærunt. Hoc eſt, quærunt quaſi communem totius gravitationem quæ reſpectivis particularum omnium gravitationibus æquipolleat. Indeque reputari poteſt totum grave tantundem pendere, ponderare, quaquaverſum ferri ſeu moveri, (aliaque) acſi totum foret in illo centro poſitum. Hoc ego vocaverim (ampliore nomine) *Medium Arithmeticum*: Et, pro doctrina de Centro Gravitatis, Methodum dixerim de *Medio Arithmetico.* Quam ego multis modis adhibeo.

Sic, ſi ſuper plana baſi erigi intelligatur corpus columnare, plano obliquè ſectum; erunt, ad ſingula baſis puncta, aliæ atque aliæ Altitudines; quæ omnes ſimul ſumptæ æquipollent communi alicui altitudini ſuper totam baſin; quam ego appellaverim *altitudinem Arithmetice-mediam*; Eſtque ea, quæ baſis centro gravitatis imminet; quæ, in baſin ducta, exhibet ungulæ magnitudinem. Quam voces, *Methodum Ungularum.* Eademque valet de linea (recta aut curva) in plano baſis poſita. Poteſtque facilè accommodari ungulis inclinatis.

Pariter, ſi planum illud intelligatur circa datam in eodem plano rectam ut Axem converti, quo fiat ſolidum converſione (integra an partiali) factum: Erit hoc ſolidum (ex variarum particularum converſionibus factum) tantundem acſi ferri intelligatur tota baſis, media quadam æquipollenti converſione: Et quidem æquale erit ungulæ ſuper ea baſi erectæ (aciem habenti in Axe illo) cujus altitudo Arithmetice media ſit æqualis arcui centro gravitatis deſcripto, (& partes partibus reſpectivè.) Quam voces, *Methodum Converſionum.* Eademque valet de curva rectave linea, in illa baſi, ſic circumlata.

Eademque Methodus (de Medio Arithmetico) pluries repetita, & (pro re nata) debitè adhibita, exhibebit centrum gravitatis ungularum, & ſolidorum converſione factorum, centrum percuſſionis (aut oſcillationis centrum,) aliaque innumera; quorum magnam copiam videas in Mechanicis aliiſque ſcriptis meis.

Porrò; Jam olim notum eſt, Aream Circuli æqualem eſſe, facto ex radio in ſemiſſem Peripheriæ; ſive dimidio facti ex radio in Peripheriam: Idemque valet de Sectore ad Circuli centrum. Eſt enim Circuli ſector, haud aliud quàm Rectangulum convolutum; contracta ſcilicet baſe in unum punctum, flexaque recta verticis in arcum ipſi æqualem: unde quæ erant in Rectangulo partialia Parallelogramma, jam fiunt totidem Triangula ejuſdem baſis & altitudinis; adeoque ſingula ſingulorum dimidia, & totum totius.

Quod pariter valet in aliis figuris convolutis, (de figuris planis intellige;) nempe quod convoluta eſt evolutæ dimidia. Quam voces, *Methodum Convolutionis & Evolutionis.*

Sed figura ſolida ſic complicata, eſt explicatæ Triens: ut eſt Sector ſphæricus Cylindri: Quam voces, Methodum *Complicationis & Explicationis.*

Sic Spiralis Archimedea, eſt Parabola convoluta; atque hæc, evoluta ſpiralis: & curva Parabolica, Spirali æqualis. Aliæque Spirales, plurimæ, ſunt Paraboloides convolutæ: ſed & aliarum figurarum plurimarum ſimiles fieri poſſunt convolutiones, de quibus eadem valet Regula.

Sic ſemi-circulus, puta ad Axem ſemi-Cycloidis poſitus, ſi diſtribuatur in Sectores ad peripheriam coeuntes in baſe Cycloidis, eſt figura convoluta, (contracta baſe ſemi-cycloidis in unum punctum,) quæ ſi evolvatur, (ut quæ erant Arcuum chordæ in punctum coeuntes jam fiant parallelæ rectæ,) figura ſic evoluta, erit quam ego voco *Trilineum reſtitutum*, quod itaque eſt ſemi-circuli duplum, (& partes partium reſpectivè ſumptarum.) Illudque Trilineum quod cum ſemi-circulo complet ſemi-cycloidem, nil aliud eſt quàm hoc Trilineum, luxatum; nempe ex ſuo loco detruſum propter ſemi-circulum ipſi & axi ſuo interjectum: quod itaque ſi (exempto ſemi-circulo) ſuo loco reſtituatur, erit ipſum Trilineum

neum reſtitutum, cui itaque æquatur. Quam voces, Methodum *Luxationis & Reſtitutionis.*

Perque harum Methodorum ſuperfœtationem ſeu compoſitionem, habetur genuina ſemi-cycloidis quadratura. Quippe Trilineum luxatum æquale eſt reſtituto; eſtque hoc, duplum ſemi-circuli (utpote figuræ convolutæ;) & ſimul utrumque, ſemi-circuli triplum.

Eſtque hæc, luxationis & reſtitutionis methodus, res maximæ utilitatis in figuris compoſitis menſurandis.

Porrò; Magnitudinis cujuſque *Momentum* (reſpectu habito ad converſionis Axem aut quod hujus inſtar eſt) appellare ſoleo, id quod fit ex magnitudine ejuſque diſtantia, (aut magnitudine centrique gravitatis diſtantia) ab illo Axe. Adeoque habitis magnitudine & diſtantia, habetur momentum; vel ex momento & earum altera, habetur reliqua. Quam voces, *Methodum Momentorum.*

Porrò; eadem figura (plana aut ſolida) conſiderari poteſt ut ſecta rectis planiſve vario ſitu poſitis; quæ quidem ſectiones cum eandem figuram exhibeant omnes, poteſt altera pro altera ſubſtitui ut fert occaſio. Exempli gratia; Trilineum illud (quod voco) *Reſtitutum*, concipi poteſt ut ſecta rectis baſi parallelis, atque (ſic ſecta) eſt figura *Arcuum*; aut rectis Axi parallelis, eſtque (ſic ſecta) figura *Sinuum verſorum.* Item, ſi *ſemi-cycloidi* inſiſtat ſemi-ſolidum ſemi-converſione factum; concipi poteſt hoc ſolidum ſecari planis Cycloidis baſi parallelis; aut planis Cycloidis Axi parallelis; aut etiam planis Cycloidis plano parallelis: quarum nunc hæc, nunc illa, nunc iſta, poſſit eſſe calculo aptior; quæ itaque poſſit præ aliis eligi, aut earum vice ſubſtitui: quam voces Methodum *Contra-ſectionum.*

Suntque hæc aliquod ſpecimen Methodorum mearum paſſim adhibitarum; quas ſi omnes proſequi vellem, & aptis inſignire nominibus, nimius eſſem: Sed quas attentus lector, etiam non monitus, facilè advertat & imitetur: & (imitando) faciat *Regulas generales.* Suntque illæ vel ſeparatim adhibendæ, vel pluries repetendæ, vel etiam inter ſe, & cum aliis, variis modis immiſcendæ & componendæ, prout fert occaſio; quod & à me factum eſſe, paſſim videas.

Meas, in Arithmetica Infinitorum, Series infinitas, quod ſpectat; nempe, quæ ſunt, ut numeri naturali ordine procedentes ab 0 inchoati, in infinitum, (ſed quarum ultimus terminus, puta U, ſupponitur datus;) vel in horum ratione duplicata, triplicata, aliaſve multiplicata, aut ſubmultiplicata, aut ex his utcunque compoſita, aut ſecundùm quemcunque Exponentem deſignanda; puta a^p: Ego eas omnes ad hanc reduxi regulam generalem; nempe Aggregatum totius ſeriei infinitæ, ad terminum ultimum toties poſitum, (puta ad mU, eſſe, ut 1 ad $p+1$ (Poteſtatis exponentem unitate auctum,) quæcunque ſit ea poteſtas p: (quæ eſt una

ex

ex tuis Æquationibus *Tranſcendentalibus.*) Quippe ego, præter poteſtates olim receptas, puta *latus*, *quadratum*, *cubum*, &c. (per numeros integros exponendas;) poteſtates intermedias cenſui conſiderandas (&, credo, primus;) & conſequenter, inter receptas Æquationum Analyticarum formulas, *lateralem*, *quadraticalem*, *cubicalem*, &c. intelligendas eſſe, intermedias quotlibet; quas (credo) nemo priùs conſideravit; quales ſunt (ni fallor) quas tu *Interſcendentes* vocas. Indeque (quod tu bene notas) ampliatur Curvarum Geometricarum numerus, ultra quas *Carteſius* eo nomine dignatus eſt.

Verùm ego *Carteſio* facilè permiſerim ut definiat ipſe, quid velit ille per *curvas Geometricas* apud eum intelligi, licet eam compellationem nos latiùs extendamus. Nam eandem vocem alii aliter definire ſolent. Quippe *Triangulum* apud *Euclidem* (de ſolis Rectilineis intellectum) aliud ſignificat quàm apud Sphæricorum ſcriptores; Item *Conus* & *Cylindrus*, aliter apud *Euclidem*, (de ſolis erectis;) aliter apud *Apollonium*, alioſque, qui Scalenos admittunt. Atque *Euclides* ipſe, aliter in libro 5°, aliter in 7°, definit *Proportionalia.*

Has meas ſeries integras (figuris integris aptatas) non video quin tu ſatis probas; ſed de figurarum partibus, hæſitas; an ad *figuræ partes* accommodanda ſit hæc methodus.

Verum, de partibus, id oſtenſum eſt, pariter procedere, ad *Arith. Infin.* p. 66. & ſequentes. Et quidem, quoties figura procedit ſecundùm unam aliquam ejuſmodi ſeriem (quæcunque demum ea ſit,) nulla eſt difficultas; quod videas ad pr. 67. pluresque alias ſequentes.

Ubi autem figura compoſita eſt, ſecundùm plures ſeries; ingenio opus eſſe dixi, quo dirimatur figura ſic compoſita, in ſui partes componentes, (quod aliter atque aliter faciendum eſt, prout cujuſque figuræ natura poſtulat,) & partibus, ſic diremptis, ſeparatim accommodanda eſt hæc methodus, ubi locum habet.

Quod ſi non ſatis aſſequaris, ſic accipe. Si menſurandum veniat Circuli vel ſemi-circuli ſegmentum: non protinus à totius circuli vel ſemicirculi menſura procedendum eſt immediatè ad menſuram ſegmenti, per has ſeries; (quia non procedunt continua ſegmenta ſecundùm aliquam hujuſmodi ſeriem ſimplicem:) ſed conſiderandum eſt ſegmentum, ut ſumma vel differentia Sectoris & Trianguli; (eſt utique circuli ſegmentum, idem ac circuli ſector, addito, vel dempto, reſpectivè Triangulo:) quorum utrumque (ſeparatim) eſt hujuſmodi Series infinita; & quidem primanorum ſeu lateralium: Nempe Sector ex Arcubus, & Triangulum ex Rectis, Arithmeticè proportionalibus. Quæ duæ ſeries ſeparatim tractandæ ſunt (& inconfusè) in tota de ſegmento tractatione, eiſque operationibus quæ ipſum ſpectant. Quam voces Methodum *Diſtributionum.*

Pariter

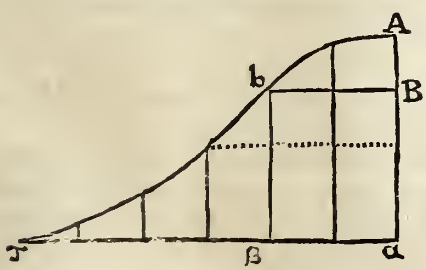
Pariter in ſemi-cycloide: Componitur hæc figura, ex ſemi-circulo, & trilineo luxato: ejuſque ordinata componitur ex Arcu ejuſque Sinu recto; puta $o = a + s$; ejuſque continua incrementa æquantur continuis incrementis horum; hoc eſt (in notatione tua) $d\bar{\ }o = d\bar{\ }a + d\bar{\ }s$; vel (in notatione *Newtoni*) $o = a + s$. Item ordinatarum quadrata, $o^2 = a^2 + 2as + s^2$. Pariterque in omnibus quæ ſequuntur operationibus huc ſpectantibus, ſeparatim tractanda ſunt a & s; ut à me factum videas in Tractatu de *Cycloide*, eoque de *Motu*, cap. 5. pr. 20, 21, &c.

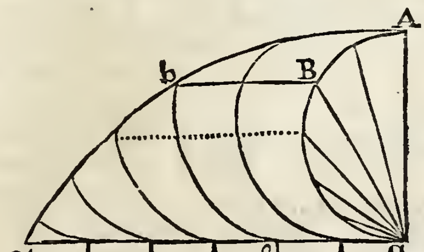
Necdum tamen locus eſt adhibendis hiſce meis ſeriebus; quia neque a neque s hic ſumuntur Arithmeticè-proportionales, (ſed qui congruunt ipſis v ſinibus verſis Arithmeticè-proportionalibus,) qui itaque ſunt adhuc reſolvendi priuſquàm ſeriebus hiſce locus erit. (Quod quomodo factum ſit, in proceſſu noſtro videas.) Atque tandem, ſingulas portiones ſemi-cycloidis debitè ſumptas, ſingulis portionibus ſemi-circuli reſpectivis, eſſe ut 3 ad 1.

Quippe, in tam perplexo negotio, pluribus methodis opus eſt, quarum altera in alterius ſubſidium veniat: & magis adhuc quum ad ſolida & ſemi-ſolida ſegmentorum variis modis converſione facta ventum eſt, eorumque momenta & centra gravitatis.

Sed ſimpliciſſimus modus quadrandi Cycloidem (ſi nihil porrò quæreretur) eſt quem modò indicavi; nempe, ſi ſemi-circulus ad Cycloidis axem poſitus, diſtribuatur in Sectores, coeuntes (non ad centrum, ſed) ad Peripheriam (circuli generantis) in ipſa Cycloidis baſe; erit hæc, figura (ex triangulis) convoluta; hujuſque evoluta (ex totidem rectangulis ejuſdem baſis & altitudinis) eſt *Trilineum* (quod voco) *reſtitutum*; quod itaque eſt ſemi-circuli duplum, (& partes partium reſpectivè;) idemque, *Luxatum*, (interpoſito ad axem ſemi-circulo,) eſt trilineum illud quod cum ſemi-circulo complet ſemi-cycloidem; adeoque ſemi-cyclois (ex ſimul utriſque compoſita) eſt ſemi-circuli tripla; & partes partium reſpectivè.

Quippe ſi omnia *Triangula* α B (in α coeuntia) ſemi-circulum complen-





tia, (ejuſve portionem quamlibet, intelligantur expandi in totidem *Rec-*

tangula β b, (triangulorum dupla;) fiet (quod voco) *Trilineum reſtitutum*, ſemi-circuli duplum, (& partes partium reſpectivè:) Atque hoc Trilineum, interpoſitu ſemi-circuli *Luxatum*, eſt ipſiſſimum illud trilineum, quod, cum ſemi-circulo, complet ſemi-cycloidem: quæ eſt itaque ſemi-circuli tripla; & partes partium, reſpectivè ſumptarum, triplæ. Eſt utique B b trilinei *Luxati*, & B b trilinei *Reſtituti*, eadem ubique; ipſique *Arcui* B A æqualis.

Similiter ego diſtribuo ſemi-conchoidem, in Circuli quadrantem, & figuram Tangentium luxatam; aliaſque figuras compoſitas, ſimiliter, pro cujuſque compoſitione.

Spatium Ciſſoidale, reſolvitur in ſemi-circulum & ſectores (contrario ſitu poſitos ad oppoſita Diametri extrema coeuntes) prolongatos, atque ſic complicatos ut in Analyſi mea videre eſt, *Mech.* cap. 5. prop. 29.

Methodos meas pro *Tangentibus*, videas ſummatim traditas in Tranſactionibus Philoſophicis pro menſe *Martio* 1672. iterumque ad *Algebræ* prop. 95. quas ante in Tractatu de *Con. Sect.* paſſim adhibueram, anno 1655. eiſdem planè nixas principiis cum tuo Calculo differentiali; ſed diverſa notationis formulâ. Nam meum *a* idem eſt atque tuum $d\bar{\ }x$, niſi quod meum *a* ſit *nihil*, tuum $d\bar{\ }x$ infinitè-exiguum; Et quum ea neglecta ſint quæ ego negligenda moneo pro abbreviando calculo, id quod ſupereſt, eſt tuum minutum triangulum; quod eſt apud te infinitè-exiguum, apud me nullum eſt, ſeu evaneſcens.

Nec tamen diſplicet quòd res eadem aliis atque aliis modis explicetur, qui omnes ſuam habeant utilitatem.

Sic *Indiviſibilium* doctrina, quamvis eodem fundamento nixa cum Veterum exhauſtionibus, (adeoque non minùs firma,) alia tamen eſt, (quod tu etiam mones,) & inſignem habet utilitatem, rem eandem ſuccinctiùs & commodiori forma explicando. Sicut & *Arithmetica ſpecioſa*, prolixas operationum formulas in brevem ſynopſin reducendo. Et (ne plura nominem) *Archimedea* Numerorum diſtributio (per loca, ſtadia, periodos, &c.) in *Arenario* tradita, miram nacta eſt promotionem per eas quibus jam utimur figuras numerarias. Nec vitio dari debet tuis aliorumque inventis (præſentis ſeculi) quòd Veterum fundamentis ſuperſtruantur, & novis quotidie promoveantur acceſſionibus.

Æquationum *Tranſcendentium* & *Interſcendentium* appellationes mihi non diſplicent; (imò placent ut valdè appoſitæ;) qualibus & ego aliquando utor æquationibus, ſed abſque nomine.

Quod interpolandi Methodus multum adhuc in receſſu habeat, omninò verum eſt; ego eam eatenus proſecutus eram, quatenus quod erat præ manibus negotium poſtulabat. Nec diſplicebit ſiquis eam alius ultrà promoveat; atque tu maximè.

Interpolatio unius termini, mihi tunc ſufficiebat: ſiquando pluribus interpo-

terponendis opus eſt; id poteſt multis modis fieri. Modus qui maximè obvius videtur, ſic eſto; Sicut *Newtonus*, in ordine ad Circuli, Ellipſeos, aut Hyperbolæ quadraturam, quo unum interponat terminum, extrahit (in ſpeciebus) radicem quadraticam, ipſius (v. g.) $R^2 \pm c^2$: ſi duos velis interpoſitos, extrahenda erit (in ſpeciebus) radix cubica: ſi tres, biquadratica; & quidem ſi quotlibet numero n notandos, extrahenda erit radix poteſtatis ab $n + 1$ denominandæ.

Quodſi ſupponatur hic numerus n, numerus fractus, ſurdus, vel utcunque ἄῤῥητος, comminiſcendæ ſunt novæ extractionum methodi caſibus hujuſmodi congruæ. Quippe (quod ego ſæpe moneo) in omnibus operationibus reſolutoriis (quales ſunt Subtractio, Diviſio, Extractio radicum, Æquationum ſolutio, Interpolatio, &c. ſemper pervenietur ad id quod ſtricto ſenſu fieri non poteſt, ſed quod utcunque deſignetur quaſi-factum, (ut ſunt -1, $\frac{3}{2}$, $\sqrt{2}$, &c.) Adeoque continuè procedetur ad alios aliosque *gradus* ἀῤῥησίας ſeu *inexplicabilitatis*, in infinitum. Ut nunquam deſitura ſit materia, ultra ultraque procedendi, volentibus id aggredi. Quos quidem tantum abeſt ut ſufflaminare velim, ut velim potiùs incitare. Atque, ut nollem eos ſua laude fraudare qui præceſſerint, ita nec eos remorari velim ſiqui ſatagunt inventis addere. Tuoſque ſpeciatim conatus laudo & approbo. Qui id agere ſoles, ut aliorum *Specimina particularia*, tu redigas in *Regulas univerſales*.

Quod *Analyſis Infiniteſimalis* latiùs pateat quàm *Methodus Tetragoniſtica*, omninò rectè mones. Eſt enim conſideratio Arithmetica, multo ſimplicior & magis abſtracta (quod *Savilius* noſter olim monuit) quàm eſt Geometrica; adeoque magis generalis, aliiſque materiis applicabilis; ejuſque ad Geometriam accommodatio, eſt *unus caſus* doctrinæ univerſalis. Quod probè norunt, qui *Euclidis Rationum* doctrinam, (Geometricè traditam in lineis,) multo feliciùs exhibent in Arithmetica ſpecioſa.

Atque, hoc intuitu, *Cavallerii*, *Geometriam Indiviſibilium*, ego proſequor in mea *Arithmetica Infinitorum*. Et Sectiones Conicas, Cono exemptas, ego tracto ut figuras in plano, (per ſuas ipſarum affectiones expoſitas, à Cono abſtractas,) non minùs quàm Circulum & Triangulum; quæ & ipſa ſunt Sectiones Coni, (quod & D. *de Wit* poſt fecit.) Et *medium Arithmeticum* ampliùs extendo, cujus de *Centro gravitatis* doctrina non eſt niſi unus caſus. Tuuſque *Calculus Differentialis* latiùs patet quàm ad Tetragoniſmos, aut etiam Curvarum rectificationes.

Quod de *Jacobi Gregorii* Seriebus *convergentibus* ſuggeris, ego (patruelem ejus) *Davidem Gregorium* tuo nomine monui; qui mihi pollicitus eſt, patrui ſui tradita, hac in re ſe pleniùs velle proſequi.

Quæ *Newtonum* ſpectant, ad eum ſcripſi tuis verbis; ſimulque obteſtatus ſum meo nomine, ut imprimi curet quæ ſua ſupprimit ſcripta: Quod & ſæpe ante feceram, ſed hactenus in caſſum.

Quoſnam ex libris Sinicis, de Bibliotheca *Goliana*, redemit *Bernardus* noſter, non poſſum dicere; cùm ipſe (quod tecum condoleo) mortuus ſit; librique quos emit (conſilio & ſumptibus D. *Narciſſi Marsh*, Archiepiſcopi *Dublinienſis*,) *Dublinium* ſint tranſvecti, nec ſcio an eorum ullus ſit apud nos catalogus. Sed eos quos memoras libros *Sinicos* credo eum emiſſe omnes; eoſque (cum reliquis) Bibliothecæ *Bodleianæ* ſperamus deſtinatos, atque huc aliquando remittendos. (Neſcio an *Dublinienſi.*)

Librum quem memoras *Adami Bohoriz*, (cui titulus *Horæ Arcticæ de antiqua lingua Carniolana*,) quærendum curavi tum in publica *Bodleiana* Bibliotheca, tûm in Collegiorum privatis, ſed non invenio; metuoque ne apud nos non ſit (a).

Suiſſetum (quod rectè mones) potuiſſem cum aliis memorare (ſi animo tunc occurriſſet) quamvis de Algebra non directè ſcripſerit. Quippe ille (ni fallor) primus, de rebus Phyſicis more Mathematico docuit diſſerere, quem ſecuti ſunt alii aliquot, ſemi-Mathematica (prout tu ſcitè loqueris) ſcribentes. Quique (*Galilæum* ſecuti) Matheſin Philoſophiæ naturali conjunxerunt, præſente ſeculo, immane quantum Phyſicam promoverunt. Quod & *Rogerus Bacon* (Vir magnus in obſcuro ſeculo) ante annos circiter quadringentos (eoque plures) aggreſſus erat.

De Cryptographematis explicandis, ſcribebam ad Editorem *Actorum Lipſicorum*, ipſis Calendis *Januariis* præſentis anni; ſed an ipſe receperit neſcio.

Cæterùm (ut tandem finiam) amicitiam tuam gratulatus, quodque meam non ſis dedignatus, valere jubeo. Εὖ πράττειν καὶ εὖ χαίρειν. *Oxonii* 30. *Jul.* 1697.

Monet D. *Hoſpitalius*, te jam meditari Tractatum de *Scientia Infiniti*. Lubenter intelligeremus, an & quando id ſperemus?

VI. Epistola D. Leibnitii ad Wallisium.

Vir plurimum Reverende & Celeberrime,

Literas tuas quantò prolixiores, tantò gratiores, magna cum voluptate legi; & diverſarum Methodorum recenſionem elegantiſſimam, & tuo acumine dignam, in illis agnoſco. Puto tamen plures rectè revocari poſſe ad unum idemque caput. Et figurarum reſolutionem in partes aſſignabiles, ab ea quæ fit in partes inaſſignabiles, nataque ex hac transformatione, toto methodi genere differre arbitror. Methodi autem inaſſignabi-

(a) Extat in Imperatoris Bibliotheca *Viennæ*. Vide *Lambecii* Comment. Lib. I. p. 93.

gnabilium à Calculo Differentiali abſorbetur; ut quicquid his per figurarum contemplationem conſequi licet, id ipſo calculo facilè poſſit obtineri. Quare Momentorum, & Regulæ *Guldinianæ* uſus (cujus quidam in *Pappo* veſtigia obſervant,) Convolutiones quas vocas, & Complicationes, & Luxationes, aliaque id genus, ut ſpecimina tantùm univerſalioris Infiniteſimalium methodi accipio; quæ calculo differentiali tractata velut ſponte naſcuntur.

Ut exemplo rem illuſtrem. Conſtat, momentum Trilinei ex Axe dupliciter haberi poſſe: Nempe, vel per dimidiam ſummam quadratorum ab ordinatis Axi applicatorum; vel, per ſummam Rectangulorum ab abſciſſa & ordinata baſi applicatorum. Atque hæc quidem te, & *Paſchalium*, & alios, ingenioſa figuræ meditatio docuit. Et tamen horum duorum æquipollentia, ſtatim Calculo differentiali patet. Differentialis enim quantitas $\frac{1}{2} xyy$ prodibit $\frac{1}{2} yy\,d\overline{x} + xy\,d\overline{y}$. Eſt autem $yy\,d\overline{x}$, idem quod quadratum ordinatæ y applicatum ad axem; & $xy\,d\overline{y}$, idem quod rectangulum ſub ordinata & abſciſſa, applicatum ad baſin, vel (pro re nata) ad Verticis Tangentem. Itaque dimidia ſumma quadratorum ad axem, & ſumma rectangulorum ad baſin, ex ſe invicem pendent; cum ſumma eorum æquetur quantitati datæ $\frac{1}{2} xyy$. Nam ex calculo differentiali tum $\frac{1}{2} d\overline{xyy}$ (ſeu dimidia differentialis quantitas ipſius xyy) æquetur ipſi $\frac{1}{2} yy\,d\overline{x} + xy\,d\overline{y}$. Utique ſumma horum viciſſim, nempe $\int \overline{y}y\,d\overline{x} + \int \overline{x}y\,d\overline{y}$, facit $\frac{1}{2} xyy$. Summæ enim differentiis reciprocæ ſunt. Ubi tamen notandum, interdum pro alterutro ſigno $+$, poni ſignum $-$. Quod ipſa Calculi ratio itidem oſtendit. Cæterum, cùm nos hæc calculo aſſequi dico: non ideo figuralem conſiderationem contemno, quæ nos huc duxit.

Sed per Methodum Convergentium *Jacobi Gregorii*, & per Series infinitas *Mercatoris*, *Newtoni*, & meas, reſolvitur figura in partes aſſignabiles.

Ab his verò omnibus Methodis, diverſa eſt totoque genere alia, tua Methodus Interpolationum; ingenioſiſſima & feliciſſima mihi viſa. Qua optarem potuiſſes, partes Ciſſoidis, ad partes ſemi-circuli reducere, ut totum ad totum reduxiſti. Nam quod alia methodo conſecutus ſis (quemadmodum tuo & *Hugenii* calculo, nos hæc in ciſſoide facilè obtinemus) de eo nunc non quæro. Itaque valdè vellem, illam propriam tuam methodum produci longiùs; cùm obtineantur per eam, ad quæ per calculum non æquè ſemper aditus patet. Nam, quod certo modo interpolationes in partibus deſinunt in ſeries infinitas, hic non moror. Itaque vellem aliquis juniorum, tuo ductu hortatuque, inventa tuæ methodi in Arithmetica Infinitorum expoſitæ, in totis ſaltem, proſequeretur.

Quæ meo nomine promiſit D. Marchio *Hoſpitalius*, paulatim efformo, quantum per negotia alia bene multa licet.

TAB. I. Fig. 7. Veriſſimum eſt, inventionem *Centri Gravitatis*, & inventionem *Medii Arithmetici*, eodem redire. Verbi gratiâ, (fig. 7.) Eſto G centrum gravitatis totius ipſarum AB BC CD, quarum centra propria ſint e f h: erit AG medium-Arithmeticum inter ipſas Ae Af Ah. Et his, ſimilibuſque conſiderationibus uſus ſum in Diario Gallico, ante annos aliquot, cùm publicarem & demonſtrarem hanc propoſitionem univerſaliſſimam; Si mobile M ſimul tendat, motibus quotcunque, quorum celeritates & directiones repræſententur (fig. 8.) rectis MN MP MQ &c. motum compoſitum fore MR, ita ut hæc recta tranſeat per S centrum commune gravitatis punctorum NPQ &c. & ſit MR ad MS, ut numerus motuum componentium (ſeu punctorum NPQ &c.) ad unitatem. Ubi ſimul notavi, ſi omnes conatus componentes ſint in eadem recta, ut Ae Af Ah, motum compoſitum fore ut AG. Notavi etiam alias, quadraturam vel ſummationem, nihil aliud eſſe, quàm inverſionem Medii-Arithmetici. Nam hoc medium habetur, ſi ſummam terminorum dividas per ipſorum numerum. Ergo viciſſim, ex ductu Medii-Arithmetici in numerum terminorum, fit ſumma. Itaque, in quadrando Trilineo ABCA (fig. 9.) ipſæ Ordinatæ LM habeantur pro terminis, qui ad puncta Axis (æqualiter diviſi) reſpondentia collocentur. Quo facto, patet utique altitudinem AB referre numerum terminorum. Ac proinde, ſi Rectangulum ABED æquetur Trilineo ABCA, ipſam AD eſſe Medium Arithmeticum, inter omnes, poſito Axe æquabiliter diviſo. Unde &, ſi mobile habeat infinitas numero, magnitudineque infinitè-parvas, ſolicitationes; ut ſunt ipſæ LM; eodemque modo diſtributas, vel applicatas; haberet impetum (ex infinitis iſtis ſolicitationibus compoſitum) ut ABCA, vel ut ABED.

Fig. 8.

Fig. 9.

Neſcio an animadverteris, ex *Actis Lipſienſibus*, me nonnihil promoviſſe Regulam *Guldini*; nempe, ut Via Centri Gravitatis ducta in Mobile æquetur Areæ; id verum eſſe, etiam ſi Mobilis partes ſucceſſivè quieſcant, & reliquas motum continuantes quaſi deferant; vel, contra, ſucceſſivè ſe reliquis jam motis adjungant. Exempli causâ; Evolvatur, *Hugeniano* modo, Curva ABC, & evolutione ſua deſcribat curvam ADE (fig. 10.) Notetur FGH via Centri Gravitatis totius fili, etſi totum filum non ſimul moveatur. Nempe, ſit F centrum fili, adhuc curvæ ABC circumplicati, ſeu centrum hujus ipſius curvæ; & G ſit centrum fili ſemi-evoluti DBC, conſtantis ex recta DB & arcu BC; denique H (dimidium punctum rectæ CE) ſit centrum fili totaliter evoluti. Ergo, rectangulum ſub recta CE & curva FGH, æquabitur Areæ trilinei mixtilinei CEAC.

Fig. 10.

Optarem, non ſpecimina tantùm, ſed & artificia Artis tuæ Cryptolyticæ, conſervari curares. Eſt enim in his, velut faſtigium quoddam ſubtilitatis ſimul induſtriæque humanæ. Agnoſco, certis methodis comprehendi non poſſe; &, ſi poſſet, minùs foret artificioſa. Et vel ideo velim ipſa

ipſa exponi artificia, & quaſi calculos Problematis ſoluti. Neque ego iſta per ſe, ſed potiùs ob artem inveniendi hinc promovendam, æſtimanda cenſeo. Eoque hortor, ut omnia candidè exponi cures; cùm non facilè extiturus ſit, qui neglecta vel ſuppreſſa à te ſupplere poſſit. Vides me procuratorem apud te agere, ſimul & gloriæ tuæ, & publici boni atque poſteritatis. Vides etiam &c. [*Cætera rem Mathematicam non ſpectabant.*] Vale adhuc diu, & fave. *Dabam Hanoveræ*, 28. *Sept. ſtilo vet.* 1697.

VII. Epistola Wallisii ad D. Leibnitium.

Nobiliſſime Celeberrimeque Vir,

Accepi hodie gratiſſimas tuas literas, *Hanoveræ* datas Sept. 28. 1697. *S. V.* ſimulque faſciculum illum ad me miſſum &c. [*Omiſſa*, *Res Mathematicas non ſpectabant.*]

Non vacat jam de rebus Mathematicis quicquam addere; quia velim protinùs abſque mora (cùm tu id petis) de receptis tuis literis te certiorem facere. Id ſaltem inſinuare viſum eſt, fieri fortè poſſe, ut, unà cum ſcriptis meis aliquot, quæ jam ſub prelo ſunt, *Newtoni* quædam intermiſceam; ſimulque (niſi tu prohibeas) Literarum tuarum aliquas, quæ ad manus meas pervenerunt, & quæ dignæ ſunt ut non pereant. Interim vale, Vir Nobiliſſime, & amare digneris. *Dabam Oxoniæ* 21. *Octob.* 1697. *St. v.*

VIII. Epistola D. Leibnitii ad Wallisium.

Vir plurimum Reverende & Celeberrime,

Literæ tuæ noviſſimæ, eæque breves, aliquid ultrà ſperare jubere videbantur: Quod niſi exſpectaſſem, reſpondiſſem promptiùs. Sed non putavi differendum diutiùs, quod interrogationi tuæ ſatisfaciendum eſſe judicarem.

Quæris, an patiar neſcio quas literas meas (ad *Oldenburgium* fortaſſe) apud te repertas edi. Poteram petere, ut mecum antea communicentur: Sed tamen ſatius putavi rem omnem tuo arbitrio permittere. Tametſi enim facilè intelligam, tumultuariè & à juvene ſcripta, cujus progreſſus adhuc erant mediocres, veniam faciliùs quàm laudem eſſe inventura; &, ſi veſtrorum exquiſitis ſcriptis conjungantur, ipſa imparitate deteriora apparitura

paritura eſſe ; cùm , contrà, inter alias minorum gentium lucubrationes fortaſſe commendationem aliquam habuiſſe poſſint ; atque adeo agnoſcam (quod res eſt) magis veſtræ gloriæ (cui ipſe faveo) quàm famæ meæ hanc editionem eſſe velificaturam ; quia tamen judicas ineſſe aliquid non mali , nolo defugere autoritatem tuam ; & commodo reipublicæ , etiam periculo opinionis meæ , ſervire ſum paratus.

Memini aliquando rogare , ut de *Cryptolyticis* in Artis aliquam formam redigendis cogitares. Id nunc quoque repeto. Eſt enim in illis ſummum ſpecimen humanæ penetrabilitatis. Communicata ſunt mecum quæ D. *Menkenio* miſiſti , & viſa mihi cum admiratione. Sed utinam ipſam quoque methodum inveniendi addidiſſes ! Interim ſpero , eſſe apud vos cui poſſis artem tuam velut hæreditate tradere ; quamquam ipſa vis ingenii legari cuiquam non poſſit. Utinam hæc malles agere , quæ ſolus potes , quàm reſuſcitare Veteres , quod excellenter facis , ſed non ſolus.

Intellexi lætus, &c. [*Omiſſa , rem aliam ſpectant.*] Vale. *Dabam Hanoveræ* 24 *Martii* , *ſt. vet.* 1698.

IX. Epistola Wallisii ad D. Leibnitium.

Illuſtriſſime Vir ,

QUòd literas à me prolixiores antè exſpectaveris, quas nondum acceperis, excuſatum me (precor) habeas , quòd pluribus implicitus negotiis non poſſim ſimul omnibus vacare.

Literæ ex tuis aliquæ , quas (te permittente) me editurum inſinuabam , ſunt (præter earum aliquas quæ mihi tecum interceſſerunt nuper) tuarum aliquot , quæ erant ad *Oldenburgium* ſcriptæ ; quas cùm ante fruſtra quæſiverim tandem obtinui : Nempe ad *Oldenburgium* Epiſtola data Julii 15. 1674. & Octob. 26. 1674, aliaque (ſine data) eodem anno exeunte vel ineunte ſequente , & Dec. 28. 1675. & Aug. 27. 1676. & Junii 21. 1677. & Julii 12. 1677.

Velim quidem , ſi per locorum diſtantiam liceat , de ſingulis te conſulere ; & ſiqua ſint apud te harum exemplaria , veliſque inibi quicquam additum , demptum , aut permutatum ; tibi obtemperabo. Quodſi, tumultuariè ſcribenti (nec eo intuitu , ut ederentur) exciderit quicquam aut minus perſpicuè aut minus limatè dictum ; vel ſiquid irrepſerit mendi ex mendoſis quibus uſus ſum Apographis (quorum ipſa Autographa non vidi) quod ego non ſuſtulerim ; id illuſtri Viro non imputabit Lector candidus. Sunt utcunque illæ Literæ (prout mihi videtur) dignæ ne pereant ; nec inibi habetur quicquam quod te dedeceat. Nec tibi cedet dedecori ,

decori, quòd tam maturè rebus hiſce mentem adhibueris, & tanto cum judicio. Eſtque aliquando gratum (ſed & utile) videre quomodo ſe res habuerint dum ſub incude fuerint, necdum prorſus limatæ, & quibus paſſibus proceſſerint. Quod tu ipſe mones (Ep. 27. Aug. 1676.) de Schediaſmatis *Gregorianis* & *Pellianis*. Quòd autem tu tua extenues ſcripta, id dandum eſt modeſtiæ tuæ; (quippe quæ laudent alii:) quodque mea præferre videaris, humanitati tuæ debeo.

Omninò elegans eſt (& planè verum) quod habes (Ep. 15. Julii 1674.) de quadrando ſemi-Cycloidis ſegmento quodam. Segmentum aliud quoddam quadravit *Hugenius* & (eo prior) *Wrennius* noſter; uterque (credo) neſcius quid alter fecerit. Sequitur utrumque ex meis univerſaliter traditis (in Tractatu de Cycloide, & de Motu.) Eſtque hoc univerſaliter verum, quòd, in meis deſignationibus quarumcunque portionum Cycloidis, ſi ita ſumantur a, s, vel a, v, vel a, R, (aut quod tantundem eſt,) ut deſtruatur a; id omne eſt abſolutè quadrabile. Quod innuebam, ad *Algebræ* Prop. 110.

Quod ais (Ep. 26. Oct. 1674.) putaſſe non-neminem, *Carteſii* regulam pro dividenda æquatione biquadratica in duas quadraticas, non eſſe univerſalem: Qui ſic putat, labitur ipſe; univerſalis enim eſt. Sed poteſt id pluribus modis fieri. Quippe ſi æquationis biquadraticæ radices quatuor ſint a, b, c, d, poſſunt illa binatim componi (pro binis quadraticis) pluribus modis; puta a, b; c, d: vel a, c; b, d: vel a, d; b, c. Ad quas combinationes inveniendas, aliâ atque aliâ opus erit æquationis cubicæ radice. Quod autem ais (literis ſequentibus) hoc non eſſe *novum inventum*, id omninò verum eſt. Hoc enim docuerat *Bombellius* ſeculo ſuperiore: & (poſt eum) *Vieta*.

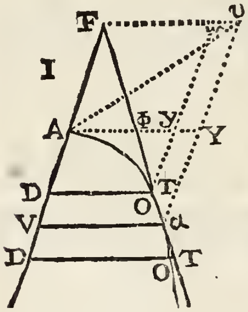
Difficultas quam memoras, (Ep. 28. Dec. 1675. & 27. Aug. 1676. & 21. Junii 1677. & alibi,) de radice *Æquationis Cubicæ*, ubi intervenit (quæ dici ſolet) *Quantitas imaginaria*, (puta $\sqrt[3]{a+\sqrt{-b^2}}, \pm\sqrt[3]{a-\sqrt{-b^2}}$: $= z$;) & de radice Binomii Cubici exquirenda: non eſt ut quemquam porrò remoretur. Utrumque nos ſatis expedivimus, *Algebræ* capp. 46, 47, 48, 49. Quippe caſus ille non minùs ſubeſt regulis *Cardanicis*, (ritè intellectis,) quàm ubi talis non intervenit imaginaria.

At inquis, Quis exhibebit valorem radicis $\sqrt{-b^2}$, vel $b\sqrt{-1}$; ut quæ eſt tantum imaginaria & impoſſibilis. Omnino, inquam. Sed & ipſum Quadratum $-b^2$ eſt non minùs (ſtrictè loquendo) imaginarium & impoſſibile. Et quidem, omnino omnis *negativa* quantitas (ſive ſit Linea, Planum, Solidum, aut aliud quicquam;) eſt pariter imaginaria & impoſſibilis. Quippe impoſſibile eſt ut exiſtat quicquam quod ſit *minus quàm nihil.* Sed, quo ſenſu velit quis imaginari quadratum negativum, ($-b^2$;) pariter imaginari debet, imaginarii hujus quadrati, latus imaginarium. Et quidem $\sqrt{-b^2}$ in $\sqrt{-b^2}$ ductum, non minùs facit $-b^2$,

quàm $\sqrt{} + b^2$ in $\sqrt{} + b^2$ facit $+ b^2$. Et radix Binomii cubici pariter utrobique elicietur. Hujuſque doctrinæ ſumma (ni fallor) habebatur in illa mea Epiſtola, quam tu memoras Ep. 28. Dec. 1675.

Quæ habes Ep. 27. Aug. 1676. de figurarum transformatione; ego planè approbo. Eadem Arte (aut quæ huic æquipollet) ego paſſim utor, in diſtribuendis figuris compoſitis in ſua membra componentia; & in reſtituendis luxatis in æquipollentes. Abſque quo, fruſtra fuiſſem in eis quæ habeo de Calculo Centri Gravitatis.

Quæ habes (Ep. 21. Junii 1677.) de tua pro Tangentibus methodo, ego item approbo. Quæ fuerit *Sluſii* methodus, vel non vidi, vel non memini. Vide autem annon mea methodus ſit aliquanto ſimplicior. Eam habes jam anno 1655. paſſim adhibitam, De Conicis Sectionibus, Prop. 23, 30, 36, 46, 49, & alibi. Eamque fuſiùs explicatam in *Tranſactionibus Londinenſibus* pro menſe *Martio* 1672. Indeque tranſcriptam in meam *Algebram*, cap. 95. Cujus hæc ferè ſumma.



Sit A α expoſita quævis curva (concava, convexa, vel utcunque-curvata,) cujus vertex A, intercepta Diameter vel Sinus verſus (quam tu Abſciſſam vocas) ad curvæ partem concavam AV (ſeu ad convexam AY) $= v$; Ejuſque ordinata V α (vel Y α) $= b$; curvamque in α contingat recta α F (vel α Φ) diametro V A occurrens ultra verticem in F (vel diametro A Y citra verticem in Φ;) ſitque ſubtangens quæſita F V (vel Φ Y) $= f$. Intelligantur autem in Diametro AV, ultra citraque V, puncta DD, (vel in AY, puncta y,) eiſque ordinatim applicentur D O T (vel yTO) curvæ occurrentes in O, & tangenti in T, (ultra curvam utrobique, ubi eſt trilineum AY α ad curvæ partem concavam; ſed citra curvam, ubi eſt AYα ad curvæ partem convexam:) ſitque V D (vel Yy) $= a$; adeoque DA (ſeu y A) $= v \pm a$, & DF (ſeu y Φ) $= f \pm a$. Et (propter ſimilia triangula) V F. D F : : Vα. D T (vel Y Φ. y Φ : : Yα. yT) $= \frac{f \pm a}{f} v$.

Eritque D T $\geqq$ (æqualis vel major quàm) D O; nimirum æqualis ſi intelligatur D in V, ſed major ſi extra V, (& ſimiliter y T æqualis vel minor quàm y O; nempe æqualis ſi ſit y in Y; minor, ſi extra.) Atque hactenus univerſaliter, qualecunque fuerit Trilineum AVα (vel A Y α.) Eſtque (quod probè notes) eadem Tangens (ſed alibi terminata, in F & Φ,) quæ trilineo interno A V α, & quæ trilineo externo A Y α, convenit.

Sed pro DO, (quæ eſt cum DT comparanda,) ſumendus eſt, pro quaque

quaque curva, ſuus cujuſque debitus Character, ſeu Æquatio propria. Exempli gratiâ. Si Aα ſit Parabola (quæ eſt omnium ſimpliciſſima curva) eſt AV. AD :: Vα q. DO q $= \frac{v \pm a}{v} b^2$; & DO $= b \sqrt{\frac{v \pm a}{v}}$. Eritque propterea $\frac{f \pm a}{f} b$ (= DT) æqualis vel major quàm $b \sqrt{\frac{v \pm a}{v}}$ (= DO;) Adeoque (dividendo utrinque per b, & quadrando) $\frac{f^2 \pm 2fa + a^2}{f^2} \geqq \frac{v \pm a}{v}$, & (decuſſatim multiplicando) $f^2 v \pm 2fv a^2 \geqq f^2 v \pm f^2 a$, pariterque (deletis utrinque æqualibus, vel potius ab initio neglectis; hoc eſt, iis omnibus in quibus a non conſpicitur; cæteriſque per $\pm a$ diviſis;) $2fv \pm va \geqq f^2$. Hoc eſt; æquales ſi ſumatur D in V; ſed illa major, ſi extra V.

Tandem (qui methodi nucleus eſt) poſito D in V (quo ſit $a = 0$, adeoque evaneſcant ipſius multipla omnia) fiet ($2fv \pm va = 2fv \pm 0 =$) $2fv, = f^2$; & $2v = f$ ſubtangens quæſita.

Si, pro Parabola communi *Apoloniana* (quam Quadraticam dicas, utpote cujus abſciſſæ ſeu interceptæ diametri ſunt in ordinatarum ratione duplicata, ſeu ut earum quadrata,) expoſita ſit Paraboloeides Cubica, Biquadratica, Superſolidalis, aut alia cujuſcunque gradûs, puta quæ poteſtatis Exponentem habeat e; tum (pro $f = 2v$) prodiret $f = 3v$, $f = 4v$, $f = 5v$, aut $f = ev$, &c. hoc eſt, Subtangens f, foret, abſciſſæ v, multipla per numerum e (exponentem poteſtatis) ſive ſit ille numerus integer, ſive fractus, ſive utcunque ſurdus: (Quippe jamdiu eſt quod ego introduxi, in Geometricam conſiderationem, Poteſtates & Æquationes intermedias, inter Lateralem, Quadraticam, Cubicam, &c. quas tu vocas Interſcendentes; & quæ Exponentem habeant indefinitam, ut e vel p, quas tu Tranſcendentes vocas.)

Si vero character Curvæ ſit magis compoſitus, quàm eſt Parabolæ aut Paraboloeideos; ratio rectæ f ad v prodibit magis implicata; ut, pro Hyperbola, prodibit $f = \frac{T + v}{\frac{1}{2}T + v} v$: Pro Ellipſi vel Circulo, $f = \frac{T - v}{\frac{1}{2}T - v} v$. Hoc eſt, ut $\frac{1}{2}T \pm v$, ad $T \pm v$, ſic v ad f. Atque in aliis curvis pariter pro cujuſque charactere, qualium ego plura ſpecimina ibidem exhibui. Et quidem, ſi non appareat, prima fronte, tale Trilineum ut AVα aut AYα; quomodo accommodanda ſit ea res, pluribus oſtendi.

Sed & ibidem oſtendi, quomodo abbrevianda ſit calculi pars magna; Nempe, omiſſis ſive neglectis, ab initio, omnibus illis terminis, qui forent pòſt delendi aut rejiciendi.

Hoc eſt, omiſſis ab initio terminis illis omnibus in quibus a non conſpiceretur; nec ſunt in a ducendi: utpote utrinque æqualibus.

 Item,

Item, omiſſis omnibus in quibus haberetur a^2 vel hujus ſuperior poteſtas. Eo quòd, poſt depreſſionem per $\pm a$, ſi adhuc a ſuperſit, erit ille terminus nihilo æqualis; (ut ſunt omnia multipla ipſius a, cùm ponitur $a = 0$:) Sive ſit ille terminus intra vinculum, ſive extra vinculum irrationalitatis, ſiquod ſit.

Adeoque, quoties, in præviis ad hoc multiplicationibus (pro analogia conſtituenda) occurrit terminus ab a immunis, in alium ſic immunem ducendus; aut terminus quo conſpicitur a in alium quo ſic conſpicitur; negligendum eſt illud multiplicationis membrum: ſolaque illa ſunt proſequenda, ubi terminus quo conſpicitur a (unius dimenſionis) ducendus eſt in terminum quo non conſpicitur a.

Fundamentum hujus proceſsûs hoc eſt. Quo habeatur Tangentis poſitio, hoc proſpiciendum eſt unicum, ut ordinata trilinei curvilinei AVα, cum ea quæ eſt ordinata trianguli FVα, coincidat. Hoc eſt DO, cum DΓ, quod non fit niſi in Vα. Cumque ipſius DΓ conſtans character (pro curvis omnibus) ſit $\frac{f \pm a}{f} b$, (Æquatio lateralis quam ingreditur ipſius a dimenſio unica non plures;) Sicubi ipſius habeantur plures dimenſiones (a^2, a^3, &c.) erit ille terminus (etiam poſt depreſſionem per $\pm a$) nihili multiplus, adeoque nihil.

Quumque hoc quod moneo adhibetur Calculi compendium; id quod ſupereſt, eſt reapſe tuus Calculus Differentialis; (ut non ſit ea tam res nova, quàm nova loquendi formula, utut tu id fortè non animadverteris.) Eſt utique meum a, tantundem ac tuum x (ſeu y) abſciſſæ ſegmentum; cum hoc ſolo diſcrimine, quòd tuum x, eſt infinitè parvum; meum a, planè nihil. Cumque deleta ſunt, ſeu (per calculi compendium) omiſſa, ea omnia quæ delenda forent; quod reliquum eſt, eſt ipſum tuum minutum Triangulum Differentiale (duobus ordinatis proximis interjectum) toti FVα ſimile; (tibi quidem infinitè exiguum, mihi verò planè nihil.) Quippe quo retinetur ſpecies Trianguli, ſed abſtracta à magnitudine: hoc eſt, Triangulum hujuſce formæ, ſed nullius determinatæ magnitudinis. [Quæ eſt tua, credo, *Quantitas inaſſignabilis.*]

Nec tamen id tibi imputandum eſt, aut vitio dandum, quòd non animadverteris rem ipſam à me fuiſſe ante inſinuatam; ſed ſub alia verborum formula: cùm non tibi magis incumbat mea vidiſſe omnia (& penitius examinaſſe) quàm mihi tua. Nec ſua caret utilitate, diverſis itineribus ad id ipſum (ſeu quod æquipolleat) à pluribus perventum eſſe.

Quòd autem mea mihi videatur deſignatio ſimplicior, ponentis $a = 0$, quàm tua ponentis x infinitè-parvum; hinc eſt: nempe quòd mihi non opus ſit tuis aliquot poſtulatis, de infinitè-parvo in ſe ducto, aut in aliud infinitè-parvum, in nihilum degenerante, (quod nonniſi cum aliqua cautione

tione adhibendum eſt;) cùm ſit per ſe perſpicuum (quod mihi ſufficit) quòd , Nihili quodcunque multiplum, eſt adhuc nihil.

Quodque tu mones Ep. 21. Junii 1677. quòd non refert quem Angulum faciunt ordinatæ ad Axem (ubi tu *Axem* dicis, eo ſenſu quo alii *Diametrum;* quippe plures ſunt v. g. ejuſdem Parabolæ Diametri, ſed Axis unicus, ad quem ſcilicet ordinatæ ſunt ad angulos rectos;) omninò verum eſt; quod & ego dudùm monueram; ex eo quòd conſideratio Anguli non ingreditur Æquationem. Quippe hæc mihi Regula generalis eſt, *Quæcunque Quantitas* non *ingreditur Æquationem*, ea (quoad illam æquationem) eſt indeterminata; adeoque poteſt pro arbitrio ſumi: ſed intra certos limites, ne ſecus evadat Æquatio impoſſibilis. De quo fuſiùs diximus ad *Algebræ* Prop. 57.

Sed & de Tangentibus monueram, hanc meam methodum extendi ad duarum Curvarum contactum mutuum, (quatenus id fieri poteſt,) non minus quàm ad tactum Curvæ Rectæque: Puta, ſi quæratur poſitio Parabolæ quæ tangat expoſitam Ellipſin, Circulumve. Quippe, ut illic quæritur poſitio Trianguli FVα quod ſit cum Trilineo AVα comparandum, (ex collatis characteribus Trianguli iſtiuſque Trilinei:) Hic quærenda eſt poſitio ipſius FVα Parabolæ cum illo Trilineo, (ex comparatis utriuſque characteribus;) ita ut eadem Vα ſit, utriuſque communis ordinata. (Verùm hic alia erit adhibenda ratio in abbreviando calculo, quàm ubi de Recta tangente agitur: eo quod Trianguli character, eſt Æquatio *Lateralis*; ſed, Parabolæ, *Quadratica*: Et, pro aliis Curvis, alia atque alia.) Huc utique res redit, univerſim; *Duorum Trilineorum diverſiformium*, *communem Ordinatam habentium*, *eidem Diametro applicatam*; (ſeu quod tantundem eſt;) *datâ unius altitudine*, *alterius altitudinem inveſtigare*; (nempe ex collatis inter ſe utriuſque characteribus. Quod & *methodum* (quam vocas) *Tangentium inverſam*, comprehendit. Atque hinc amplus aperitur exſpatiandi campus, ſi cui libet eum ingredi, de mutuis *Curvarum* inter ſe *contactibus*.

Quæ omnia ſunt à me tradita in Epiſtola ad D. *Oldenburgium* ſcripta Feb. 15. 1671. *ſtilo Angliæ*; & *Tranſactionibus Londinenſibus* inſerta pro Menſe *Martio* 1672; indeque tranſumpta in *Algebræ* meæ cap. 95. Eaque hic repeto, ut videas (ſi vacet) quantus ſit tuæ meæque methodi hac in re conſenſus, ſed ſub diverſis loquendi formulis: & quodnam ſit utriuſque commune Fundamentum. Nam juſta eſt quam tu innuis querela Ep. 27. Aug. 1676. quod, Multa, quæ videntur clara, gratis aſſumimus Axiomata, cùm tamen opus ſit ipſorum *Axiomatum* Analyſi, ut verum quod ſubeſt fundamentum pateſcat; quod itaque ſoleo ego ſolicitus inquirere. Quippe, dum citra principia conſiſtimus, deeſt non parum luminis quod rem totam illuſtret.

Plura dicturum prohibet Epiſtola jam prælonga. Vale. *Dabam Oxoniæ* 22. *Julii* 1698.

X. Epiſtola D. Leibnitii ad Walliſium.

Vir maximè Reverende & Celeberrime, Fautor Honoratiſſime,

Multa me dudum reſponſurum impediêre: Itinera quædam, tum occupatiunculæ, ſpes etiam reperiendi delineationes quaſdam antiquarum mearum Epiſtolarum; ſed quæ hactenus irrita fuit, quod non licuerit per magis neceſſarias occupationes excutere ſchedarum chaos. Nunc, præſertim anno ad finem decurrente, diutius differendum non putavi; & rumpendas potiùs moras reſponſione qualicunque, quàm trahendas, quando ex aſſe ſatisfacere non datur.

Veriſſimum eſt, quod ais, utile eſſe ex Epiſtolis quas edere paras progreſſum videre quem paulatim fecimus in ſcientia, neque enim Methodi uno momento totæ naſcuntur. Id appareret multo clariùs, ſi quæ alia & nunc & poſtea ſcripſi ad amicos, ſimul edi poſſent, mihique vacaret ex iis colligere, recognoſcere & in ordinem redigere quæ huc facerent. Interea contenti ſimus hoc *Catone*; & ego quidem tantum tribuo & judicio tuo & benevolentiæ, ut rem totam arbitrio tuo committam.

Is qui in *Carteſii* Methodo reſolvendi Æquationem biquadraticam ope Cubicæ, errorem deprehendiſſe ſibi videbatur, fuit *Preſtetus*, cujus *Elementa Matheſeos univerſalis*, ut vocabat, initio ſine nomine autoris edita, à te, ni fallor, & aliis *Malebranchio* tributa fuerunt, qui patronus fuerat juvenis, eumque animârat ad hæc ſtudia atque etiam provexerat. Secundæ editioni nomen ſuum præſcripſit *Preſtetus*, ſed ut mihi videtur magnum operæ pretium non fecit. Cùm autem *Lutetiæ Pariſiorum* agerem, ipſe mihi attulit ſchedam qua in Regula illa *Carteſii* aliquid nequicquam reprehendebat. Suadebam ut aggrederetur nondum exhauſta, neque actum ageret; quàm multa enim ſunt, in quibus cum maximo fructu exerceri poſſet induſtria analyticorum? ſed ſurdo fabulam narrabam. Diu verò eſt, quod eum obiiſſe intellexi, de quo doleo; cùm enim eſſet in calculo exercitatus, poterat elaborare in iis quæ aſſiduitatem poſtulant.

Primus inventor reductionis Æquationum biquadraticarum ad quadraticas fuit *Ludovicus Ferrarius*, (*Cardani* diſcipulus,) juvenis egregius, qui præmaturâ morte deceſſit. Eum ſæpe laudat *Cardanus*. *Vieta* poſtea eandem rem tradidit, & mox *Carteſius*. *Bombellus* verò *Ferrarii* inventum (non multùm poſt ejus obitum) deſcripſit.

Diu eſt quod ipſe quoque judicavi $\sqrt[3]{a+b\sqrt{-1}}+\sqrt[3]{a-b\sqrt{-1}} = z$ eſſe quantitatem realem, etſi ſpeciem habeat imaginariæ; ob virtualem

lem nimirum imaginariæ deſtructionem, perinde ac in deſtructione actuali $a + b\sqrt{-1} + a - b\sqrt{-1}$ eſt $= 2a$. Hinc ſi ex $\sqrt[3]{a \pm b\sqrt{-1}}$ extrahamus radicem ope ſeriei infinitæ, ad inveniendum valorem ipſius z ſerie tali expreſſum, efficere poſſumus, ut reapſe evaneſcat imaginaria quantitas. Atque ita etiam in caſu imaginario regulis *Cardanicis* cum fructu utimur; ut alias vias taceam.

In eo verò quod addis, non mirum eſſe quòd $\sqrt{-bb}$ ſeu $b\sqrt{-1}$ ſit quantitas imaginaria & impoſſibilis, cùm ipſum quadratum hujus imaginariæ ſeu ipſum $-bb$, quadratum negativum, imaginaria ſit quantitas; nonnihil reperio difficultatis. Certè enim $aa - bb$ eſt quantitas realis, cùm tamen $a - b\sqrt{-1}$ ſit quantitas impoſſibilis: oportet ergo in radice ſitum eſſe fundamentum impoſſibilitatis, quod in ipſo quadrato non eſt.

Methodus Tangentium *Sluſiana* fuit, ni fallor, aliquando inſerta Tranſactionibus Philoſophicis veſtris ab optimo *Oldenburgio* editis. Non multum differt à *Fermatiana* aut tua. Regulam aliquam continebat aptam illis, qui cùm fundamenta non intelligant ex præſcripto agere coguntur. Ita plerique utuntur regulis *Cardanicis* aut *Ludovici Ferrarii*, quas *Carteſius* ſuas fecit pro reſolvendis Cubicis aut Biquadraticis æquationibus; etſi minimè intelligant originem regularum; nec, ſi ex memoria ſint deletæ, aut libri non ſint ad manus, per ſe recuperare eas poſſint. Ego multis olim modis & in *Cardani* & in *Ferrarii* regulas incidi. Vidi etiam *Harriotum* ſingulari planè ratione ad *Cardanicas* perveniſſe. Sed nulla earum viarum quas alii quod ſciam uſurparunt, apta eſt progreſſuro ad Æquationes altiores.

Carteſius ſubindicârat alicubi in ſua Geometria, pari ratione etiam æquationes ſexti gradûs poſſe reduci ad ſurdeſolidas, qua quarti ad cubicas. Sed vereor ut ipſe hoc potuerit præſtare. Certè cùm doctus quidam juvenis Bremenſis cui *Docemio* nomen, rationem ſexti gradus ad quintum revocandi ab ipſo poſtulaſſet, reſpondit ei *Carteſius* viamque præſcripſit; ſed meo judicio tam perplexam & obſcuram (Apographum enim Epiſtolæ ad me pervenit) ut nihil inde poſſit elici. Quæ res dubitationem meam auxit; utrum ſcilicet hæc potuerit *Carteſius*: reapſe enim fieri poſſe non nego.

Quod *Calculum differentialem* attinet; fateor multa ei eſſe communia cum iis quæ & tibi, & *Fermatio* aliiſque, imo jam ipſi *Archimedi* erant explorata; fortaſſe tamen res multo longiùs nunc provecta eſt, ut jam effici poſſint quæ antea etiam ſummis Geometris clauſa videbantur, *Hugenio* ipſo id agnoſcente. Perinde ferè ſe res habet ac in Calculo analytico ad lineas conicas altioreſve applicato: quis non videt *Apollonium*, & veteres alios, habuiſſe Theoremata quæ materiam præbent æquationibus, quibus *Carteſius* poſtea lineas deſignare voluit? Interim methodo *Carteſii* res ad calculum reducta eſt, ut jam commodè ac nullo negotio fiant,

quæ

quæ antea multo meditationis & imaginationis labore indigebant. Eodem modo *Calculo* noſtro *differentiali* etiam Tranſcendentia Analyticis operationibus ſubjiciuntur, quæ inde antea excluſerat ipſe *Carteſius*.

Putem præſtare, ut Elementa vel differentialia momentanea conſiderentur velut Quantitates more meo, quàm ut pro nihilis habeantur. Nam & ipſæ rurſus ſuas habent differentias, & poſſunt etiam per lineas aſſignabiles proportionales repræſentari. Triangulum illud inaſſignabile, quod ego characteriſticum vocare ſoleo, Triangulo aſſignabili ſimile agnoſcere tecum, & tamen pro nihilo habere, in quo retineatur ſpecies Trianguli abſtracta à magnitudine; ita ut ſit datæ figuræ, nullius verò magnitudinis; neſcio an intelligi poſſit, certè obſcuritatem non neceſſariam inducere videtur. Figuram ſine magnitudine quis agnoſcat? Nec video quomodo hinc auferri poſſit magnitudo, cum dato tali Triangulo, intelligi queat aliud ſimile adhuc minus; ſi ſcilicet in linea alia ſimili, omnia proportionaliter fieri intelligantur. Finge duos circulos concentricos in eodem plano, & continuè ſimul biſecari ſectores eorum iiſdem radiis productis comprehenſos, nonne chordæ etiam inaſſignabiles rationem radiorum ſervabunt, atque etiam *inter evaneſcendum* erunt inæquales, quemadmodum & inæqualia erunt ſegmenta ſimilia inaſſignabilia duorum ſectorum quæ ſimul inter evaneſcendum orientur? Hæc ergo ſegmenta, quæ tamen triangulis characteriſticis inaſſignabilibus infinities minora ſunt, magnitudine tamen non carebunt; quanto minùs ipſa hæc triangula?

Interdum abuſivè dicimus ordinatas etiam poſſe eſſe ad Axem obliquas; cùm propriè magis Axis dicatur recta ad quem ſunt Normales; ideo cùm accuratiùs loqui volo, pro Axe voco *Directricem*, quo vocabulo ſi bene memini utebatur *Johannes de Wit* in Conicis ſuis Elementis. Libenter enim vocabula apta etiam ab aliis propoſita uſurpo. Poſſunt autem pro *Directrice* ſumi rectæ quæcunque; cùm *Diametros* per centrum (vel verum vel fictum infinitè diſtans quando ſcilicet parallelæ ſunt) tranſire oporteat. Rectam autem indefinitam, quæ ad principium abſciſſarum angulum facit eundem cum Directrice quem faciunt ordinatim-applicatæ, vocare ſoleo *condirectricem*: ad quam novæ & propriæ ordinatim-applicatæ ſunt ipſis abſciſſis æquales & parallelæ; unde eas voco *coordinatas*, nempe ordinatas ad *condirectricem*. Eamque nomenclaturam meam commoditatis cauſa nonnulli Viri in his ſtudiis egregii jam frequentare cœpêre: commoditatis inquam cauſa, nam ad ſummam rei parum refert, quo quodque nomine appellemus.

Quod ais tibi non opus eſſe infinitè parvo in ſe ducto, vide ne ex oblivione quadam proficiſcatur: annon enim elementa curvæ repræſentanda ſunt per $\sqrt{d\bar{x}\,d\bar{x} + d\bar{y}\,d\bar{y}}$: poſito rectam $d\bar{x}$ eſſe elementum abſciſſæ x; & rectam $d\bar{y}$, elementum ordinatæ y? Quin obſervo in his novam quandam legem Homogeneorum, pro calculo infiniteſimali: nam quadratum

tum differentiæ ſeu elementi primi gradûs, homogeneum eſt rectangulo facto ex recta communi ducta in differentiam ſecundi gradûs, ſeu d¯x d¯x homogeneum eſt ipſi *a*d¯ d¯x. Cùm fieri poſſit, ut elementum primi gradûs ſit proportione medium inter rectam communem & differentiam differentiarum: Tantum abeſt ut hæc pro nihilis ſint habenda. Et habent uſum illa ſecundi gradûs elementa cùm alias, tum pro lineis oſculantibus commodè inveniendis, uti elementa primi gradûs tangentibus inſerviunt.

Hæc ad literas tuas moneo, magis ne nihil dicam, quàm ut putem aliquid hoc loco à me afferri, quod te animum intendentem fugere poſſit. Poterunt tamen hæc monita noſtra mutua fortaſſe aliis prodeſſe, quando tu quidem ea publicè legi operæ pretium putas. Cui aſſentior, magis ne tua pereant, quàm quod mea tanti videantur.

Antequam finiam, patere ut meas exhortationes reſumam, ne ſcilicet admirandam tuam artem *cryptolyticam* perire patiaris. Scio præceptis comprehendi non poſſe aut ſatis generalibus, aut ſatis determinatis. At huic defectui ſuccurrerent *Exempla*, *ſi aſſcripta illis ſemper eſſent ipſa ratiocinationis tuæ veſtigia.* Patere te quæſo exorari, & tantum beneficium da poſteritati. Cùm verò in eam rem ſumtu & amanuenſibus aptis opus ſit, putem facilè rationem iniri poſſe, modò de tua voluntate decretoriè conſtet; quam ego mox diſcere valde optem non meo, (ut facilè judices) ſed generis humani bono, in re ad gloriam tuam maximè pertinente.

Quod ſupereſt, Calendis Januariis inſtantibus Deum quæſo, ut tibi multos adhuc annos valenti & vigenti largiatur, teque etiam proximi ſeculi non breve ornamentum eſſe ſinat. *Dabam Hanoveræ, 29. Decemb. 1698.*

XI. Epistola Wallisii ad D. Leibnitium

ſcripta. Jan. 16. 1699.

Illuſtriſſime Celeberrimeque Vir,

Literas tuas gratiſſimas, *Hanoveræ* datas *Dec. 29. 1698.* accepi hodie. Et quidem opportunè; quando reliquæ, quas de tuis habeo, fere omnes jam ſunt impreſſæ, quas hæc ſequetur. Atque ego mihi gratulor, quòd mea tibi non diſpliceat illarum editio.

Quòd multo clariùs paterent tuæ Methodi, ſi, quas ad alios etiam ſcripſeris amicos, ſimul ederentur; ego juxta tecum ſentio. Et quidem optarim ut tibi vacaret illas alias recolligere & in ordinem redigere, atque rem totam ordine exponere. Cùm verò id nondum contigerit, hoc ego ſolum potui, ut, quæ ad manus meas pervenerint, non perirent.

Quod de *Preſteto* mones, ego tecum ſentio; nec eſt quod addam (ea de re) eis quæ antè dixi, dum neſciverim quis eſſet quem tu inſinuabas.

Quod addis de *Ludovico Ferrario*, (ut qui primus invenerit Æquationis biquadraticæ in duas quadraticas reſolutionem, *Bombellio* prior,) ego antè neſciebam; nec ſcio numquid ab eo ſcriptum extet.

De *Cardanicis* Radicibus Æquationis Cubicæ, quod tu ſuggeris, (nempe, quod, ſub notatione quaſi-imaginaria, latet realis quantitas,) omnino verum exiſtimo. De quo antè dixi.

Quod $-bb$ quantitatem dixi *Imaginariam*; id intellige, quo ſenſu omnis *Negativa Quantitas* eſt (ſtricto ſenſu) *imaginaria*; quippe quòd non poſſit quicquam exiſtere quod ſit *minus quam nihil.*

Sed $b\sqrt{-1}$ eſt duplici nomine imaginarium, quaſi in *ſecundo gradu* remotum: Eſt utique media proportionalis inter $+1$ & -1; ut eſt $\sqrt{+1}$ media proportionalis inter $+1$ & $+1$, vel inter -1 & -1.

At inquis, $aa-bb$ eſt quantitas realis. Omnino quidem; dummodo aa ſit plus quàm bb. Sin illud, quàm hoc, minus ſit; erit $aa-bb$, minus quàm nihil.

Sluſianam Methodum pro Tangentibus, ſiquando viderim in *Oldenburgii* Tranſactionibus, oblitus ſum. Nec magni intereſt, cùm hujus aliorumque Methodos reapſe convenire putaverim, ſed ſub diverſo modo loquendi.

Quod tu mones, de illis qui *ex præſcripto agunt*, *Regularum fundamenta neſcientes*, omnino verum eſt. Atque hinc eſt quod ipſi *Methodorum æquipollentiam* non animadvertant, quæ (ſub variis loquendi formulis) reapſe conveniunt.

Quod æquationes *ſexti* gradus (quod cenſuit *Carteſius*) ſint reducibiles ad *quintum*; (ſed & æquationes gradus *octavi*, *noni*, & *decimi* reducibiles ad *ſeptimum*;) ego non negaverim. Sed neſcio an quiſquam id laboris hactenus in ſe ſuſceperit, ut reductionis methodum univerſalem indicaverit. Diſſolutionem compoſitarum Æquationum in ſimpliciores, innuit *Huddenius*, & (ante eum) *Harriotus.* Sed methodum univerſalem de omnibus ſic reducendis (ut ſunt *Biquadraticæ* ope *Cubicæ*) neſcio an quis aggreſſus ſit. Et fortè, ſiquando id fiat, tantis implicationibus id erit impeditum, ut vix foret operæ pretium perſequi. Nolim tamen quemquam inde deterrere, ſiquis aggredi velit.

Quod tuus *Calculus differentialis* multa habet cum aliorum ſenſis communia, etiam ipſius *Archimedis*; tu (pro candore tuo) liberè profiteris: Non tamen eſt inde minùs æſtimandus. Nam multa ſunt, quorum prima fundamenta fuerint Veteribus non ignota; ita tamen intricata & difficultatis plena, ut ſint ea (noſtra ætate) reddita multò dilucidiora & uſibus aptiora. (Ut, ne plura nominem, *Indorum Algorithmus* per figuras numerarias, & nuperorum *Calculus Analyticus* ſeu *Arithmetica ſpecioſa*; item

item *Conicarum Sectionum* exemptio è Cono in planum; aliaque plurima quæ præſens ætas Veterum inventis ſuperaddidit.) Adeoque, ut nollem Veteres ſua laude fraudare, (quorum fundamentis nos plura ſuperſtruximus) ita nec Modernos ſufflaminare velim ne porrò procedant, ſed incitare potius, & te præ cæteris.

Quod dixi, de retenta *ſpecie* trianguli abſtracta à magnitudine; non id intellectum velim quaſi Triangulum vellem quod magnitudinem non habeat; ſed, quòd conſiderari poſſit ſpecies ſeu forma Trianguli *abſtracta* à magnitudine; hoc eſt, non conſiderata magnitudine; (utputa, ſi dixero Triangulum æquilaterum, non interim dicto, quàm magnum ſit;) quippe hoc eſt *abſtrahere.* Si verò non placeat ut dicatur, *ſpecies* trianguli; dicas licet *Gradum Inclinationis*, *ſeu declivitatis curvæ*, *in puncto contactûs;* vel *Angulum quem cum ordinata facit recta contingens.* Quippe hoc eſt quod quæritur.

Dum ſuſpicaris, inſinuaſſe me, mihi non opus eſſe factum ex infinitè-parvo in ſe ducto, vel in aliud infinitè-parvum, (puta $\mathrm{d}^{-}_{x}\,\mathrm{d}^{-}_{x}$, vel $\mathrm{d}^{-}_{x}\,\mathrm{d}^{-}_{y}$;) omnino non aſſequeris mentem meam; quippe ego planè contrarium inſinuabam; (non, quòd hoc multiplum mihi non ſit opus, ſed hujus *neglectum* mihi non opus eſſe.) Nimirum, cùm factum ex $x + \mathrm{d}^{-}_{x}$ in $y + \mathrm{d}^{-}_{y}$, ſit $xy + y\,\mathrm{d}^{-}_{x} + x\,\mathrm{d}^{-}_{y} + \mathrm{d}^{-}_{x}\,\mathrm{d}^{-}_{y}$; hujus loco, tum tu tum D. *Hoſpitalius* (artic. 5.) aſſumitis (ſi ego vos rectè intelligo) $xy + y\,\mathrm{d}^{-}_{x} + x\,\mathrm{d}^{-}_{y}$, neglecto $\mathrm{d}^{-}_{x}\,\mathrm{d}^{-}_{y}$, quaſi hoc ſit pro nihilo habendum, eo quòd factum ſit ex infinitè-parvo in infinitè-parvum ducto, adeoque heterogeneum; (quod quaſi-*Poſtulatum* videmini paſſim adhibere.) Dixeram ego, hoc *Poſtulato* mihi non opus eſſe, (nempe, quòd factum ex infinitè-parvo in infinitè-parvum ducto, habendum ſit pro nihilo;) quod dixi *non niſi cautè admittendum eſſe.* Admitti tutò poteſt (ob rationem à me antè dictam) in contactu curvæ cum recta (quod vos facitis,) ſed non ita ſemper in mutuis curvarum inter ſe contactibus.

Hujuſque loco, mihi ſufficere dixi, quòd *nihili quodvis multiplum*, *ſit adhuc nihil;* (quod mihi videbatur ſimplicius.) Nam Diametri ſeu Directricis ſegmentum VD (inter Trianguli baſin, & ordinatam figuræ, interjectum,) quod vos vocatis x aut y, ego voco a: Adeoque, quo caſu puncta VD coincidunt (quod fit in tactu,) illud a nihil eſt (propter nihil interjectum;) adeoque ipſius a quodvis multiplum, eſt item nihil, ſeu evaneſcens. Quæque *inter evaneſcendum* (ut tu verè loqueris) *manent inæqualia*, (& quidem, in eadem ratione, inæqualia;) ea, quum *prorſus evanuerint*, ſunt pariter *nihil.* (Quod, ſi proceſſum meum ritè perpendas, non potes non videre.) Sin tu malis hanc punctorum VD *coincidentiam*, dicere, *diſtantiam infinitè-parvam*; per me licet.

Quum dixi te *Axem* (ſenſu laxiore) dicere, quo ſenſu dici ſolet *Diameter*; id notabam quidem (ut quod tu intellectum velles) non reprehen-

 debam.

debam. Nam perinde mihi eſt, ſive Axem, ſive Diametrum, ſive Directricem voces. Dum enim de ſenſu convenit, nolim ego tecum de nomine litigare.

Quod tu de *Interpolandi* Methodo, antehac aliquoties monuiſti; nimirum, quod *multum adhuc in receſſu habeat;* omnino verum eſt. Vis ut ego rem illam fuſiùs proſequar; Sed illud aggredi, hac ætate, mihi non vacat. Fontem tamen aperiam, unde alii pro libitu ſuos deducant rivulos ſatis copioſos.

Plurimæ ſunt (quod notum eſt) regularium *Progreſſionum* formulæ, (quas *Medietates* vocabant olim *Jordanus Brunus* aliique,) inter quas ſunt *Progreſſio* (quæ dicitur) *Arithmetica*, *Geometrica*, *Harmonica*; ſed & (quæ mihi dicuntur) Series *Secundanorum*, *Tertianorum*, *Subſecundanorum*, *Subtertianorum*, &c. Item Numerorum *Triangularium*, *Pyramidalium*, &c. Aliæque plurimæ. Et quidem plures excogitantur indices.

Quarum omnium (ſi Progreſſionem Æqualium excipias) Series *Primanorum*, ſeu *Arithmeticè-proportionalium*, eſt ſimpliciſſima, & quaſi norma reliquarum; ut 0, 1, 2, 3, 4, &c. ad quam exigendæ ſunt reliquæ, pro ſuo cujuſque charactere.

Verbi gratiâ; Series Numerorum *Triangularium*, ut 0, 1, 3, 6, 10, &c. cujus ego characterem facio $\frac{l^2+l}{2}$ (*Ar. Infin.* prop. 171, 172.) Hanc ego ſi interpolare velim; ſuppono ſic interpolatam (unis aut pluribus interpoſitis) ſeriem illam *Primanorum*; puta 0, $\frac{1}{2}$, 1, $1\frac{1}{2}$, 2, $2\frac{1}{2}$, 3, &c. Aut 0, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, 1, $1\frac{1}{3}$, $1\frac{2}{3}$, 2, $2\frac{1}{3}$, $2\frac{2}{3}$, 3, &c. Deinde, in Triangularium ſerie, expono l, per ſingulos ſic interpoſitos terminos; habeoque interpolatam ſeriem Numerorum Triangularium; puta 0, $\frac{3}{8}$, 1, $1\frac{7}{8}$, 3, $4\frac{3}{8}$, 6, &c. (Qui fiunt ex continua *Additione* Arithmeticè-proportionalium, $\frac{3}{8}+\frac{5}{8}+\frac{7}{8}+\frac{9}{8}+\frac{11}{8}+\frac{13}{8}$, &c. ut ſunt ipſi 1, 3, 6, 10, &c. hoc eſt $1+2+3+4$, &c: Sicut ſeries quam dico *Hypergeometricam*, 1, 2, 6, 24, 120, &c. ex continua *Multiplicatione* Arithmeticè proportionalium $1\times2\times3\times4\times5$ &c.) Atque ad eandem formam interpolandæ ſunt aliæ Series pro ſuo cujuſque charactere; (ut videre eſt ad *Ar. Infin.* pr. 184.) Ita tamen ut nonnunquam ſinguli interponendi termini exeant in Seriem infinitam; (aut aliam fortè poſthac excogitandam formam deſignandi quantitates perplexas, ſurdas, aut intricatas;) præſertim in Radicum extractionibus cujuſcunque generis, aliiſve id genus operationibus reſolutivis.

Ubi verò de pluribus hujuſmodi ſeriebus ſeparatim interpolandis conſtat, poſſunt harum duæ pluresve inter ſe componi ſeu commiſceri, addendo, ſubtrahendo, multiplicando, dividendo, radices extrahendo, aliiſve modis: ut nunquam deſitura ſit materia volentibus hanc Artem ampliare.

Hujus ego plurima exhibui ſpecimina, addendo & ſubtrahendo, *Ar. Infin.*

Infin. prop. 108, 111, 114, 117, & ſeqq. Item, prop. 155, 158, 159, & ſeqq. Multiplicando item & dividendo, prop. 58, 59, 73, & ſeqq. Item, prop. 85, 88, 101, & ſeqq. & ſpeciatim, prop. 166, 167, & ſeqq.

Hanc Artem adhibuiſſe *Newtonum*, non dubito, ſed quam reticet, contentus plurima exhibuiſſe ſpecimina, ex ſeriebus ſic compoſitis deprompta; donec harum rerum (quod ait) *pertæſus* deſtitit; patentem campum permittens aliis, ſiquis (otio abundans) eo ſe exercere velit.

Sed diſertè notat, ſe, neglectis ſæpe figurarum formis, (quibus res hæc non eſt coercenda,) ſeries abſtractas conſideraſſe. Quod & tu aliquando mones, Methodos tuas ampliores eſſe, quàm ut ſolis *Quadraturis* accommodentur.

Atque hoc eſt, quod potiſſimum mihi propoſitum videas, per totam meam *Arithmeticam Infinitorum*; Nempe, ut Speculationes *Geometricas*, abſtractè conſideratas, reducerem ad conſiderationem purè *Arithmeticam*, ſeu potiùs *Logiſticam*, (prout Arithmeticam & Logiſticam diſtinguebant Veteres; illam, ad Numerorum *Integrorum* conſiderationem accommodando; hanc, item ad *Fractionum* & quarumcunque *Rationum*, ſeu λόγων, conſiderationem;) Adeoque *Figurarum Quadraturas* (& quæ ſunt hujuſmodi) recenſeo, ut *Caſus particulares*, ſub generalibus & abſtractis Seriebus comprehenſos.

De *Cryptoliticis* (quod porrò mones) dicendum: Non omnes ſunt huic negotio pares, aut diſcendi capaces; (poſcit hæc res peculiare quoddam ingenii acumen:) Qui pares ſunt, (expertus loquor,) ubi quanti laboris res ea ſit animadvertunt, moleſtiam declinant, & molliora malunt ſtudia proſequi. Unum tamen aut alterum docturus ſum, quibus ſit ea methodis aggredienda, (ſi ſaltem *Methodus* dicenda ſit vaga venatio;) monſtrando, quibus ego paſſibus indagando ſoleo procedere: (Quod ipſe pro ſagacitate ſua imitetur:) Nec tamen eiſdem ſemper; nam, pro vario ferarum genere, varianda eſt venatio.

Hæc raptim ſcripſi, quo tuis utcunque reſpondeam Literis, ne officio in te deeſſem meo. Tu vale, tuoque faveas, &c. *Dabam Oxonii Jan.* 16. 1699.

P. S. Monendum hic duxi (ex *Philoſophicis Tranſactionibus* pro menſe *Octobri* 1697 deſumptum, in *Algebræ* meæ cap. 109. irrepſiſſe Numeros quoſdam vitioſos. Qui quamvis ſummam Demonſtrationis non evertant, ſunt tamen rectificandi. Propoſitum eſt, datum Cubum (cujus latus ponatur $= 1$,) ita perforare, ut Cubus alter, ipſi æqualis, per foramen tranſeat. Quod cùm pluribus modis fieri poſſit, hunc ſelegi. Intelligatur Cubus perforandus, Sphæræ inſcriptus; cujus itaque diameter ſeu axis erit

(æqualis Diagonio Cubi) $= \sqrt{3}$. Cujus polos occupent Cubi angulus A, & huic oppoſitus latens. Reliquique ſex anguli B C D E F G, in planum per centrum (axi ad angulos rectos) projiciantur. Non quòd illi omnes ſint in eodem plano, ſed B D F ſunt in plano ſuperiori quod ab A (polo proximo) diſtat Axis triente; reliquique C E G, in plano huic parallelo quod tantundem diſtat ab oppoſito polo latente. Sed omnes hi anguli, demiſſis in planum illud per centrum perpendicularibus projecti, formabunt in illo hexagonum regulare B C D E F G. Cui ſi intelligatur Circulus circumſcriptus, non erit ille, Circulus Sphæræ maximus (quia puncta ſic projecta non pertingunt ad extremum ambitum Circuli Sphæræ maximi per centrum;) ſed qualis ille eſt qui per B D F, vel per C E G, tranſit. Cujus itaque diameter eſt $= \sqrt{\frac{8}{3}}$. Et P B $= \sqrt{\frac{1}{6}}$. Et P G $= \sqrt{\frac{1}{2}}$. Et B M $= \sqrt{\frac{2}{3}} - \frac{1}{2}$. Et M Q $= \sqrt{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3}$. Cùm itaque M H $= \frac{1}{2} = 0.500$. (ſemilatus incumbentis Cubi tranſituri) minus ſit quàm M Q $= \sqrt{2} - \frac{1}{2}\sqrt{3} = 0.548 +$; manifeſtum eſt (facto foramine H I K L) tranſire poſſe cubum incumbentem, perforato æqualem.

N°. VII.

N°. VII.

EXTRAITS DE DIVERSES LETTRES

A l'Auteur du Journal des Savans.

LETTRE I. Mars 1675.

Touchant le principe de juſteſſe des Horloges portatives de ſon invention.

LE principe dont je me ſuis aviſé, il y a quelques années, pour donner une horloge juſte & portative, eſt tout différent de celui de la durée égale des balancemens, ou vibrations inégales des pendules, ou des reſſorts, que M. *Huyghens* a appliqué aux horloges, avec un applaudiſſement ſi général. Celui-là dépend d'une obſervation Phyſique, au-lieu que le mien n'eſt fondé que ſur une *réflexion purement méchanique* aſſez aiſée, & dont la raiſon, & démonſtration même eſt manifeſte à nos ſens; à laquelle on n'a pas pris garde, faute de l'*art des combinaiſons*, dont l'uſage eſt bien plus général que celui de l'Algébre. Car ayant conſidéré qu'un *reſſort étant rebandé au même point ſe débandera toûjours en même tems*, s'il trouve la même liberté de ſe débander ſubitement; j'ai inferé, qu'on en pourroit employer deux, dont l'un joüeroit, pendant que le premier mobile de l'horloge rebanderoit l'autre : car ainſi il n'importera pas s'il le rebande plus ou moins vîte, pourvû qu'il le rebande avant que l'autre achéve de ſe rebander, & par conſéquent l'un délivrant l'autre ſur la fin de ſon mouvement, ce jeu durera toûjours uniformément; & en laiſſant paſſer à chaque retour ou *période de ces deux reſſorts*, une dent d'une certaine roue entraînée par le mouvement ordinaire, & qui compte les ſecondes, ou autres parties du temps égales aux périodes, nous aurons une horloge ou montre telle que nous pourrons déſirer.

J'ai fait exécuter cette penſée de la façon qui s'enſuit: ſoit A B une des plaques de l'horloge: deux barillets dentés, dans leſquels les petites ſpires, ou reſſorts ſont enfermés C & M. Les dents des barillets prennent celles des pignons D d, qui portent les balanciers E e, & d'autres dents deſdits barillets ſont priſes par celles de la roue interrompue F G. Imaginons à préſent, que cette roue F G mue dans le ſens H F; par la TAB. II. Fig. 11.

la force du premier mobile de l'horloge, & tournant le barillet C, bande le reſſort qu'il renferme, & s'arrête avec le barillet, auſſi-tôt qu'elle a bandé ce reſſort. La piéce qui ſert à arrêter eſt aiſée, & on n'a pas jugé néceſſaire de la marquer pour ne pas embarraſſer la figure. Mais pendant qu'une partie dentée de la rouë interrompuë F G, ſçavoir F, tourne le barillet C, la partie vuide qui lui eſt oppoſée, ſçavoir G, répond à l'autre barillet M, & donne la liberté au reſſort qu'il renferme de ſe débander. Ainſi pendant que le mouvement de l'horloge bande le petit reſſort du barillet C, en même temps le petit reſſort du barillet M ſe débande lui-même. Je dis en même temps, excepté que le reſſort C aura un peu plus tôt achevé d'être bandé, que le reſſort M n'ait achevé de ſe débander. De ſorte que le reſſort C étant bandé, & la rouë F G arrêtée; tous deux attendent en cette poſture que le reſſort M, quand il ſera tout-à-fait débandé, touche ſur la fin de ſon mouvement une détente, ou piéce qui les délivre. Alors le reſſort C ſe débande de ſoi-même à ſon tour : les dents de la rouë interrompuë, qui continuë ſon mouvement, en même ſens qu'auparavant, depuis qu'elle eſt délivrée, ne pouvant plus l'en empêcher, parce que le barillet C rencontre à préſent la partie vuide H de ladite rouë. Mais avant qu'il achéve de ſe bander, la partie dentée L, oppoſée à la partie vuide H, tournant le barillet M, rebande ſon reſſort, & l'ayant fait, s'arrête avec lui, attendant que le reſſort C achevant de ſe débander, les délivre par une grace réciproque, & rende au reſſort M, les mêmes ſervices qu'il en avoit reçûs, pour en attendre d'autres tout ſemblables.

Cela bien conſidéré, il eſt manifeſte que les mêmes fonctions alternatives dureront toûjours. Que *les périodes* priſes du moment qu'un reſſort commence à ſe débander, juſqu'au moment qu'il ſe débande encore une fois, ſeront toûjours iſochrones, ou d'égale durée, *quoique les deux petits reſſorts ne ſoient pas également forts.* Que *le balancier* d'une telle horloge ou montre ſera double, qu'on le chargera plus ou moins, & qu'on lui donnera *le délai*, en avançant ou reculant le long des deux bras deux poids égaux, dont l'un contrebalance l'autre, afin que le changement de la ſituation ne puiſſe nuire aucunement à l'égalité de l'horloge. Au reſte on ſe pourra paſſer dans les montres de cette conſtruction de la fuſée, & par conſéquent de la corde, ou chainette. Il eſt aiſé auſſi de juger qu'elles pourront être aſſez petites, qu'elles ne feront pas plus de bruit que les montres ordinaires, qu'elles ſeront auſſi exactes que les pendules, & qu'elles ne ceſſeront pas de marcher, pendant qu'on les remonte. Et quoique le mouvement des rouës de l'horloge puiſſe être alteré par pluſieurs accidens, comme ſont celui de l'inégalité du mouvement du grand reſſort ordinaire, ou du premier mobile, le frottement des rouës plus ou moins grands, ſelon que l'huile ſe fond, ou s'épaiſſit, la

la rouille, le verd-de-gris, le jeu des piéces, l'inégalité des dents, & quantité d'autres ſujétions: néanmoins les périodes des petits reſſorts n'y ſeront pas intéreſſées, pourvû que le mouvement des roües de l'horloge ait toûjours plus de force qu'il ne lui en faut pour les rebander; ce qui eſt en nôtre pouvoir. Ainſi le principe d'égalité eſt aſſuré ici par une eſpèce de *démonſtration* toute *Géometrique*, & toute rigoureuſe, mais auſſi toute évidente aux capacités même les plus médiocres.

Il reſte à toucher en peu de mots les *objections* faites par quelques perſonnes intelligentes. Ils ſont tous demeurés d'accord, que ce ſeroit une montre, ou horloge parfaitement juſte pour l'uſage ordinaire: mais à l'égard de l'application aux Longitudes, on a fait d'abord les difficultés ſuivantes: Que le *choc* fait *trembler* les reſſorts auſſi-bien que les autres piéces: Que la *rouille* les mangera, puiſque l'humidité ſalée de la mer, dans les longues navigations, n'épargne pas même les aiguilles des Bouſſoles, quoiqu'enfermées dans leurs boëtes: Que les *changemens des Saiſons, & des Climats* altérent ſenſiblement les reſſorts, ſur-tout les grandes chaleurs, ou les pluyes entre les Tropiques, qui détrempent l'acier en quelque façon à la longue. On ajoûte que les expériences de l'illuſtre Académie de Florence ſont voir, avec quelle facilité la chaleur & le froid changent les reſſorts minces; outre que l'*air* plus ou moins condenſé réſiſtera auſſi plus ou moins au mouvement des balanciers. Qu'en travaillant les reſſorts s'affoibliſſent, & qu'enfin il y aura toûjours quelque peu de *frottement*, qui fera que les piéces marcheront avec plus ou moins de facilité, & que même elles s'uſeront à la fin.

Je prétends ſurmonter tous ces défauts, qui viennent de l'imperfection de la matiére, par un *reméde général*, ſans les examiner ici en détail. C'eſt qu'on ſe peut ſervir, pour l'exécution en grand, de *reſſorts maſſifs*, comme ſont ceux des arbalêtes, puiſqu'on en eſt le maître, & puiſqu'on ne manquera pas de force ni de place dans un Vaiſſeau, pour gouverner un grand poids qui ſerve à les rebander continuellement. Or, les reſſorts maſſifs pourront être ſi forts, & leur reſtitution ſi ſubite en augmentant leur nombre, que tous les défauts ſuſdits n'auront point de proportion conſidérable à cette force; & l'amas de leurs répétitions ne ſera ſenſible qu'après un fort long temps. Il eſt aiſé même de démontrer qu'en augmentant la grandeur de la machine, & la force des reſſorts maſſifs, on pourra rendre l'erreur auſſi petite que l'on voudra; pourvu qu'on ne paſſe pas les bornes de la commodité, & qu'on ſe contente d'une exactitude ſuffiſante pour la fin à laquelle on les deſtine principalement, qui eſt la découverte des Longitudes. Cette réponſe eſt ſi claire, & ſi générale, que tous ceux qui l'ont conſidérée, ont témoigné d'en être fort ſatisfaits.

LETTRE II. Février 1678.

Obſervation nouvelle de la maniére d'eſſayer ſi un nombre eſt primitif.

J'Ai fait quelques obſervations ſur les nombres primitifs, qui ſont de conſéquence, à mon avis, pour la perfection de la ſcience des nombres, dont on appelle *primitifs* ceux qui ne peuvent être diviſés, ni produits par multiplication, au lieu que tous les autres peuvent être produits & diviſés par ceux-ci. Si leur progreſſion étoit bien connuë, elle ſerviroit à nous découvrir le myſtère des nombres en général: mais elle a paru ſi bizarre juſques ici, qu'on n'en a pû trouver aucune marque ni proprieté affirmative; & tout ce qu'on en ſçait, c'eſt qu'ils ſont indiviſibles: encore eſt-il mal-aiſé de le reconnoitre dans les grands nombres, ſans en faire l'eſſai par une multitude d'autres, ce qui eſt étrangement prolixe. Je crois avoir trouvé le vrai chemin pour pénétrer dans leur nature: mais n'ayant pas eu encore le loiſir de l'achever, je vous donnerai ici une proprieté poſitive, qui me paroit curieuſe & utile, quoiqu'elle ne ſoit pas réciproque; car au moins tous les nombres qui ne l'ont pas, ſeront exclus d'abord. Voici cette proprieté. Tout nombre primitif au deſſus de cinq étant diminué ou de 1. ou de 5. disjonctivement, eſt diviſible par 6. Par exemple, 7 moins 1 eſt 6. 11 moins 5 eſt 6. 13 m. 1 eſt 12. 17 m. 5 eſt 12. 19 m. 1 eſt 18. 37 m. 1 eſt 36. 101 m. 5 eſt 96. 103 m. 1 eſt 102, qui diviſé par 6 donne 17. 10007 m. 5 diviſé par 6 donne 1667. 510511 m. 1 diviſé par 6 donne 85084. &c.

LETTRE III. May 1678.

Touchant la quadrature d'une portion de la roulette.

IL n'y a que deux portions purement cycloïdales & ſimples, c'eſt-à-dire, ſegmens, compris entre la courbe de la cycloïde & une droite, dont on ait trouvé juſqu'ici la quadrature abſolue, ſans ſuppoſer celle du cercle. La premiére quadrature eſt celle de M. *Huygens*, ſavoir: Que la droite KGE [parallèle au plan MI ſur lequel le cercle generateur ACHNA roule, & éloignée du ſommet A de la diſtance A G quatriéme partie du diamètre A H] retranche de la cycloïde M I E A K M, le ſegment horizontal K E A K égal à A O P H demi-hexagone inſcrit dans le cercle générateur. L'autre quadrature m'eſt venue dans l'eſprit à l'occaſion d'un Theorème fort général que je donnerai ailleurs. Je l'ai communiquée à pluſieurs à Paris; mais comme je puis juger de ce que M. *de la Hire* n'en fait point de mention, qu'elle n'eſt pas encore aſſez connue, je vous la donne ici énoncée & démontrée.

Théo-

Théorème.

A F E A ſegment incliné de la cycloide [compris entre A E F portion de la courbe cycloïdale, & A F droite menée du ſommet A au point F qui répond à B centre du cercle générateur A C H N A] eſt égal au triangle rectangle A B C [c'eſt-à-dire, au demi-quarré du rayon.] Pour en donner la démonſtration, je ſuppoſe, TAB. II. Fig. 11.*

1°. Que le Triangle A C F eſt égal au quadrant A B C D A, parce que la baſe de ce Triangle C F eſt égale à A D C, arc du quadrant; & ſa hauteur eſt le rayon A B.

2°. Que la Retorte A D C F E A eſt égale au quarré du rayon, ou au double Triangle A B C, ce qui ſe trouve chez les Pères *Fabri*, & *Lalovére*, chez M. *Wallis*, M. *de la Hire* & autres.

Démonſtration. (a)

ABCDA + ADCFEA = ABFEA = ABC + ACF + AFEA, mais par la premiére ſuppoſition A C F = A B C D A, & par la ſeconde ADCFEA = 2 ABC, donc ABCDA + 2 ABC = ABC + ABCDA + AFEA, & partant ABC = AFEA. Ce qu'il falloit démontrer.

(a) La démonſtration ci-deſſus n'eſt point la même que celle qui eſt dans le Journal des Savans année 1678. p. 220. parce qu'elle étoit inintelligible, comme le prouve la lettre ci-deſſous : M. *Bertrand* Profeſſeur en Mathématiques à Genève a eu la complaiſance de la redreſſer.

Extrait d'une lettre de M. Leibniz *à M. l'Abbé* de la Roque *Auteur du Journal des Savans du 6. Décembre 1678. qui ſe trouve à la page 138. de l'Otium Hanoveranum* Felleri.

» Ma démonſtration de Géométrie imprimée dans votre 18. Journal de cette » année peut paſſer pour une énigme. Car » de la maniére que l'Imprimeur en a » rangé les mots, tout autrement que je » ne les avois écrits, il faut être habile » homme pour l'entendre, & déchiffrer. » J'avois rangé cette démonſtration d'une » maniére ſi courte & néanmoins ſi intelligible, que j'y prenois plaiſir moi-» même, & croyois qu'elle pourroit ſervir d'exemple, mais l'Imprimeur s'y eſt » oppoſé, & l'arrangement qu'il en a fait » m'a bien fait rire.

N°. VIII.

DE VERA PROPORTIONE CIRCULI

Ad Quadratum circumſcriptum in Numeris rationalibus,

à G. G. LEIBNITIO expreſſa.

Ex Actis Eruditor. Lipſienſ. ann. 1682.

PRoportiones curvilineorum ad Rectilinea inveſtigare Geometræ ſemper ſunt conati, & tamen nunc quoque, etiam poſt Algebram adhibitam, nondum ea res ſatis in poteſtate eſt, ſecundùm methodos quidem hactenus publicatas; neque enim hæc problemata ad æquationes Algebraicas revocari poſſunt: & uſum tamen pulcherrimum habent, inprimis in Mechanica ad puræ Geometriæ terminos reducenda, quod norunt, qui talia profundiùs inſpexere, pauci quidem, ſed maximè eximii Mathematicorum. Primus *Archimedes*, quantum conſtat, invenit, quæ ſit ratio inter conum, ſphæram, & cylindrum ejuſdem altitudinis, & baſis, nempe qualis eſt numerorum 1, 2, 3, ita ut cylinder ſit triplus coni, & ſeſquialter ſphæræ; unde ſphæram, & cylindrum etiam ſepulcro ſuo inſculpi juſ-
Tab. III. ſit: ideo invenit quadraturam Parabolæ. Noſtro ſeculo repertus eſt modus metiendi figuras curvilineas innumerabiles, inprimis quando ordinatæ B C in ſchemate 1, ſunt in ratione utcunque multiplicata, aut ſubmultiplicata, directa, aut reciproca, abſciſſarum A B, vel D C; erit enim figura A B C A ad rectangulum circumſcriptum A B C D, ut unitas ad numerum rationis multiplicationem exprimentem, unitate auctum. Exempli gratiâ, quia in *Parabola* abſciſſis A B, ſive D C, exiſtentibus ut nu-
Fig. 12. meris naturalibus, 1, 2, 3, &c. ordinatæ B C, ſunt ut eorum quadrata 1, 4, 9, &c. ſeu *in duplicata* ratione numerorum, tunc numerus rationis multiplicationem exprimens erit 2: ergo erit figura A B C A ad rectangulum circumſcriptum A B C D, ut 1 ad 2 + 1, ſeu ut 1. ad 3; ſive, figura erit tertia pars rectanguli. Si A B vel C D maneant numeri naturales, & B C fiant cubi, 1, 8, 27, &c. (nempe in *Paraboloide cubica*) foret ratio ordinatarum *triplicata* rationis abſciſſarum: Ergo figura ad rectangulum, ut 1 ad 3 + 1, ſive 4; ſeu pars quarta. Sin D C ſint quadrata, B C cubi, ſive ratio ipſorum B C, rationis ipſarum D C *triplicata ſubduplicata*,

erit

erit figura (*paraboloides cubico-ſubquadratica*) A B C A ad rectangulum A B C D, ut 1 ad $\frac{3}{2}+1$, ſeu duas quintas rectanguli conſtituet. In *reciprocis*, numero rationis multiplicationem exprimenti præfigitur ſignum —, ſive minus.

Sed circulus nondum hactenus cogi potuit ſub hujuſmodi leges, quamvis ab omni retro memoria a Geometris exercitus. Nondum enim inveniri potuit numerus exprimens rationem circuli A, ad quadratum circumſcriptum B C *figur.* 13, quod eſt quadratum diametri D E. Nec inveniri potuit ratio circumferentiæ ad diametrum, quæ eſt quadrupla rationis circuli ad quadratum. *Archimedes* quidem polygona circulo inſcribens, & circumſcribens, quoniam major eſt inſcriptis, & minor circumſcriptis, modum oſtendit exhibendi limites, intra quos circulus cadat, ſive exhibendi appropinquationes: eſſe ſcilicet rationem circumferentiæ ad diametrum, majorem quàm 3 ad 1, ſeu quàm 21 ad 7, & minorem quàm 22 ad 7. Hanc methodum alii ſunt proſecuti, *Ptolemæus*, *Vieta*, *Metius*, ſed maximè *Ludolphus* Colonienſis, qui oſtendit eſſe circumferentiam ut Tab. III. Fig. 13.

3. 14159265358979323846 &c.
ad diametrum, ad 1. 00000000000000000000

Verùm hujuſmodi appropinquationes, etſi in Geometria practica utiles, nihil tamen exhibent, quod menti ſatisfaciat, avidæ veritatis, niſi progreſſio talium numerorum in infinitum continuandorum reperiatur. Multi quidem perfectum Tetragoniſmum profeſſi ſunt, ut Cardinalis *Cuſanus*, *Orontius Finæus*, *Joſephus Scaliger*, *Thomas Gephyrander*, *Thomas Hobbes*, ſed omnes falsò: calculis enim *Archimedis*, vel hodie *Ludolphi*, refellebantur.

Sed quoniam video, multos non ſatis percepiſſe, quid deſideretur: ſciendum eſt, Tetragoniſmum, ſive converſionem circuli in æquale quadratum, aliamve rectilineam figuram (quæ pendet a ratione circuli ad quadratum diametri, vel circumferentiæ ad diametrum) poſſe intelligi quadruplicem, nempe vel per calculum, vel per conſtructionem linearem; utrumque vel accuratè, vel propemodum. *Quadraturam* per calculum accuratum voco *Analyticam*; eam verò quæ per conſtructionem accuratam fit, voco *Geometricam*; per calculum prope verum, habetur *appropinquatio*; per conſtructionem propè veram, *Mechaniſmus*. Appropinquationem longiſſimè produxit *Ludolphus*; Mechaniſmos egregios *Vieta*, *Hugenius*, aliique dedere.

Conſtructio Geometrica accurata haberi poteſt, qua non tantùm circulum integrum, ſed & quemlibet ſectorem, ſive arcum metiri liceat, motu exacto, atque ordinato, ſed qui curvis tranſcendentibus competat; quæ per errorem alioqui Mechanicæ cenſentur, cùm tamen æquè ſint Geometricæ, ac vulgares: licet Algebraicæ non ſint, nec ad æquationes Algebraicas, ſeu certi gradus, reduci queant; ſuas enim proprias, etſi non

Algebraicas, tamen analyticas habent. Sed iſta hic pro dignitate exponi non poſſunt. *Quadratura Analytica*, ſeu quæ per calculum accuratum fit, iterum in tres poteſt diſpeſci; in Analyticam tranſcendentem, Algebraicam, & Arithmeticam. Analytica *tranſcendens*, inter alia habetur per æquationes gradus indefiniti, hactenus a nemine conſideratas, ut ſi ſit $X^x + X$ æqual. 30, & quæratur X, reperietur eſſe 3, quia $3^3 + 3$ eſt 27 + 3 ſive 30: quales æquationes pro circulo dabimus ſuo loco. *Algebraica* expreſſio fit per numeros, licet irrationales, vulgares, ſeu per radices æquationum communium: quæ quidem pro quadratura generali circuli ſectoriſque impoſſibilis eſt. Supereſt *Quadratura Arithmetica*, quæ ſaltem per ſeries fit, exhibendo valorem circuli exactum progreſſione terminorum, in primis rationalium, qualem hoc loco proponam.

Tab. III. Inveni igitur: vid. fig. 14.

Fig. 14. Quadrato Diametri exiſtente 1.

Circuli aream fore: $\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \frac{1}{15} + \frac{1}{17} - \frac{1}{19}$ &c. nempe quadratum diametri integrum demta (ne nimius fiat valor) ejus tertia parte, additâ rurſus (quia nimium demſimus) quintâ, demtâque iterum (quia nimium re-adjecimus) ſeptimâ; & ita porrò.

Eritq. valor juſto major 1 errore tamen exiſtente infra . . . . . . $\frac{1}{3}$

minor $\frac{1}{1} - \frac{1}{3}$ . . . . $\frac{1}{5}$

major $\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5}$ . . . . $\frac{1}{7}$

minor $\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7}$ . . . . $\frac{1}{9}$

&c. &c.

Tota ergo ſeries continet omnes appropinquationes ſimul, ſive valores juſto majores, & juſto minores: prout enim longè continuata intelligitur, erit error minor fractione data, ac proinde & minor data quavis quantitate. Quare tota ſeries exactum exprimit valorem. Et licet uno numero ſumma ejus ſeriei exprimi non poſſit, & ſeries in infinitum producatur; quoniam tamen una lege progreſſionis conſtat, tota ſatis mente percipitur. Nam, ſiquidem circulus non eſt quadrato commenſurabilis, non poteſt uno numero exprimi, ſed in rationalibus neceſſariò per ſeriem exhiberi debet; quemadmodum & Diagonalis quadrati, & ſectio extremâ, & mediâ ratione facta, quam aliqui divinam vocant, aliæque multæ quantitates, quæ ſunt irrationales. Et quidem ſi *Ludolphus* potuiſſet regulam dare, qua in infinitum continuarentur numeri 314159 &c. dediſſet nobis quadraturam Arithmeticam exactam in integris, quam nos exhibemus in fractis.

Ne quis autem in his parum verſatus putet, ſeriem ex infinitis terminis conſtantem non poſſe æquari circulo, qui eſt quantitas finita: ſciendum eſt, multas ſeries numero terminorum infinitas, eſſe in ſumma quantitates finitas.

finitas. Exempli facillimi loco ſit ſeries ab unitate decreſcens, progreſſionis geometricæ duplæ, $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64}$ &c. in infinitum, quæ tamen non facit plus quàm 1. Nam in adjecta linea recta A B (*fig.* 15.) quæ ſit 1, erit A C $\frac{1}{2}$, & reſiduum (C B) biſecando in D, habebis C D $\frac{1}{4}$; & reſiduum (D B) biſecando in E, habebis D E $\frac{1}{8}$; & reſiduum (E B) biſecando in F, habebis E F $\frac{1}{16}$; & ita continuando ſine fine, nunquam egredieris terminum B. Idem in fractionibus numerorum figuratorum, ſeu triangulo Harmonico fieri a me alibi oſtenſum eſt. Tab. III. Fig. 15.

Multa notari poſſent circa hanc Quadraturam, ſed quæ nunc perſequi non vacat; hoc tamen præterire non oportet, terminos ſeriei noſtræ, $\frac{1}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7}, \frac{1}{9}$ &c. eſſe progreſſionis harmonicæ, ſive in continua proportione harmonica, ut experienti patebit: Quin & per ſaltum, $\frac{1}{1}, \frac{1}{5}, \frac{1}{9}, \frac{1}{13}, \frac{1}{17}$ &c. eſt etiam ſeries progreſſionis harmonicæ; & $\frac{1}{3}, \frac{1}{7}, \frac{1}{11}, \frac{1}{15}, \frac{1}{19}$ &c. eſt itidem ſeries harmonicè proportionalium. Itaque cùm circulus ſit $\frac{1}{1} + \frac{1}{5} + \frac{1}{9} + \frac{1}{13} + \frac{1}{17}$ &c. $- \frac{1}{3} - \frac{1}{7} - \frac{1}{11} - \frac{1}{15} - \frac{1}{19}$ &c. poſteriorem ſeriem partialem, a priori ſubtrahendo; erit magnitudo circuli, differentia duarum ſerierum progreſſionis harmonicæ. Et quoniam quotcunque terminorum numero finitorum progreſſionis harmonicæ ſumma, compendio aliquo iniri poteſt, hinc appropinquationes compendioſæ, (ſi poſt Ludolphinam illis eſſet opus) duci poſſent.

Si quis in ſerie noſtra terminos ſigno — affectos tollere volet, is duos proximos $+ \frac{1}{1} - \frac{1}{3}$, item $+ \frac{1}{5} - \frac{1}{7}$, item $+ \frac{1}{9} - \frac{1}{11}$, & $+ \frac{1}{13} - \frac{1}{15}$, & $+ \frac{1}{17} - \frac{1}{19}$, & ita porrò, in unum addendo, habebit ſeriem novam pro magnitudine circuli, nempe $\frac{2}{3}$ (id eſt $\frac{1}{1} - \frac{1}{3}$) $+ \frac{2}{35}$ (id eſt $\frac{1}{5} - \frac{1}{7}$) $+ \frac{2}{99}$ (id eſt $\frac{1}{9} - \frac{1}{11}$) itaque:

Quadrato inſcripto exiſtente. $\frac{1}{4}$

Erit Area Circuli $\frac{1}{3} + \frac{1}{35} + \frac{1}{99} + \frac{1}{195} + \frac{1}{323}$ &c.

Sunt autem numeri 3. 35. 99. 195. 323 &c; excerpti per ſaltum ex ſerie numerorum quadratorum (4. 9. 16. 25. &c.) unitate minutorum, unde fit ſeries: 3. 8. 15. 24. 35. 48. 63. 80. 99. 120. 143. 168. 195. 224. 255. 288. 323. 360. 399 &c. ex cujus ſeriei numeris, quartus quiſque poſt primum noſter eſt. Inveni autem (quod memorabile eſt) ſeriei infinitæ $\frac{1}{3} + \frac{1}{8} + \frac{1}{15} + \frac{1}{24} + \frac{1}{35} + \frac{1}{48} + \frac{1}{63} + \frac{1}{80} + \frac{1}{99}$ &c. ſummam eſſe $\frac{3}{4}$: quin & ſimplici ſaltu excerpendo nempe $\frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \frac{1}{35} + \frac{1}{63} + \frac{1}{99}$ &c. ejus ſeriei infinitæ ſumma facit $\frac{2}{4}$ ſeu $\frac{1}{2}$. Sed ſi ex hac iterum, ſimplici ſaltu terminos excerpamus, nempe: $\frac{1}{3} + \frac{1}{35} + \frac{1}{99}$ &c. ejus ſeriei infinitæ ſumma erit Semicirculus, poſito quadratum diametri eſſe 1. Quoniam autem eadem opera & *quadratura Hyperbolæ Arithmetica* habetur, placet totam harmoniam oculis ſubjicere:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	
1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144	169	196	225	256	289	324	361	400	
0	3	8	15	24	35	48	63	80	99	120	143	168	195	224	255	288	323	360	399	
	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{35}$	$\frac{1}{48}$	$\frac{1}{63}$	$\frac{1}{80}$	$\frac{1}{99}$	$\frac{1}{120}$	$\frac{1}{143}$	$\frac{1}{168}$	$\frac{1}{195}$	$\frac{1}{224}$	$\frac{1}{255}$	$\frac{1}{288}$	$\frac{1}{323}$	$\frac{1}{360}$	$\frac{1}{399}$	&c.
	$\frac{1}{3}$	·	$\frac{1}{15}$	·	$\frac{1}{35}$	·	$\frac{1}{63}$	·	$\frac{1}{99}$	·	$\frac{1}{143}$	·	$\frac{1}{195}$	·	$\frac{1}{255}$	·	$\frac{1}{323}$	·	$\frac{1}{329}$	&c.
	·	$\frac{1}{8}$	·	$\frac{1}{24}$	·	$\frac{1}{48}$	·	$\frac{1}{80}$	·	$\frac{1}{120}$	·	$\frac{1}{168}$	·	$\frac{1}{224}$	·	$\frac{1}{288}$	·	$\frac{1}{360}$	·	&c.
	$\frac{1}{3}$	·	·	·	$\frac{1}{35}$	·	·	·	$\frac{1}{99}$	·	·	·	$\frac{1}{195}$	·	·	·	$\frac{1}{323}$	·	·	&c.
	·	$\frac{1}{8}$	·	·	·	$\frac{1}{48}$	·	·	·	$\frac{1}{120}$	·	·	·	$\frac{1}{224}$	·	·	·	$\frac{1}{360}$	·	&c.

æquatur
- - - - - - - - - $\frac{3}{4}$
- - - - - - - - - $\frac{2}{4}$
- - - - - - - - - $\frac{1}{4}$

æquatur
circulo ABCD cujus
potentia inſcripta
Hyperbolæ CBEHC, cujus quadratum ABCD
eſt $\frac{1}{4}$

Tab. III. Fig. 16. Sit in *figura* 16. Aſymptotis AF, AE, ſibi normalibus, Hyperbolæ curva deſcripta GCH, cujus vertex C, potentia vero Hyperbolæ inſcripta ſive quadratum, quod rectangulo ſub ordinata quacunque EH, in ſuam abſciſſam AE, ſemper æquale eſt, ſit ABCD: circa hoc quadratum deſcribatur circulus, & ponatur Hyperbola ita continuata à C uſque ad H, ut ſit AE dupla ipſius AB. Tunc poſito AE eſſe unitatem, erit AB $\frac{1}{2}$, & ejus quadratum ABCD erit $\frac{1}{4}$, & Circulus cujus potentia inſcripta eſt ABCD, erit $\frac{1}{3}+\frac{1}{35}+\frac{1}{99}$ &c. Hyperbolæ verò (cujus potentia inſcripta eſt idem quadratum $\frac{1}{4}$) portio CBEHC, quæ logarithmum rationis ipſius AE ad AB (ſive binarii) repræſentat, erit $\frac{1}{8}+\frac{1}{48}+\frac{1}{120}$ &c.

N°. IX.

N°. IX.

UNICUM OPTICÆ, CATOPTRICÆ ET DIOPTRICÆ PRINCIPIUM.

Ex Actis Erud. Lipſ. 1682.

HYpotheſis primaria his ſcientiis communis, ex qua omnis radiorum lucis directio Geometricè determinatur, hæc conſtitui poteſt: *Lumen à puncto radiante ad punctum illuſtrandum pervenit viâ omnium facillimâ; quæ determinanda eſt primùm reſpectu ſuperficierum planarum, accommodatur verò ad concavas, aut ad convexas, conſiderando earum planas tangentes.* Non tamen hîc rationem habeo quarundam irregularitatum, fortaſſe locum habentium in generatione colorum, aliiſque phænomenis extraordinariis, quæ in praxi Optica non attenduntur. Tab. IV. Fig. 17.

Hinc in *Optica ſimplici, radius directus à puncto radiante* C *ad punctum illuſtrandum* E *pervenit* viâ breviſſimâ directâ, eodem nempe manente medio, id eſt in *linea recta* CE.

In Catoptrica angulus incidentiæ CEA, *& reflexionis* DEB *ſunt æquales.* Sit enim punctum radians C, illuſtrandum D, ſpeculum planum AB: quæritur punctum ſpeculi E, radium ad D reflectens. Dico id eſſe tale, ut tota via, CE + ED fiat omnium minima, ſeu minor quàm CF + FD, ſi nimirum aliud quodcunque ſpeculi punctum F fuiſſet aſſumtum. Hoc obtinebitur, ſi E ſumatur tale, ut anguli CEA & DEB ſint æquales; ut ex Geometria conſtat. Hac demonſtratione uſi ſunt *Ptolemæus*, & alii veteres, extatque tum alibi, tum apud *Heliodorum Lariſſæum.*

In Dioptrica ſinus complementi, EH & EL, *angulorum incidentiæ* CEA, *& refractionis* GEB, *ſervant eandem ſemper rationem, quæ eſt reciproca reſiſtentiæ mediorum.* Sit IE aër, EK aqua, vel vitrum, vel aliud medium denſius aëre; punctum radians in aëre C, punctum illuſtrandum ſub aqua G: quæritur, qua via radiet illud ad hoc; ſeu quod ſit punctum E in ſuperficie aquæ AB, radium à C emiſſum refringendo mittens ad G. Hoc E ſumi debet tale, ut via ſit omnium facillima. Jam in diverſis mediis viæ difficultates ſunt in compoſita ratione, & longitudinis viarum, & reſiſtentiæ mediorum. Sint rectæ *m* & *n* repræſentantes reſiſtentiam reſpectu luminis, illa aëris, hæc aquæ; erit difficultas viæ à C ad E, ut rectangulum ſub CE & *m*; à E ad G, ut rectangulum ſub EG & *n*. Ergo ut difficultas viæ CEG ſit omnium minima, debet ſumma

rectangulorum CE in m + EG in n eſſe omnium poſſibilium minima, ſeu minor quàm CF in m + FG in n; ſumto puncto F alio præter E quocunque. Quæritur E. Cùm ergo puncta C & G item recta AB, data ſint poſitione, ideo rectas datas ad planum perpendiculares, vocabimus, CH, c; & GL, g; ipſam autem HL, h, etiam datam. At quæſitam EH vocabimus y, erit EL, $h-y$, & CE, $\sqrt{cc+yy}$, quam vocabimus p; & EG erit $\sqrt{gg+yy-2hy+hh}$, quam vocabimus q. Debet ergo $m\sqrt{cc+yy}+n\sqrt{gg+yy-2hy+hh}$ (ſeu $mp+nq$) eſſe omnium poſſibilium ſimiliter enuntiandarum quantitatum minima, & ut talis fiat, quæritur y. *Ex mea methodo de maximis & minimis*, quæ ſuper omnes hactenus notas calculum mirificè contrahit, primo ſtatim obtutu, ſine ullo propemodum calculo patet; fore mqy æqual. np, $h-y$ ſeu np ad mq, ut y ad $h-y$, ſeu rectangulum CE in n ad rectangulum EG in m, ut EH ad EL. Ergo poſitis CE & EG æqualibus, erit, n reſiſtentia aquæ reſpectu luminis, ad m reſiſtentiam aëris, ut EH ſinus complementi anguli incidentiæ CEA in aëre, ad EL ſinum complementi anguli refractionis GEB in aqua; ſeu ſinus complementi erunt in reciproca reſiſtentiæ mediorum ratione, quod aſſerebatur. Itaque ſi EL in uno exemplo, vel experimento reperiatur eſſe duarum tertiarum ipſius EH, erit, & in aliis omnibus, ubicunque C & G ſumantur, illud in aëre, hoc in vitro. Si E in aëre, & G ſub aqua, erit EL $\frac{3}{4}$ ipſius EH circiter.

Reduximus ergo omnes radiorum leges experientia comprobatas ad puram Geometriam, & calculum, unico adhibito principio, ſumto à cauſa finali, ſi rem rectè conſideres: neque enim radius è C egrediens conſultat, quomodo ad punctum E, vel D, vel G pervenire quàm facillimè poſſit, neque per ſe ad ipſa refertur; ſed Conditor rerum ita creavit lucem, ut ex ejus natura pulcherrimus ille eventus naſceretur. Itaque errant valde, ne quid gravius dicam, qui *cauſas finales* cum *Carteſio* in Phyſica rejiciunt; cùm tamen præter admirationem divinæ ſapientiæ, pulcherrimum nobis *principium* præbeant *inveniendi* earum quoque rerum proprietates, quarum interior natura nondum tam clarè nobis cognita eſt, ut cauſis efficientibus proximis uti, machinaſque, quas conditor ad effectus illos producendos, fineſque ſuos obtinendos adhibuit, explicare valeamus. Intelligimus etiam hinc veterum meditationes in his quoque rebus non adeo eſſe contemnendas, ac hodie quibuſdam videtur. Nam mihi valde veriſimile fit, ſummos Geometras, *Snellium*, & *Fermatium*, verſatiſſimos in Veterum Geometria, methodum, qua illi uſi erant in Catoptrica, ad Dioptricam traduxiſſe. *Snellii* ſanè theorema, quod ex ejus tribus Opticæ libris ineditis affert V. Cl. *Iſaacus Voſſius*, ſuſpicor ſimili ferè methodo (licet non tantâ opinor, quantâ hìc uſi ſumus, calculi facilitate) reper-

tum

tum fuiſſe. Ex noſtro enim ſtatim ſequi, ſic oſtendam. Circulus C B G, centro E radio E C, vel E G deſcribatur, hujus in B tangenti productæ occurrant C E in V, & E G in T. Sit oculus in C, objectum, quod ſub aqua videtur in T, & punctum T apparebit eſſe in V, quia per lineam rectam C E V videre nobis videmur, cùm tamen videamus revera per fractam C E T, patet E V eſſe ſecantem anguli incidentiæ C E A, vel ei æqualis V E B; & E T eſſe ſecantem anguli refractionis G E B. Sunt autem, ex nota trigonometriæ propoſitione, ſecantes reciprocè ut ſinus complementi, ergo directè E V ad E T, ut E L ad E H, ſeu (per theorema noſtrum) ut m ad n. Ergo oculo C exiſtente in alio medio, quàm objectum T, erit radius in medio objecti (aquâ) apparens E V, ad radium in medio objecti (aquâ) verum E T, ut m reſiſtentia (aëris) medii oculi ad n reſiſtentiam (aquæ) medii objecti. Quæ ratio cùm ſemper ſit eadem, iiſdem manentibus mediis, ideo ratio inter radium verum E T, & apparentem E V, ſemper eadem erit, quod erat theorema *Snellianum*.

Eodem modo ratio E L, & E H ſinuum complementi angulorum refractionis, & incidentiæ, cùm nobis ſit reciproca reſiſtentiæ mediorum, ſemper eadem erit: quod eſt theorema *Carteſianum*, licet de reſiſtentia mediorum diverſa noſtris, imo contraria ſenſerit *Carteſius*. Quare non abs re Cl. *Spleiſſius* Vir in his quoque ſtudiis verſatiſſimus animadverſo hoc conſenſu concluſionum, dubitat annon *Carteſius*, cùm in Batavis eſſet, viderit theorema *Snellianum*; notat enim ſolenne ipſi fuiſſe præterire nomina autorum, & exemplum affert mundanorum vorticum, ad quos *Jordanus Brunus*, & *Johannes Keplerus* ita digitum intenderint, ut tantùm iſtud vocabulum ipſis defuiſſe videatur. Accedit, quod *Carteſius* theorema hoc ſuum proprio marte demonſtraturus in magnas incidit ſalebras: quoniam enim videbat radium C E ex aëre in aquam delatum, ibi refringi in E G, & ita verſus perpendicularem E K, adeoque illi radio ſimiliorem reddi, cujus fortior eſt actio, nempe perpendiculari; ſuſpicatus eſt eum minus reſiſtentiæ invenire in aqua, vel in vitro, quàm in aëre. Cùm tamen ſupponendo contrarium, quod multo magis rationi conſentaneum eſt, adhibito noſtro facillimæ viæ principio, ad eandem concluſionem perveniatur. Unde rectè collegit *Fermatius*, *Carteſium* non reddidiſſe veram theorematis ſui rationem. Similitudo quoque, qua illuſtrare conatur explicationem ſuam, parum apta eſt. Sit in *fig.* 18. globulus A ſuper tabula polita B C procurrens in loco 1 A: is in medio occurſu offendat partem tabulæ D E tapete inſtratam, ubi curret tardius in 2 A. Eodem igitur modo putat vitrum, aliudve corpus ſolidum minùs morari radios lucis, quàm aërem, qui ſit magis villoſus. Sed (ut taceam, & aquæ partes ſatis molles eſſe ſecundùm ipſum *Carteſium*) ſufficit conſiderare globulum, ubi ex 2 A, tapete D E ſuperato, rurſus ad partem tabulæ po-

Tab. IV. Fig. 18.

litam in 3 A pervenit, ibi non recuperare priorem celeritatem, quam habebat in 1 A, antequam tapetem offenderet: cùm tamen radius lucis ex medio magis reſiſtente in medium minus reſiſtens, primo ſimile, rurſus ingreſſus, priorem ſtatum recuperet, & poſito duorum mediorum ſimilium, primi & ultimi, ſuperficies (illius emittentem, hujus recipientem) eſſe planas parallelas, Directionem recipiat per refractionem poſteriorem illi parallelam, quam habuit ante priorem.

Videtur tamen modus, quo *Carteſius* reflexionem pariter, ac refractionem lucis, ad imitationem motûs aliorum corporum explicat, ingenio ejus dignus, nec rejiciendus, ſed tantùm emendandus. Nam quod ad reflexionem attinet, prius explicandum ipſi erat, cur globus aliquis ut I, ſecundum perpendicularem I E incidens in planum A B, inde reflectatur; videmus enim, aliqua corpora, ut mollia, non æquè reflecti. Cujus reflexionis vera cauſa eſt Elaſtrum, vel globi, vel plani, vel utriuſque; nam cedet non nihil planum Elaſticum, ut videmus facere membranam tenſam, vel veſicam inflatam, lapillo incidente, & quidem cedet tanto magis, quanto fortior erit ictus; eoque majore vi ſe ſe reſtituens, id, quod inciderat, eâ qua venerat viâ, & celeritate rejicit. Quanquam enim *Carteſius* hanc reflexionis explicationem jam ſuo tempore a quibuſdam allatam, ferre noluerit, ut patet ex Epiſtolis: hodie tamen rationibus, atque experimentis extra dubium poſita eſt. Cùm ergo globus veniat ex C ad E rectâ C E in *fig.* 17. motuque proinde compoſito ex duobus, horizontali ut C I, vel H E, qua venit ex C H ad I E, & perpendiculari, ut C H, vel I E, qua venit ex C I ad H E; utroque incipiente a C, terminante in E; & ejus in E venientis conatui horizontali ex C H verſus I E in recta C I, vel H E, non opponatur, ſed parallela ſit ſuperficies A B, ideo celeritatem pariter, & directionem motus horizontalis illibatam retinebit, & quantum temporis inſumſit, ut veniret ex C H ad I E, inſumet etiam, ut veniat ex E I ad R D; poſitis intervallis inter C H, & I E, item E I, & R D æqualibus. Verùm motus perpendicularis, quo venit ex C I ad H E, retenta celeritate, in contrariam directionem vertetur, ut temporis tantundem inſumat, quo revertatur ex E R ad I D, cùm ergo ſit E R æqualis ipſi E H, & R D ipſi C H, Triangula C H E, D R E ſimilia, & æqualia erunt, adeoque angulus D E B angulo C E A æqualis. Omnia hæc clariora erunt, ſi fingamus regulam C I D ſuperficiei A B parallelam ſervato paralleliſmo per C H, D R, ipſi A B impingere in H R, dum interea globus in ipſa regula C I fertur à C ad I, unde reverâ totus compoſitus globi motus erit in diagonali C E; regula autem C I D repercuſſa à ſuperficie ſolida A B, eadem celeritate, & via qua venerat redibit; & æquali tempore iterum veniet in C I D, dum interea globus continuato in regula motu eadem celeritate perrexit, ac proinde eodem tempore pervenit ex I ad D, per

I D,

ID, æqualem ipſi CI, nam manente eadem celeritate æqualibus temporibus æqualia ſpatia percurruntur, itaque globus motu compoſito ex proprio ſuper regula, per ID, & motu ipſius regulæ per EI, redeuntis ſcilicet ex HR in CD, feretur ex E in D per rectam ED.

Pro refractione explicanda conſiderandum eſt, medium magis reſiſtens lumini (ſine opacitate tamen) illud eſſe videri, quod magis impedit luminis diffuſionem, ſeu diſtributionem per plures medii partes, idque dici poterit minus illuminabile, luminis enim natura ſe diffundere nititur. Contra, quanto magis lumen æquabiliter partes medii, quod illuminat, afficiet, aut quo pluribus inſenſibilibus loci illuminati particulis ſuam vim communicabit, eo medium magis erit illuminabile, minuſque lumini reſiſtet. Unde quo partes medii lumine affectæ magis ſunt ſolidæ, & exiguæ, aut minus inter ſe pro alia heterogenea materia a lumine nihil patiente, ſpatii relinquunt, eo magis illuminatum eſſe dicetur medium. Verùm conſtat ex mechanicis principiis, eumdem ictum pluribus corporibus ſimul impreſſum, minorem ſingulis vim dare, quàm ſi uni eorum fuiſſet inflictus; ideo fiet, ut in medio magis reſiſtente diffuſioni luminis, ſeu ſecundùm pauciores partes affecto, ſingulæ partes tanto fortiùs afficiantur; in magis illuminabili plures, ſed debilius, impetuque impreſſo languidiore. Aſſumendo jam motum globuli loco radii, & ponendo globulum ex G venientem in E, ibi in medium incidere, quod celeritatem ejus, ſeu impetum retardet, proportione, ſi lubet, ſeſquialtera, ergo ſi tempore unius ſcrupuli venit à G ad E in priore medio KE, idem in novo medio EI tempore unius ſcrupuli & dimidii veniet ab E in C, poſito EC & GE eſſe æquales, ubicunque demum ſit C. Sed cùm celeritati horizontali, in GK, LE & parallelis exercitæ, ſub primum ingreſſum globuli in novum medium EI, ſeu in ipſo puncto E, ſuperficies mediorum ſeparatrix AB non obſtiterit (hanc enim motus horizontalis LEH tantùm radit) in ipſo autem primo ingreſſûs momento, ſeu in puncto E, (globulum conſiderando indefinitè parvum inſtar puncti, ut & radii ſolent quaſi ſine latitudine ſpectari) ſtatim determinanda ſit lineæ CE inclinatio: ideo talis ſtatim initio aſſumenda eſt, ut reſpectu motûs horizontalis eadem maneat velocitas, & qualis initio ingreſſûs in novum medium, aſſumta eſt, talis in eo manet. Ergo globulus, qui, dum iret in medio priore à G ad E, abſolverat ſcrupulo temporis horizontali directione intervallum GK, vel LE (inter GL, KE) is nunc ſcrupulo uno, & dimidio temporis, quo ire debet ab E ad C, abſolvet in eadem horizontali directione intervallum EH, vel IC (comprehenſum inter EI, & HC) quod debet eſſe ſeſquialterum prioris LE; quia eadem manente velocitate horizontali, (quam momentum refractionis non immutat,) ſpatia ſunt ut tempora, eſt ergo *EH ad EL, in ratione* directa temporum, ſeu reciproca celeritatum, ſeu *reciproca reſiſtentiarum*,

oſtendimus enim in caſu luminis à reſiſtentia medii diffuſionem impediente velocitatem, ſeu impetum pro reſiſtentia creſcere; & pro majore diffundendi ſui facilitate in ſingulis partibus langueſcere: Contra radium vim ſuam, atque adeo directionem recuperare, cùm iterum in medium venit, ubi minor diffuſio eſt, plureſque radii in pauciores partes impellendas impenduntur, quam recuperationem *Carteſius* ſuâ tapetis, vel alterius corporis villoſi comparatione explicare, ut ſupra monuimus, non potuiſſet.

N. X.

MEDITATIO JURIDICO - MATHEMATICA DE INTERUSURIO SIMPLICE.

Ex Actis Erudit. Lipſ. ann. 1683.

INteruſurium, ſive reſegmentum anticipationis, vulgò Germ. *Rabat*, eſt differentia inter pecuniam in diem certum debitam, & præſentem ejus valorem; ſeu quanto plus petat, qui plus tempore petit, vel quanto minus ſolvere æquum ſit eum, qui poſt aliquot annos demum debiturus, nunc ſolvit. Hujus quantitas, quæ apud Juriſconſultos paſſim non ſatis, & apud aliquos non ſatis rectè explicatur, accurato calculo definiri poteſt, duabus ſuppoſitionibus ex jure aſſumtis. Nimirum

I. SUPPOSITIO PRIMA eſt, *quod is, a quo pecunia ante tempus, quo deberi incipit, petitur, viciſſim petere poteſt, ut ſibi eo nomine, quovis anno futuro medii temporis, præſtetur legitima uſura.* Exempli cauſa: poſt decem annos proximos finitos, mihi centum debebis (de quibus interim nullas debes uſuras, alioqui ſortem jam nunc deberes.) Ego, qui forte negotium aliquod utile, ſed paratæ pecuniæ indigum, geſturus ſum, peto, & a te obtineo, ut nunc ſolvas; tu viciſſim petere potes, ut eo nomine tibi quovis anno totius decennii proximi finito ſolvam quinque: *nec refert, utrum pecunia, quæ ante tempus ſolvitur, ſors ſit, an uſura.* Omnis enim uſura ſoluta fit ſors; imò cùm uſurarum petitio per ſe odioſa ſit, magis odioſa erit uſurarum petitio ante tempus, & qui nihil eo nomine præſtare volet, incidet in quamdam uſurariam pravitatem: revera enim plus uſuræ nomine exiget, quàm legibus permiſſum eſt, quia tempore quoque plus petitur. Itaque uſuræ exactæ ob uſuras ante tempus præſtitas, quæ ſortis naturam induere, non niſi vocabulum commune habent cum uſuris uſurarum non ſolutarum, quæ legibus prohibentur: & tantum abeſt negotium in vetitum Anatociſmum incidere, ut ſecus fieri regulariter in leges peccatum videatur; regulariter, inquam, nam exceptiones ex natura negotii, perſonarumque ſumi poſſunt (de quibus alias) quæ judicis arbitrio permittuntur. Nobis autem in calculo ineundo inſpiciendum videtur, quod regulare, exactumque eſt.

II. SUPPOSITIO SECUNDA eſt, ex jure notiſſimo petita, quod *compenſatio eſt quædam ſolutio*: & qui a pecunia, quam accipit, ſummam certam

certam ſibi detrahi patitur, eam ipſam ſummam, eo ipſo tempore ſolviſſe cenſetur.

III. His adjungo POSTULATUM, *quod creditor, ac debitor in diem futurum certum, de pecunia nondum cædua, nunc ſtatim inter ſe contrahere poſſint, velintque, ita ut totum negotium ſimul, ac ſemel inter ipſos (& quidem ſine alterutrius læſione, finiatur.* Itaque creditor, qui centum poſt decennium debita, nunc anticipat, eoque nomine quovis anno decennii proximè futuri, deberet quinque ſolvere, ut ea moleſtia ſe, debitoremque liberet, totumque negotium finiat, poteſt pati, ut ſibi nunc ſtatim de ipſis centum detrahatur aliquid uſurarum futurarum nomine, & quidem non integra 50, ſeu decies quinque, nondum enim *cædua* ſunt, ſeu nondum dies eorum venit, ſed paulo minus aliquid. Proinde minus quàm centum accipiet, & quod detrahi ſibi patitur, ipſiſſimum eſt *interuſurium* nunc determinandum.

IV. Ex his jam ducetur CONCLUSIO PRIMA: *ſi uſura legitima ſit viceſima ſortis, valor præſens unitatis poſt annum debitæ erit*: $\frac{1}{1} - \frac{1}{20} + \frac{1}{400} - \frac{1}{8000} + \frac{1}{160000} + \frac{1}{3200000}$ &c. *in infinitum*, ſive generalius, loco 20 aſſumendo numerum quemcunque v, qui quotam uſurariam exprimat $\frac{1}{1} - \frac{1}{v} + \frac{1}{v2} - \frac{1}{v3} + \frac{1}{v4} - \frac{1}{v5}$ &c. *Demonſtratio* ſimul, & explicatio: ſtatim poſt annum finitum mihi debebis unitatem, ſeu 1, (*ex facto*) unum verbi gratia aureum, aut unam decadem aureorum, vel unum centenarium &c. Hanc unitatem, ſive ſortem, ſi mihi nunc ſolvas, ejus nomine tibi uſuram poſt annum finitum debebo, nempe viceſimam unitatis, ſeu $\frac{1}{20}$ (*per ſuppoſitionem artic.* 1.) quoniam verò placuit, ut negotium inter nos nunc ſtatim finiatur, (*per poſtulatum artic.* 3.) ideo tu viciſſim poſtulas, ut ego tibi hanc ſummam $\frac{1}{20}$ nunc ſolvam anticipando. Solutio autem hæc fieri poteſt per compenſationem, ſi tantundem mihi detrahi patiar de ſumma, quam à te accipere debeo (*per ſuppoſit. artic.* 2.) accipio ergo 1 minus $\frac{1}{20}$ ſeu $1 - \frac{1}{20}$. Sed quia ita tu quoque ſummam $\frac{1}{20}$ poſt annum demum cæduam, nunc accepiſti; eo nomine, & tu mihi poſt annum finitum debebis uſuram (*per artic.* 1.) nempe viceſimam de $\frac{1}{20}$ hoc eſt $\frac{1}{400}$. Et cùm negotium ſtatim inter nos ſit finiendum (*per artic.* 3.) ea mihi nunc ſtatim dabis præter ſummam præcedentem, quæ erat $1\ \frac{1}{20}$: dabis ergo mihi nunc $1\ \frac{1}{20} + \frac{1}{400}$. Verùm ita mihi quoque iſtam ſummam $\frac{1}{400}$ poſt annum demum cæduam nunc ſtatim anticipando dediſti, itaque eo nomine viciſſim tibi poſt annum finitum debebo uſuram (*per artic.* 1.) nempe viceſimam de $\frac{1}{400}$, hoc eſt $\frac{1}{8000}$; & cùm negotium ſtatim inter nos ſit finiendum (*art.* 3.) hanc uſuram anticipando ſtatim nunc tibi ſolvam, ſalva rurſus anticipationis conſideratione. Solvere autem potero per compenſatio-

penſationem (*artic.* 2.) ſeu ſtatim $\frac{1}{8000}$ à te detrahi patiar de ſumma præcedente , quam mihi ſolvere debes , quæ erat $1 - \frac{1}{20} + \frac{1}{400}$ itaque ſolves mihi $1 - \frac{1}{20} + \frac{1}{400} - \frac{1}{8000}$. Et ſic in infinitum calculum continuatum fingendo ſemperque anticipando (ut negotium ſtatim finiatur) nulliuſque anticipationis reſegmentum negligendo (ut neuter lædatur) patet , te mihi ſolvere nunc debere ſummam ſeriei infinitæ prædictæ : cujus termini ſunt progreſſionis Geometricæ ſubvigecuplæ, ſemper enim ſequens eſt vigeſima pars proximè antecedentis : Signa autem , + & — alternantur.

V. LEMMA ex calculo infinitorum : *fractio* $\frac{v}{v+1}$ *eſt æqualis toti ſeriei infinitæ* $\frac{1}{1} - \frac{1}{v} + \frac{1}{v2} - \frac{1}{v3} + \frac{1}{v4} - \frac{1}{v5}$ &c. *Demonſtratio* ſimul & explicatio : poſito v eſſe 20, oſtendendum eſt fractionem $\frac{20}{21}$ idem eſſe quod infinita ſeries $\frac{1}{1} - \frac{1}{20} + \frac{1}{400} - \frac{1}{8000} + \frac{1}{160000} - \frac{1}{3200000}$ &c. Nimirum fractio $\frac{20}{21}$ multiplicata per 21 , dat 20, ut patet : & ſeries iſta infinita, multiplicata per 21 dat etiam 20 , ut mox oſtendetur. Jam quorum æqui multipla ſunt æqualia , ea ipſamet ſunt æqualia ; æquatur ergo fractio , & ſeries. Supereſt tantùm ut oſtendatur , ſeriem multiplicatam per 21 , ſeu per 20 + 1 , dare 20. Operatio ita ſtabit :

Multiplicetur $+1 - \frac{1}{20} + \frac{1}{400} - \frac{1}{8000} + \frac{1}{160000} - \frac{1}{3200000}$ &c.
per 20

fiet ☉ $20 - 1 + \frac{1}{20} - \frac{1}{400} + \frac{1}{8000} - \frac{1}{160000}$ &c.

Multiplicetur $+1 - \frac{1}{20} + \frac{1}{400} - \frac{1}{8000} + \frac{1}{160000}$ &c.
per 1

fiet ☽ $+1 - \frac{1}{20} + \frac{1}{400} - \frac{1}{8000} + \frac{1}{160000}$ &c.

Ergo ☉ + ☽ æqual. 20 * * * * *

VI. CONCLUSIO SECUNDA : *Valor præſens* unitatis ſeu *ſortis poſt annum debitæ* eſt $\frac{v}{v+1}$, poſito v eſſe numerum , quotam uſurariam exprimentem : ſeu ſi v ſit 20 , hoc eſt ſi uſuræ ſint quincunces , ſive vigeſima ſortis , erit $\frac{20}{21}$ ſeu *ſubſeſquivigecupla ſortis* , ſive $\frac{100}{105}$ de ſorte. Nam valor ille præſens eſt $1 - \frac{1}{20} + \frac{1}{400} - \frac{1}{8000}$ &c. (*per artic.* 4.) id eſt (*per artic.* 5.) $\frac{20}{21}$ ſeu $\frac{100}{105}$, quod probandum erat. Si verò uſuræ eſſent 6 in 100 , tunc numerus valeret $\frac{100}{6}$ ſeu $\frac{50}{3}$, & valor præſens ſortis foret $\frac{100}{106}$ ſeu $\frac{50}{53}$ de ſorte. Eadem concluſio adhuc alia ratione inveniri , & demonſtrari poteſt , ſine ſerie infinitorum , hoc modo : poſt annum debebis mihi ſummam S : quæritur quantum mihi ſolvi æquum ſit nunc , ut res eodem recidat. Ponamus , te mihi ſolvere nunc debere Y , itaque debet ſumma Y eſſe

 talis ,

talis, ut anno finito uſura cum ſorte æquetur ei, quod mihi debes. Nam dediſti mihi Y nunc indebita, ergo debeo tibi Y, & anno finito debebo tibi Y una cum viceſima ipſius Y ſeu $Y + \frac{1}{20} Y$, quæ ſi æquentur ipſi S, ſummæ, quam poſt annum mihi debes, compenſatione facta, debitum tunc ipſo jure mutuo tolletur *per artic.* 2, & negotium initio inter nos finitum intelligi poteſt, quod deſideratur *art.* 3. Quoniam ergo $Y + \frac{1}{20} Y = S$, erit $Y = \frac{S}{1 + \frac{1}{20}}$, ſeu erit $Y = \frac{20}{21}$ de S, ut ſupra. Nam ſi $\frac{20}{21}$ mihi nunc indebite ſolvas, poſt annum inde uſuras debebo $\frac{1}{21}$: ergo poſt annum in ſumma tibi debebo $\frac{20}{21} + \frac{1}{21}$ ſeu $\frac{21}{21}$ ſive 1. Sed poſt annum tu quoque mihi debebis 1, unitatem nempe ſive ſortem. Ergo compenſatione facta apparet, ſi pro 1 tunc debendis nunc ſolvas $\frac{20}{21}$ neutrum alteri quicquam amplius debiturum. Licet autem hæc via in hoc caſu ſit facilior priore, tamen priorem magni momenti eſſe judico, quia exemplum præbet Analyſeos memorabilis, ab Algebra in eo diverſæ, quòd Algebra, ut in poſteriore via patet, aſſumit quantitatem incognitam, tamquam cognitam, & inde regrediens, eamque cum cognitis æquans, valorem ejus quærit. Prior vero *Analyſis per meras cognitas* procedens, valorem incognitum directè obtinet. Quod magnum uſum habet, quando impoſſibile eſt obtineri valorem incognitæ rationalem per Algebram, tunc enim ea nihilominus hac via obtineri poteſt per ſeriem infinitam.

VII. CONCLUSIO TERTIA. *Iiſdem poſitis valor præſens unitatis ſeu ſortis poſt biennium debitæ eſt* $\frac{1}{1} - \frac{2}{v} + \frac{3}{v2} - \frac{4}{v3} + \frac{5}{v4} - \frac{6}{v5}$ &c. *Demonſtratio*: debebis mihi 1, biennio abhinc: quod ſi mihi nunc ſolvas 1 anticipando, inde tibi debebo uſuræ nomine poſt annum $\frac{1}{20}$, poſt biennium rurſus $\frac{1}{20}$, in ſumma $\frac{2}{20}$; quæ ſi ſtatim mihi detrahas per *articulum*; dabis mihi tantùm $1 - \frac{2}{20}$: Sed quia hoc modo tu quoque priora $\frac{1}{20}$ uno anno, nempe *primo*, & poſteriora $\frac{1}{20}$ duobus, nempe *primo*, & *ſecundo* anticipaſti; ideo uſuram mihi poſt annum primum tam ob priora, quàm ob poſteriora $\frac{1}{20}$ primo anno anticipata debebis, nempe bis $\frac{1}{400}$, ſeu $\frac{2}{400}$; & poſt annum ſecundum ob poſteriora $\frac{1}{20}$ ſecundo anno anticipata debebis mihi $\frac{1}{400}$. Ergo ſumma $\frac{3}{400}$, quæ ſi rurſus anticipando mihi ſolvas, dabis mihi $\frac{1}{1} - \frac{2}{20} + \frac{1}{400}$. Sed jam ita ego rurſus priora $\frac{1}{400}$ anticipavi anno primo, poſteriora verò $\frac{3}{400}$ anno primo, & ſecundo: unde uſuram tibi debebo, quæ anno primo finito de prioribus $\frac{2}{400}$ erit $\frac{2}{8000}$; de poſterioribus $\frac{1}{400}$ erit $\frac{1}{8000}$, ſumma $\frac{3}{8000}$; anno ſecundo verò de poſterioribus $\frac{1}{400}$ uſura erit $\frac{1}{8000}$, & ſumma uſurarum anni primi & ſecundi $\frac{4}{8000}$, quam ſi rurſus anticipando mihi detrahi patiar, dabis mihi tantùm $1 - \frac{2}{20} + \frac{3}{400} - \frac{4}{8000}$. Sed jam ita tu priora $\frac{3}{8000}$ rurſus anticipaſti anno primo, poſteriora $\frac{1}{8000}$ anno primo & ſecundo, unde uſuram mihi debebis, quæ anno primo

de

de prioribus $\frac{3}{8000}$ eſt $\frac{3}{160000}$, de poſterioribus $\frac{1}{8000}$ eſt $\frac{1}{160000}$, ſumma $\frac{4}{160000}$; anno ſecundo de poſterioribus $\frac{1}{8000}$ eſt rurſus $\frac{1}{160000}$, ſummaque uſurarum anni primi & ſecundi $\frac{5}{160000}$; quam ſi mihi ſtatim ſolvas anticipando (ſalvo in continuatione calculi anticipationis reſegmento) dabis mihi $1 - \frac{2}{20} + \frac{3}{400} - \frac{4}{8000} + \frac{5}{160000}$: & ita calculum in infinitum continuatum fingendo, prodibit ſeries infinita, quam poſuimus.

VIII. CONCLUSIO QUARTA. *Pro triennio iiſdem manentibus Nominatoribus, & ſignis, Numeratores erunt numeri triangulares, pro quadriennio Pyramidales, pro quinquennio triangulo-triangulares, & ita porrò* pro pluribus annis, altiores numeri, quos figuratos vocant, ego ob uſum combinatorios appellare ſoleo, in infinitum. Hoc cùm ad eundem modum oſtendi poſſit, quo præcedentem concluſionem demonſtravimus, prolixè hic deducere ſuperſedeo. Numeri ipſi tales ſunt.

Numeri figurati ſeu Combinatorii.		Valor præſens ſortis debitæ.		poſt ann.
Unit.	1. 1. 1. 1. 1.	$\frac{1}{1}\ \frac{1}{20} + \frac{1}{400}\ \frac{1}{8000} + \frac{1}{160000}$ &c. =	$\frac{20}{21}$	1
Natural.	1. 2. 3. 4. 5.	$\frac{1}{1}\ \frac{2}{20} + \frac{3}{400}\ \frac{4}{8000} + \frac{5}{160000}$ &c. =	$\frac{400}{441}$	2
Triang.	1. 3. 6. 10. 15.	$\frac{1}{1}\ \frac{3}{20} + \frac{6}{400}\ \frac{10}{8000} + \frac{15}{160000}$ &c. =	$\frac{8000}{9261}$	3
Pyramid.	1. 4. 10. 20. 35.	$\frac{1}{1}\ \frac{4}{20} + \frac{10}{400}\ \frac{20}{8000} + \frac{35}{160000}$ &c. =	$\frac{160000}{194481}$	4
Triang. Triang.	1. 5. 15. 35. 70.	$\frac{1}{5}\ \frac{5}{20} + \frac{15}{400}\ \frac{35}{8000} + \frac{70}{160000}$ &c. =	$\frac{3200000}{4084101}$	5
	&c.	&c.	&c.	&c.

IX. Ad inveniendos adhuc aliter hos valores præſentes, aſſumo LEMMA: *valor præſens valoris futuri, eſt valor præſens ipſius ſummæ.* Exempli cauſa, ſub finem anni 1685, ſeu poſt biennium debebis mihi aliquam ſummam. Vellem noſſe quis nunc ſub finem anni 1683. ejus ſummæ ſit valor præſens; itaque primum quæro, quis ſummæ poſt biennium, ſeu ſub finem anni 1685 cæduæ futurus ſit valor poſt annum, ſeu ſub finem anni 1684, is utique erit $\frac{20}{21}$ de ſumma (*per art. 6.*) quia unus tantùm annus intercedit. Itaque ſi poſt biennium mihi debeas unitatem, perinde eſt quantum ad hunc calculum, ac ſi poſt annum mihi debeas $\frac{20}{21}$. Sed rurſus, ſi poſt annum mihi debes $\frac{20}{21}$ perinde eſt (*iterum per art. 6.*) ac ſi mihi deberes nunc $\frac{20}{21}$ de illa ſumma, ſeu $\frac{20}{21}$ hoc eſt $\frac{400}{441}$. Itaque ſi poſt biennium mihi debes aliquid, valor præſens erit $\frac{400}{441}$ de illo, ſeu quadratum numeri $\frac{20}{21}$ acceptum de illa ſumma tanquam unitate. Et eodem modo apparebit, valorem præſentem unitatis poſt triennium debitæ, eſſe $\frac{20}{21}$ de $\frac{20}{21}$ de $\frac{20}{21}$, ſeu cubum numeri $\frac{20}{21}$, id eſt $\frac{8000}{9261}$. Et ita porrò. Atque hoc Lemma nihil aliud eſt, quàm ſubſumtio illius axiomatis notiſſimi, quod æqualia uni tertio ſunt æqualia inter ſe; nam $\frac{400}{441}$ nunc æquantur ipſis $\frac{20}{21}$ cæduis poſt annum, & hæc æquantur unitati cæduæ poſt biennium.

V 2 Ergo

Ergo & hæc unitas æquatur ipſis $\frac{420}{441}$ cæduis nunc. Inde jam patet

X. CONCLUSIO QUINTA. Si numerus quotæ uſurariæ ſit v (id eſt 20, *poſitis uſuris quincuncibus* ſeu vigeſima ſortis) *erit valor præſens ſummæ poſt aliquot annos cæduæ, ad ipſam ſummam, in ratione* v ad v + 1 (id eſt *ſubſeſquivigecupla*, ſeu 20 ad 21) *replicata ſecundum numerum annorum.* Hoc eſt ſummæ cæduæ poſt annum unum valor præſens erit ſimpliciter $\frac{20}{21}$ de ſumma, ſeu erit ad ſummam in ratione 20 ad 21. At valor præſens ſummæ cæduæ poſt duos annos erit $\frac{20}{21}$ de $\frac{20}{21}$ ſeu $\frac{40}{440}$ ſummæ: ſeu erit ad ſummam in ratione duplicata 20 ad 21 ſeu ut 400 (quadratum de 20) ad 441 (quadratum de 21.) Et valor præſens ſummæ cæduæ poſt triennium erit $\frac{20}{21}$ de $\frac{20}{21}$ de $\frac{20}{21}$ ſummæ, ſeu $\frac{8000}{9261}$ ſummæ: ſeu erit ad ſummam in ratione triplicata 20 ad 21, ſeu ut tertia dignitas, ſive cubus de 20, ad cubum de 21; & ita porrò. Idque generaliter exprimendo, ſit præſens valor Z, ſumma debita S, numerus annorum a, & quotæ uſurariæ numerus v, quibus poſitis, erit Z = S, multiplicetur per $\overline{\underline{|\,a\,|}}\ \frac{v}{v+1}$. Sit v 20, & S, unitas, erit unitatis cæduæ

poſt annos	unum,	duos,	tres,	quatuor,	quinque,	&c.
valor præſens,	$\frac{20}{21}$	$\frac{400}{441}$	$\frac{8000}{9261}$	$\frac{160000}{194481}$	$\frac{3200000}{4084101}$	&c.
id eſt,	latus.	quadratum.	cubus.	biquadratum.	ſurdeſolidum.	&c.

qui numeri vel multiplicando, vel tantum eorum logarithmos addendo, continuari poterunt ad quotlibet annos: utileque erit fractiones decimaliter enuntiari. De uſu horum in quibuſdam juris quæſtionibus apud egregios autores non ſatis rectè definitis, æſtimandiſque redicibus ad vitam, (ubi *interuſurio compoſito* locus eſt) alio ſchediaſmate differemus.

Cæterum ut meditationis hujus uſus ſit in promptu: operæ pretium, ipſo præſertim Nobiliſſimo Autore invitante, facturos nos rati ſumus, conſtructa Tabella, in qua (poſita ſorte 100000, & uſura vicenaria) quantum pro quoque annorum (ad quadraginta uſque) numero, deducto legitimo interuſurio relinquatur, ſive quanti ſors anticipato æſtimanda veniat, exponeretur; unde porrò, beneficio regulæ proportionis, quamcunque ſortem datam, ad quantamcunque anticipationem æſtimare planum foret: cùm aliàs calculus futurus eſſet longè impeditiſſimus; iis ſaltim, qui Logarithmorum deſtituuntur præſidio.

Tabula

Tabula ſortium anticipato accipiendarum, poſito debito
100000.

Ann.	Sors anticip.	Ann.	Sors anticip.
1	0. 95238	11	0. 58468
2	0. 90703	12	0. 55684
3	0. 86384	13	0. 53032
4	0. 82270	14	0. 50507
5	0. 78353	15	0. 48102
6	0. 74622	16	0. 45811
7	0. 71068	17	0. 43630
8	0. 67684	18	0. 41552
9	0. 64461	19	0. 39573
10	0. 61391	20	0. 37689
Ann.	Sors anticip.	Ann.	Sors anticip.
21	0. 35894	31	0. 22036
22	0. 34185	32	0. 20987
23	0. 32557	33	0. 19987
24	0. 31007	34	0. 19035
25	0. 29530	35	0. 18129
26	0. 28124	36	0. 17265
27	0. 26785	37	0. 16444
28	0. 25509	38	0. 15661
29	0. 24294	39	0. 14915
30	0. 23138	40	0. 14205

N°. XI.

DE DIMENSIONIBUS FIGURARUM INVENIENDIS.

Ex Actis Erudit. Lipſ. ann. 1684.

SIgnum eſt perfectæ Analyſeos, quando aut ſolvi problema poteſt, aut oſtendi ejus impoſſibilitas: quod cùm nemo hactenus præſtiterit circa tranſmutationes curvilineorum in rectilinea, patet in hac parte imperfectio Geometriæ, & ipſius Algebræ, quæ uti hactenus tractata eſt, ad talia problemata non porrigitur. Excogitavi tamen jam a multis annis ſubſidium Analyticum, & amicis oſtendi, quòd huc redit: notum eſt interio-
Tab.IV. ris Geometriæ peritis data (*fig.* 19.) qualibet curva AFC (ex illarum
Fig. 19. numero, quarum natura, ſeu relatio inter ordinatam, & abſciſſam per æquationem Algebraicam, ſeu certi gradus exprimi poteſt, quas *Carteſius* appellat Geometricas, ego ob graves rationes potiùs Algebraicas appellare ſoleo) poſſe aliam inveniri curvam AGD etiam Algebraicam, cujus figura ope prioris poſſit quadrari: idque fieri poteſt multis modis, exempli causâ datâ curvâ AFC, poteſt inveniri curva AGD talis naturæ, ut rectangulum ſub FE ordinata prioris curvæ, & recta conſtante H, ſemper æquetur trilineo curvæ poſterioris, ſeu figuræ AEGA; vel ut rectangulum ſub FE ordinata curvæ prioris, & abſciſſa ejus AF, æquetur eidem trilineo; vel aliis modis infinitis. Priorem curvam AFC voco *Quadratricem*, poſteriorem AGD *Quadrandam*. Sed hoc opus hic labor eſt, datâ Quadrandâ Figurâ, invenire Quadratricem ejus aliquam; præſertim cùm aliquando quadratricem invenire (Algebraicè quidem exprimendam) ſit impoſſibile. Ut ergo præſtarem quicquid in hoc genere fieri poteſt, talem methodum excogitavi, antea quod ſciam, non uſurpatam; ſed quæ maximum & in aliis uſum habere poteſt. Adhibeo æquationes Curvarum generales, quarum unaquæque omnes curvas ejuſdem gradus exprimit. Et talis curvæ generalis, conſideratæ tanquam quadratricis, quæro quadrandam generalem, ſecundùm aliquem ex modis ſupra dictis, quem ſemper eundem ſervo. Quia demonſtrare poſſum, ſi non datur quadratrix ſecundùm unum modum, nec eam ſecundùm alium dari. Oblatæ jam quadrandæ ſpecialis æquatio comparanda eſt cum aliqua ex formulis generalibus, quadrandarum naturam exprimentibus; ſed ſi nulli comparari poſſit, manife-

nifeſtum eſt, eam ſub ipſis non comprehendi, adeoque nullam habere quadratricem, ſcilicet Algebraicam. Eadem methodo invenire poſſum, quam habeat quadratricem, ſi non Algebraicam, ſaltem tranſcendentem, hoc eſt Circuli, aut Hyperbolæ, aut alterius figuræ quadraturam ſupponentem, ut ſcilicet ſaltem dimenſiones reliquas ad has ſimpliciores reducamus. Multa hujuſmodi habeo, quibus Geometria in immenſum ultra Terminos a *Vieta*, & *Carteſio* poſitos promovetur. Nam veteres nolebant uti lineis altiorum graduum, & ſolutiones, quæ earum ope fiebant, Mechanicas. *Carteſius* id reprehendit, & omnes curvas in Geometriam recipit, quarum natura æquatione aliqua Algebraica, ſeu certi alicujus gradûs, exprimi poſſit. Rectè quidem, ſed in eo peccavit non minùs quàm veteres, quòd alias infinitas, quæ tamen etiam accuratè deſcribi poſſunt, ex Geometria excluſit, & Mechanicas vocavit, quia ſcilicet eas ad æquationes revocare, & ſecundùm ſuas regulas tractare non poterat. Verùm ſciendum eſt, iſtas ipſas quoque, ut Cycloidem, Logarithmicam, aliasque id genus, quæ maximos habent uſus, poſſe calculo, & æquationibus etiam finitis exprimi, at non Algebraicis, ſeu certi gradûs, ſed gradûs indefiniti, ſive tranſcendentis. Et ita eodem modo poſſe calculo ſubjici ac reliquas: licet ille calculus ſit alterius naturæ quàm qui vulgo uſurpatur. Hujuſmodi cogitationum mearum, quas alibi non obſervavi, participem feci amicum ingenioſiſſimum, qui etiam eas multis de ſuo inventis auxit, & ſuo tempore præclara dabit; idem calculum inveniendi quadratrices algebraicas ſupra dicta methodo aggreſſus aliquot theoremata dedit. Unum tamen cogit me monere amor veritatis, hanc ipſam methodum meam quærendi quadratrices, inſignes quidem uſus habere, ſed non ſufficere ad inveniendas quadraturas quaſcunque, neque ex ea probari poſſe impoſſibilitatem Quadraturæ Circuli, aut Hyperbolæ. Fieri enim poteſt, ut aliqua certa portio quadrantis circuli, vel etiam totus quadrans ABDGA, quadrari poſſit, licèt non detur quadratura indefinita, & generalis cujuslibet portionis datæ, ſecundùm unam aliquam legem communem, ſeu calculum algebraicum generalem, qui exprimat relationem inter ſpatium AEGA, & rectang. AEF; unde nec dari poterit ſemper æquatio quædam algebraica exprimens relationem inter AE, & EF, abſciſſam, & ordinatam quadratricis AFC; ac proinde quadratrix non erit Algebraica, ſeu certi gradûs, ſed tranſcendens. Et quidem circulum eſſe incapacem quadraturæ indefinitæ facilè multis modis demonſtrari poteſt, ſed nulla hactenus extat demonſtratio, à paralogiſmo libera, quæ oſtendat impoſſibilitatem ſpecialis quadraturæ circuli totius. Placet autem aſcribere exemplum figuræ, ubi ſuccedit quadratura ſpecialis ſine generali. Sit in quadrato AEBZ (*figur.* 20.) trilineum orthogonium AENMA, jam ſecentur latera quadrati oppoſita AE, ZB in punctis G, R, curva verò in punctو M, per rectas GR, reliquis quadrati lateribus AZ, EB parallelas, Tab. IV. Fig. 20.

lelas.

lelas. Abſciſſa B R appelletur v, & ordinata R M, appelletur y, & latus quadrati h, & æquatio naturam curvæ exprimens ſit $y^4 - 6hhyy + 4yyvv + h^4 = 0$. G M appelletur Z, & A G appelletur X, fiet $y = h - x$ & $v = h - z$, quos valores ſubſtituendo in æquatione præcedenti fiet :

$$h^4 - 4h^3x + 6hhxx - 4hx^3 + x^4 - 6h^4 + 12h^3x - 6hhxx + 4h^4 - 8h^3z + 4hhzz - 8h^3x + 16hhxz - 8hxzz + 4hhxx - 8hxxz + 4xxzz + h^4 = 0$$

ſeu deſtructis deſtruendis :

$$4hhzz - 8hxzz + 4xxzz - 8h^3z + 16hhxz - 8hxxz + 4hhxx - 4hx^3 + x^4 = 0$$

quam æquationem dividendo per $hh - zhx + xx$ habebitur.

$$4zz - 8hz + \frac{4hh - 4hx + xx \text{ multiplicatum in } xx}{hh - 2hx + xx} = 0.$$

Itaque ſi figura noſtra eſt quadrabilis methodo ſupradicta, deberet hæc æquatio ſecundùm alibi propoſita conferri poſſe cum iſta.

$$0 = \begin{array}{l} bzz + caz + eaa \\ \quad + 2dxz + 2fax \\ \qquad + 4gxx \end{array} + \frac{dde + ccg + bff - cdf - 4beg \text{ multiplic. in } aa\,xx}{\begin{array}{l} + 4beaa + 4bfax + 4bgxx. \\ - ccaa - 2cdax - ddxx. \end{array}}$$

Sed manifeſtum eſt, collationem non procedere, ſi vel ſolus numerator fractionis utrobique exiſtens comparetur, deberet enim $4hh - 4hx + xx$ coincidere cum aa, in $dde + ccg + bff - cdf - 4beg$; indeterminatum cum determinato : ut taceam ex reliquis comparationibus literas d, e, f, g fieri æquales nihilo : unde in æquatione quæſita ad curvam quadratricem quæ eſt

$$\begin{array}{l} byy + cay + eaa \\ \qquad\quad + dxy + fax \\ \qquad\quad + gxx \end{array} = 0$$

reſtaret tantùm $byy + cay = 0$, quæ eſt æquivocatio non ad lineam, ſed ad punctum. Itaque linea curva Quadratrix haberi hoc modo non poteſt. Et tamen aliunde ſcimus, trilineum propoſitum eſſe quadrabile : itaque iſta methodus, licèt maximi ſit momenti, tamen ad omnes quadraturas inveniendas non ſufficit, ſed opus eſt alias adhuc artes adhiberi, quas quidem aliàs exponam, res enim omnino in poteſtate eſt.

N°. XII.

N°. XII.

DEMONSTRATIONES NOVÆ DE RESISTENTIA SOLIDORUM.

Ex Actis Erudit. Lipſ. ann. 1684.

SCientia Mechanica duas videtur habere partes, unam de potentia agendi, ſeu movendi, alteram de potentia patiendi, ſeu reſiſtendi, ſive de corporum firmitate. Harum poſterior a paucis admodum tractata eſt. *Archimedes*, qui prope ſolus veterum Geometram in Mechanicis egit, hanc partem non attigit. Inde ab *Archimede* nihil ferè actum eſt in Geometria Mechanica uſque ad *Galilæum*, qui exacto judicio, magnaque interioris Geometriæ notitiâ inſtructus, pomœria ſcientiæ protulit primus, idemque ſolidorum reſiſtentiam ad Geometriæ leges revocare cœpit. Et quanquam neque hic, neque circa motum projectorum rem acu tetigerit, uſus hypotheſibus non ſatis certis, ex fundamentis tamen poſitis rectè ratiocinatus eſt. Sic ergo ille ſentit de reſiſtentia trabium, quæ muris, vel parietibus infiguntur. *In figuris* 21. & 22. Trabs ABC normaliter infixa ſit muro, vel ſuſtentaculo DE. Sit AC æqualis ipſi AB, & in *fig.* 21. ſit in C appenſum pondus F, quod trabem horizontalem præcisè avellere poſſit a muro erecto; & in *fig.* 22. pondus G, quod trabem verticaliter avellere præcisè poſſit a ſuſtentaculo horizontali (quorum prius vocabo *tranſversè abrumpere*, poſterius *directè evellere*) erit ſecundùm *Galilæum* pondus F dimidium ponderis G, poſito ſolidum eſſe perfectè rigidum, ſeu nullius flexionis capax, & pondus ipſius trabis negligi, vel in pondus appenſum jam computari. Nam quia AB & AC æquales, ideo pondus F *in fig.* 21. eamdem inveniet reſiſtentiam in puncto B, ac ſi perpendiculariter traheret, ut *in fig.* 22. Reſiſtentia ergò puncti B in utraque figura repræſentetur per BK, itaque reſiſtentia puncti H *in fig.* 22. repræſentabitur per HL, æqualem ipſi BK; quia *in fig.* 22. omnium punctorum reſiſtentia eadem. At reſiſtentia ejuſdem puncti H *in fig.* 21. repræſentabitur per HM ordinatim applicatam trianguli ABK, quia eſt ad reſiſtentiam ipſius B, ut AH ad AB, ex natura vectis. Idemque quod in puncto H fecimus, faciendo in puncto alio inter A & B quocunque, complebitur pro repræſentanda reſiſtentia *in fig.* 22. quadratum BC, & pro reſiſtentia *in fig.* 21. triangulum ABK, illius quadrati

Tab. V. Fig. 21.

Tab. V. Fig. 22.

dimidium. Itaque pondus F ſi ponatur huic reſiſtentiæ *in fig.* 21. præciſè par, ita ut quantulocunque pondere adjecto eam vincat, etiam ponderis G (illi reſiſtentiæ *in fig.* 22. præciſè paris) dimidium erit. Seu potentia abrumpendi transversè erit dimidia (*oſtendemus mox reverà non eſſe dimidiam, ſed tertiam partem*) potentiæ evellendi directè. Unde jam multæ concluſiones practicæ deduci poſſunt.

Has autem aliaſque id genus *Galilæi* ſententias *Paulus Wurzius*, ſummis militiæ honoribus, rebuſque geſtis non ita pridem clarus, idemque horum ſtudiorum valdè intelligens, experimentis compluribus ſumtis examinare olim aggreſſus eſt, ſucceſſu quibuſdam concluſionibus parum reſpondente: quemadmodum habeo à Cl. *Blondello* in his, aliiſque ſtudiis eximio, Sereniſſimi Delphini nuper in Mathematicis Magiſtro, & Academiæ Architectonicæ Directore, qui idem argumentum excoluit, & *Wurzio* familiaris fuit; ſed & Cl. *Mariottus* ex Academia Regia, de rebus opticis, & mechanicis præclarè meritus, experimentis factis comperit, pondus F multo minùs, quàm voluit *Galilæus*, ad abrumpendam trabem ſufficere. Cujus cauſa nulla alia eſſe poteſt, quàm quòd is trabem conſideravit ut perfectè rigidam, quæ uno momento tota abrumpatur, ubi reſiſtentia ejus ſuperata eſt, cùm tamen omnia corpora, quæ nobis tractare datum eſt, nonnihil cedant, antequàm divelli poſſint. Unde Cl. *Mariottus* hoc obſervans ingenioſo calculo collegit, pondus F eſſe circiter quartam partem ponderis G. Sed cùm inde data mihi eſſet occaſio rem conſiderandi profundiùs, & ad leges Geometrarum exigendi, veras tandem proportiones erui, demonſtravique inter alia pondus F fore tertiam partem ponderis G, & proinde firmitatem corporum rupturæ reſiſtentium in ſeſquialtera proportione minorem eſſe, quàm voluit *Galilæus*.

Quod ut intelligatur, ante omnia ſciendum eſt, corpora duo cohærentia non ſtatim uno momento a ſe invicem tota divelli, quod judicari poteſt exemplo baculi, qui flectitur antequàm frangatur, & exemplo chordæ, quæ extenditur, antequàm rumpatur; & ipſa flexio baculi eſt quædam extenſio in convexa ejus ſuperficie. Nihilque tam rigidum eſſe, quin levi etiam impulſu flectatur nonnihil, ex natura ſoni ſequitur, qui tremor eſt quidam, ſive flexio reciprocata partium corporis ſonantis, licet eò promtior, atque inſenſibilior ſit reſtitutio, acutiorque ſonus, quò partes tremulæ ſunt breviores, & magis tenſæ, corpuſque durius conſtituunt. Vitrum ipſum flexile eſſe probant filamenta ejus longa, & tenuia; quomodo vitrum ſatis craſſum frigore contrahatur, experimenta Florentina oſtendunt. Partes quidem plantarum, & animalium quodammodo textiles eſſe, & ex filamentis variè implicatis conſtare, ſenſu ipſo docemur. Mineralia quoque, & metalla cùm fluida eſſent, poſtea congelata ſunt, & eadem nunc quoque habere tenacitatem, & in fila duci, malleoque extendi, atque in fuſione adhæreſcere patet. Conſideremus ergo velut

ſibras

fibras quaſdam quæ partes corporum connectant, & intelligamus trabem B C parieti vel ſuſtentaculo D E plurimis fibrarum plexibus alligari in punctis A, H, B, & aliis intermediis innumeris. Appenſo jam pondere F, movebitur nonnihil trabs circa fulcrum A, *in fig.* 23. & punctum trabis B a pariete diſcedens a puncto parietis 1 B, veniet ad punctum a pariete diſtans 2 B, ſecumque trahens fibram, qua parieti annectitur, eam tendet inſtar chordæ, ſive ultra naturalem ſuum ſtatum extendet in lineam 1 B 2 B: eodemque modo punctum H fibram ſuam tendet in 1 H 2 H, quæ lineæ, licèt revera ſint inſenſibiles, tamen docendi cauſa viſibiliter exhibentur, & quidem fibris 1 H 2 H minùs reſiſtet trahenti, quàm fibra 1 B 2 B, idque in duplicata ratione diſtantiæ ab A, ſeu ex duplici capite a diſtantia ſumto. Nam *primò* pondus in C, quo opus eſſet ad tendendam fibram 1 H 2 H tantumdem, quantum fibram 1 B 2 B, foret minus pondere requiſito ad tendendam fibram 1 B 2 B, in ratione A H ad A B; verbi gratiâ ſi A H ſit tertia pars ipſius A B, tunc & pondus in C quod ſolam fibram 1 H 2 H ita extendere poteſt, ut fiat æqualis ipſi 1 B 2 B, erit tertia pars ponderis tendentis ſolam fibram 1 B 2 B. Verùm nunc *ſecundò* cùm ambæ ſimul tenduntur a pondere appenſo in C, utique fibra 1 H 2 H non eſt tantùm tenſa quantùm fibra 1 B 2 B, ſed multo minùs, idque rursùs in ratione A H ad A B. Nam ſi AH ſit tertia pars ipſius A B, erit 1 H 2 H tertia pars ipſius 1 B 2 B. Itaque (ex hypotheſi alibi confirmata, quòd extenſiones ſint viribus tendentibus proportionales) ad eam ita tendendam tertia tantùm ponderis parte opus erit, qua ad eam, tantumdem quantum 1 B 2 B tendendam opus fuiſſet; id eſt tertia parte tertiæ partis ponderis ipſam 1 B 2 B tendentis, ſeu parte ejus nona. Itaque generaliter in hac ſimultanea tenſione omnium fibrarum ad quævis puncta exiſtentium, reſiſtentiæ in quolibet puncto erunt in duplicata ratione diſtantiarum a fulcro imo, ſeu centro, vel axe librationis, ſumtarum; id eſt reſiſtentia in H erit ad reſiſtentiam in B, ut quadratum ipſius AH ad quadratum ipſius A B. Itaque ſi jam pondus F *in fig.* 23. ſit corpus parabolicum NRSQN, liberè ſuſpenſum ex C, in quo altitudo NR ſit æqualis baſi R S (uti AB æqualis eſt ipſi AC) & ſint ordinatim applicatæ quadratis altitudinum proportionales, ſeu P Q ad R S, ut quadratum NP ad quadratum NR: tunc poſito baſin RS repræſentare reſiſtentiam in B, ordinata PQ repræſentabit reſiſtentiam in H; ſi ſcilicet altitudines N P, N R, ſint altitudinibus reſpondentibus AH, AB, proportionales; totum verò trilineum parabolicum concavum NRSQN repræſentabit reſiſtentiam totius lineæ AB; ſi ſcilicet trabs A B C tranſverſim, ſeu per modum vectis a pondere appenſo F deprimatur. At quadratum RNTS huic trilineo-parabolico circumſcriptum, repræſentaret reſiſtentiam ejuſdem lineæ A B directam, ſi ſcilicet trabs directa ex pariete eſſet evellenda, ut *in fig.* 22. Nam quia AB & AC æquales, reſiſtentia puncti B tranſ- Tab. V. Fig. 23.

 verſa

verſa eadem erit quæ directa, nempe repræſentata per RS *in fig.* 23. jam ſi directè evellatur trabs (ut *in fig.* 22.) reſiſtentia omnium punctorum eadem eſt, ergo reſiſtentia directa puncti H erit PV, æqualis ipſi RS: & ita procedendo in reliquis complebitur quadratum RT, quod cùm ſit triplum trilinei parabolici concavi inſcripti, nempe NRSQN, ideoque erit & rectæ alicujus lineæ (ut AB) reſiſtentia directa reſiſtentiæ transverſæ tripla. Quod demonſtrandum erat.

Hinc porrò quantacunque ſit longitudo trabis, aut ponderis appenſi diſtantia a pariete (quam hactenùs ſumſimus altitudini trabis æqualem) facilè determinari poterit pondus ad abrumpendam trabem ſufficiens: ut
Tab. V. Fig. 24. ſi pondus G trabem directè evellere poſſit *in fig.* 24. erit quidem pondus F tertia pars ipſius G (modò ſit AC æqualis AB;) ſi verò pondus I appendatur ex K, ſitque AK quadrupla ipſius AB, vel AC, erit pondus I quarta pars ipſius F, & duodecima ipſius G. Generaliter ergò pondus trabem parallelepipedam directè evellens, erit ad pondus abrumpens tranſversè, ſeu per modum vectis, ut longitudo vectis eſt ad tertiam partem craſſitiei trabis. Conſideravimus autem hactenus ipſam trabem ut pondere carentem, quod ſi pondus ipſius trabis in rationes venire debeat, perinde erit ac ſi pondus I trabi æquale ſuſpenſum eſſet ex K, centro gravitatis ipſius trabis. Fieri etiam poterit, ut trabs pondere ſuo
Tab. V. Fig. 25. frangatur in loco aliquo, ut G *in fig.* 25. inter parietem AB & extremitatem trabis C, quando ſcilicet gravitatio portionis FGCF, libratæ ex puncto quietis G, majorem habet rationem ad reſiſtentiam in FG, quam gravitatio totius trabis BAC ex puncto quietis AD, ad reſiſtentiam in AB. Quæritur autem, qualis eſſe debeat linea BFC, ut reſiſtentiæ ſint gravitationibus reſpondentibus proportionales, & trabs ubique æqualiter reſiſtat: hanc ergò invenietur eſſe Parabolicam. Eſt enim reſiſtentia in FG ad reſiſtentiam in BA ut trilineum parabolicum concavum FGHF ad aliud BAEB, ſi baſis trilinei ſit altitudini ejuſdem æqualis (ut patet ex præcedentibus:) ſeu ut quadratum FG ad quadratum BA (quia trilineum tale eſt tertia pars quadrati circumſcripti. Sed momentum, ſeu gravitatio portionis FGCF cujuſcunque ex G libratæ, eſt ad momentum totius trabis BACB ex A libratæ, etiam ut quadratum FG ad quadratum BA, quemadmodum ex natura parabolæ facilè demonſtratur (nam portiones CGFC & CABC ſunt ut cubi a CG, CA. Porrò G3 & A2 ſunto quartæ partes ipſarum, CG & CA, eruntque diſtantiæ centrorum gravitatis portionum CGFC & CABC a punctis quietis, ſeu centris librationis G & A, & momenta dictarum portionum ſunt ut facta ex portionibus in diſtantias, ſeu in compoſita ratione portionum, ſive cuborum a CG & CA, & diſtantiarum, quæ ſunt ut ipſæ CG & CA: ergo in ratione quadrato-quadratorum a CG, CA, id eſt in ratione quadratorum ab FG & BA.) Ergo reſiſtentiæ ſunt momentis ſeu

viribus

viribus proportionales, ſeu ubique eadem momenti cujuſque ad ſuam reſiſtentiam proportio, atque adeo æquabilis erit firmitas, qua trabs ponderi proprio ubique reſiſtit: & proinde in quantamcunque longitudinem procurrat trabs ita figurata, ſi prope murum pondere ſuo non frangatur, nec alibi frangetur. Præterea cùm trabs Priſmatica parabolica CABC ſit tertia tantùm pars plenæ CDBA, hinc tertia ponderis parte detracta & diſtantia centri gravitatis ab AG ad ejus dimidiam A 2 retracta, trabs parabolica ſextuplo plena firmior erit. Sed ſi neglecto pondere trabis intelligatur vis aquæ, aut venti, aut alia quædam æqualiter diſtributa per totam trabis longitudinem, ut *in fig.* 26. tignum ABD ex muro procurrens, onus terræ ingeſtæ, vel frumenti alteriuſve materiæ ferre debeat, poterit eſſe triangulare, lineaque AD recta; & tignum ubique æqualiter reſiſtet ponderi impoſito, ut ſi in muro non frangatur, nec alibi frangi poſſit: nam ex notis mechanicæ legibus, momentum ponderis incumbentis ipſi GD, eſt ad momentum ponderis incumbentis ipſi BD, ut quadratum GD ad quadratum BD, ſeu ut quadratum GF ad quadratum BA; id eſt ut reſiſtentia in GF ad reſiſtentiam in BA: quod ſi partim pondus impoſitum, partim figura trabis conſideretur, nihilominus figuram æqualiter reſiſtentem dare poſſum. Tab. V. Fig. 26.

Hactenus autem conſideravimus tantùm trabem, cujus ſuperficies, qua muro vel ſuſtentaculo adhæret, ubique æquè alta eſt, unde ſuffecit aſſumere rectam BA, ſed quia ſuperficies communis trabi, & parieti, varia eſſe poteſt, demus regulam generalem pro reſiſtentia ejus Geometrice determinanda, cujus ſpeciales caſus ſi cui pertractare vacabit, is multa perelegantia theoremata deprehendet. In genere autem, ſit trabs ABHC, *fig.* 27. cujus ſectio ad ſuſtentaculum DE ſit planum ABH figuræ cujuſcunque. Demittatur illud in horizontem, ſeu in plano horizontis deſcribatur aliud ei æquale, ſimile, & ſimiliter poſitum AGH. Ex puncto G ab AH horizontalium infima maximè remoto (quod reſpondet puncto B) ducatur ad AH perpendicularis GF (ipſi BF æqualis) & fiat corpus cylindricum, cujus baſis aut ſectio quæcunque parallela horizonti ſit ſimilis, & æqualis ipſi AGH, altitudo autem perpendicularis ſit GI, æqualis FG vel BF; quod corpus liceat appellare cylindrum. Per I ducatur tangens indefinita KIL parallela ipſi AH. Tandem planum tranſeat per AH & KL, quod ad horizontem faciet angulum ſemirectum, & corpus cylindricum ſecabit in duas partes, quarum illa in quam cadit GI, quæ in figura eſt ſupra planum ſecans, a Geometris dicitur *Ungula*. Dico hanc Ungulam à cylindro reſectam facientem officium vectis, cujus fulcrum ſit in AH, æquare, vel repræſentare reſiſtentiam trabis ABHC tranſverſim in AHB rumpendæ, ſi pondus ipſius cylindri ad eamdem directè ex muro evellendam ſufficit. Sed ne opus ſit ungulam conſiderari ad modum vectis, & ut pondus reſiſtentiam repræſentans abſolutè Tab. V. Fig. 27.

habeamus, ſuſpendatur ungula ex puncto M, ſeu ex F M diſtantia centri gravitatis ungulæ a pariete; & ita exactè reſiſtentiam tranſverſalem æquabit, ſi cylinder totus æquat directam. Itaque cùm quæretur an, & ubi ſolidum aliquod frangi debeat, Geometræ non erit difficilis æſtimatio; id enim aut non, aut ibi potiſſimum fiet, ubi momentum ungulæ, ſeu factum ex ungula ducta in diſtantiam ſui centri gravitatis, a plano verticali, in quo eſt axis librationis omnium minimam habebit rationem ad potentiam ibi abrumpere tentantem: ut proinde his paucis conſideratis tota hæc materia redacta ſit ad puram Geometriam, quod in phyſicis & mechanicis unicè deſideratur.

Additio: ſi quis conoeides aliquod quærat, æqualis reſiſtentiæ, huic
Tab. III. ſatisfaciet Tuba parabolica. Sit *in fig.* 28. parabolica linea A E C cujus
Fig. 28. vertex A, tangens verticis AB, circa quam tanquam axem, rotetur linea parabolica, & fiet Tuba AECGDFA. Sumta jam adhuc alia Tubæ portione AEHFA, cùm reſiſtentiæ baſium ſeu circulorum CGD, EHF ſint ut cubi diametrorum CD, EF; reperietur, momenta ipſarum portionum AECGDFA & AEHFA ex natura parabolæ eſſe etiam ut cubos CD, EF.

N°. XIII.

N°. XIII.

NOVA METHODUS

PRO MAXIMIS ET MINIMIS,

itemque tangentibus, quæ nec fractas, nec irrationales quantitates moratur, & ſingulare pro illis calculi genus.

Ex Actis Erudit. Lipſ. ann. 1684.

SIt axis AX, & curvæ plures, ut VV, WW, YY, ZZ, quarum Tab. VI.
ordinatæ, ad axem normales, VX, WX, YX, ZX, quæ vocentur Fig. 29.
reſpectivè, v, w, y, z; & ipſa AX abſciſſa ab axe, vocetur x. Tangentes ſint VB, WC, YD, ZE axi occurrentes reſpectivè in punctis B, C, D, E. Jam recta aliqua pro arbitrio aſſumta vocetur dx, & recta quæ ſit ad dx, ut v (vel w, vel y, vel z) eſt ad VB (vel WC, vel YD, vel ZE) vocetur dv (vel dw, vel dy, vel dz) ſive differentia ipſarum v (vel ipſarum w, aut y, aut z). His poſitis calculi regulæ erunt tales.

Sit a quantitas data conſtans, erit d a æqualis o, & d$\overline{ax}$ erit æqu. a dx: ſi ſit y æqu. v (ſeu ordinata quævis curvæ YY, æqualis cuivis ordinatæ reſpondenti curvæ VV) erit dy æqu. dv. Jam *Additio & Subtractio*: ſi ſit z — y + w + x æqu. v, erit d$\overline{z - y + w + x}$ ſeu d v, æqu. dz — dy + dw + dx. *Multiplicatio*, d$\overline{xv}$ æqu. x dv + v dx, ſeu poſito y æqu. xv, fiet dy æqu. xd$v$ + $v$dx. In arbitrio enim eſt vel formulam, ut xv, vel compendio pro ea literam, ut y, adhibere. Notandum & x & d x eodem modo in hoc calculo tractari, ut y & dy, vel aliam literam indeterminatam cum ſua differentiali. Notandum etiam, non dari ſemper regreſſum a differentiali Æquatione, niſi cum quadam cautione, de quo alibi. Porrò *Diviſio*, d$\frac{v}{y}$ vel (poſito z æqu. $\frac{v}{y}$) dz æqu. $\frac{\pm v\,dy \mp y\,dv}{yy}$.

Quoad *Signa* hoc probè notandum, cùm in calculo pro litera ſubſtituitur ſimpliciter ejus differentialis, ſervari quidem eadem ſigna, & pro + z ſcribi + dz, pro — z ſcribi — dz, ut ex additione, & ſubtractione paulo ante poſita appa-

apparet; ſed quando ad exegeſin valorum venitur, ſeu cum conſideratur ipſius z relatio ad x, tunc apparere, an valor ipſius dz ſit quantitas affirmativa, an nihilo minor, ſeu negativa: quod poſterius cùm ſit, tunc tangens ZE ducitur a puncto Z non verſus A, ſed in partes contrarias, ſeu infra X, id eſt tunc cum ipſæ ordinatæ z decreſcunt creſcentibus x. Et quia ipſæ ordinatæ v modò creſcunt, modò decreſcunt, erit, dv modò affirmativa modò negativa quantitas, & priore caſu 1 V 1 B tangens ducitur verſus A; poſteriore 2 V 2 B in partes averſas: neutrum autem fit in medio circa M, quo momento ipſæ v neque creſcunt, neque decreſcunt, ſed in ſtatu ſunt, adeoque fit dv æqu. 0, ubi nihil refert quantitas ſit-ne affirmativa an negativa, nam + 0 æqu. — 0: eoque in loco ipſa v, nempe ordinata LM, eſt *maxima* (vel ſi convexitatem Axi obverteret, *Minima*) & tangens curvæ in M neque ſupra X ducitur ad partes A, ibique axi propinquat, neque infra X ad partes contrarias, ſed eſt axi parallela. Si dv ſit infinita reſpectu ipſius dx, tunc tangens eſt ad axem recta, ſeu eſt ipſa ordinata. Si dv & dx æquales, tangens facit angulum ſemirectum ad axem. Si creſcentibus ordinatis v, creſcunt etiam ipſa earum incrementa, vel differentiæ, dv; (ſeu ſi poſitis dv affirmativis etiam dd$v$ differentiæ differentiarum ſunt affirmativæ, vel negativis negativæ) curva axi obvertit *concavitatem*; alias *convexitatem*: ubi verò eſt maximum, vel minimum incrementum, vel ubi incrementa ex decreſcentibus fiunt creſcentia, aut contra, ibi eſt *punctum flexus contrarii*, & concavitas, atque convexitas inter ſe permutantur, modo non & ordinatæ ibi ex creſcentibus fiant decreſcentes, vel contra, tunc enim concavitas, aut convexitas maneret: ut autem crementa continuent creſcere, aut decreſcere, ordinatæ verò ex creſcentibus fiant decreſcentes, vel contrà, fieri non poteſt. Itaque punctum flexus contrarii locum habet, quando neque v neque dv exiſtente 0, tamen dd$v$ eſt 0. Unde etiam problema flexus contrarii non duas ut problema maximæ, ſed tres habet radices æquales. Atque hæc omnia quidem pendent a recto uſu ſignorum.

Interdum autem adhibenda ſunt *Signa ambigua*, ut nuper in *diviſione*, antequàm ſcilicet conſtet quomodo explicari debeant. Et quidem ſi creſcentibus x, creſcunt (decreſcunt) $\frac{v}{y}$, debent ſigna ambigua in d$\frac{v}{y}$ ſeu in $\frac{\pm v\,dy \mp y\,dv}{yy}$ ita explicari, ut hæc fractio fiat quantitas affirmativa (negativa). Significat autem $\mp$ contrarium ipſius $\pm$, ut ſi hoc ſit + illud ſit —, vel contrà. Poſſunt & in eodem calculo occurrere plures ambiguitates, quas diſtinguo parentheſibus, exempli cauſa ſi eſſet $\frac{v}{y} + \frac{y}{z} + \frac{x}{v}$

æqu. w,

$= w$, foret $\frac{\pm v\,dy \mp y\,dv}{yy} + \frac{(\pm)\,y\,dz\,(\mp)\,z\,dy}{zz} + \frac{((\pm))\,x\,dv\,((\mp))\,v\,dx}{vv}$ $= dw$, alioqui ambiguitates ex diverſis capitibus ortæ confunderentur. Ub notandum ſignum ambiguum in ſe ipſum ductum dare $+$, in ſuum contrarium dare $-$, in aliud ambiguum formare novam ambiguitatem ex ambabus dependentem.

Potentiæ $d X^a, = a.\ X^{a-1}\,dX$, exempli gratia $d, X^3 = 3\,X^2\,dX$ $d\frac{1}{X^a} = -\frac{a\,dX}{X^{a+1}}$ ex. gr. ſi w ſit $= \frac{1}{X^3}$ fiet $d\,w = -\frac{3\,dX}{X^4}$.

Radices: $d, \sqrt[b]{X^a}, = \frac{a}{b}\,dx \sqrt[b]{X^{a-b}}$ (Hinc $d\sqrt[2]{y} = \frac{dy}{2\sqrt[2]{y}}$, nam eo caſu a eſt 1, & b eſt 2; ergo $\frac{a}{b}\sqrt[b]{X^{a-b}}$ eſt $\frac{1}{2}\sqrt[2]{Y^{-1}}$ jam Y^{-1} idem eſt quod $\frac{1}{y}$, ex natura exponentium progreſſionis Geometricæ, & $\sqrt[2]{\frac{1}{y}}$ eſt $\frac{1}{\sqrt[2]{Y}}$) $d\frac{1}{\sqrt[b]{X^a}} = \frac{-b\,dx}{a\sqrt[b]{X^{b-a}}}$. Suffeciſſet autem regula potentiæ integræ tam ad fractas quàm ad radices determinandas, potentia enim fit fracta cùm exponens eſt negativus, & mutatur in radicem cùm exponens eſt fractus: ſed malui conſequentias iſtas ipſe deducere, quàm aliis deducendas relinquere, cùm ſint admodum generales, & crebro occurrentes, & in re per ſe implicita præſtet facilitati conſulere.

Ex cognito hoc velut *Algorithmo*, ut ita dicam, calculi hujus, quem voco *differentialem*, omnes aliæ æquationes differentiales inveniri poſſunt per calculum communem, maximæque & minimæ, itemque tangentes haberi, ita ut opus non ſit tolli fractas, aut irrationales, aut alia vincula, quod tamen faciendum fuit ſecundùm Methodos hactenus editas. Demonſtratio omnium facilis erit in his rebus verſato, & hoc unum hactenus non ſatis expenſum conſideranti, ipſas dx, dy, dv, dw, dz, ut ipſarum x, y, v, w, z (cujuſque in ſua ſerie) differentiis ſive incrementis, vel decrementis momentaneis proportionales haberi poſſe. Unde fit, ut propoſita quacunque æquatione ſcribi poſſit ejus æquatio differentialis, quod fit pro quolibet *membro* (id eſt parte, quæ ſola additione, vel ſubtractione ad æquationem conſtituendam concurrit) ſubſtituendo ſimpliciter quantitatem membri differentialem, pro alia verò quantitate, (quæ non ipſa eſt membrum, ſed ad membrum formandum concurrit) ejus quantitatem differentialem ad formandam quantitatem differentialem ipſius membri adhibendo, non quidem ſimpliciter, ſed ſecundùm Algorithmum hac-

tenus præſcriptum. Editæ verò hactenus Methodi talem tranſitum non habent, adhibent enim plerumque rectam ut DX, vel aliam hujuſmodi, non verò rectam dy quæ ipſis DX, XY, dx eſt quarta proportionalis, quod omnia turbat; hinc præcipiunt, ut fractæ, & irrationales (quas indeterminatæ ingrediuntur) prius tollantur, patet etiam methodum noſtram porrigi ad lineas tranſcendentes, quæ ad calculum Algebraicum revocari non poſſunt, ſeu quæ nullius ſunt certi gradus, idque univerſaliſſimo modo, ſine ullis ſuppoſitionibus particularibus non ſemper ſuccedentibus, modo teneatur in genere, *tangentem* invenire, eſſe rectam ducere, quæ duo curvæ puncta diſtantiam infinitè parvam habentia, jungat, ſeu latus productum polygoni infinitanguli, quod nobis *curvæ* æquivalet. Diſtantia autem illa infinitè parva ſemper per aliquam differentialem notam, ut d*v*, vel per relationem ad ipſam exprimi poteſt, hoc eſt per notam quamdam tangentem. Speciatim, ſi eſſet y, quantitas tranſcendens exempli cauſa ordinata cycloeidis, eaque calculum ingrederetur, cujus ope ipſa Z ordinata alterius curvæ eſſet determinata, & quæreretur dz, ſeu per eam tangens hujus curvæ poſterioris, utique determinanda eſſet dz per dy, haberetur autem dy, quia habetur tangens cycloeidis. Ipſa autem tangens cycloeidis, ſi nondum haberi fingeretur, ſimiliter calculo inveniri poſſet ex data proprietate tangentium circuli.

Placet autem exemplum calculi proponere, ubi notetur, me diviſionem hic deſignare hoc modo, $x : y$ quod idem eſt ac x diviſ. per y ſeu $\frac{x}{y}$. Sit æquatio *prima* ſeu data, $\underline{x : y + \overline{a + bx}\,\overline{c - xx}} :$ quadrat. $\overline{ex + fxx} + ax\sqrt{gg + yy} + yy : \sqrt{hh + lx + mxx}$ æqu. o. exprimens relationem inter x & y, ſeu inter AX, & XY, poſito ipſas a, b, c, e, f, g, h, l, m eſſe datas; quæritur modus ex dato puncto Y educendi YD quæ curvam tangat, ſeu quæritur ratio rectæ DX ad rectam datam XY. Compendii cauſa pro $a + bx$ ſcribamus n; pro $c - xx$, p; pro $ex + fxx$, q; pro $gg + yy$, r; pro $hh + lx + mxx$, s. fiet $x : y + np : qq + ax\sqrt{r} + yy : \sqrt{s}$ æqu. o. Quæ ſit Æquatio *Secunda*. Jam ex calculo noſtro conſtat d, $x : y$ eſſe $\underline{\pm x\,dy \mp y\,dx ;} : yy$; & ſimiliter d, $np : qq$ eſſe $(\pm)\, 2np\,dq\, (\mp)\, \overline{qn\,dp + p\,dn}, : q^3$ & d, $ax\sqrt{r}$ eſſe $- ax\,dr : 2r\sqrt{} + a\,dx\sqrt{r}$; & d, $yy : \sqrt{s}$ eſſe $((\pm))\, yy\,ds\, ((\mp))\, 4ys\,dy, : 2s\sqrt{s}$, quæ omnes quantitates differentiales inde ab ipſo d, $x : y$ uſque ad d, $yy : \sqrt{s}$ in unum additæ, facient o, & dabunt hoc modo Æquationem *tertiam*, ita enim pro membris ſecundæ æquationis ſubſtituuntur quantitates eorum differentiales. Jam dn eſt $b\,dx$, & dp eſt $-2x\,dx$, & dq eſt $e\,dx, + 2fx\,dx$, & dr eſt $2y\,dy$, & ds eſt $l\,dx + 2mx\,dx$. Quibus valoribus in Æquatione tertia ſubſtitutis habebitur æquatio *quarta*, ubi quantitates

tates differentiales, quæ ſolæ ſuperſunt, nempe dx, dy, ſemper reperiuntur extra nominatores, & vincula, & unum quodque membrum afficitur vel per dx, vel per dy, ſervata ſemper lege homogeneorum quoad has duas quantitates, quomodocunque implicatus ſit calculus: unde ſemper haberi poteſt valor ipſius dx : dy ſeu rationis dx ad dy hoc eſt DX quæſitæ ad XY datam, quæ ratio in hoc noſtro calculo (mutando æquationem quartam in Analogiam) erit ut $\pm x : y + axy : \sqrt{r}\ ((\pm))\ 2y : \sqrt{s}$ eſt ad $\mp 1 : y\ (\pm)\ 2npe + 2fx : q^3\ (\mp)\ -2nx + pb : qq + a\sqrt{r}\ ((\pm))\ yy\ \overline{l + 2mx} : 2s\sqrt{s}$. Dantur autem x & y ex dato puncto Y. Dantur & valores ſupra ſcripti literarum n, p, q, r, s, per x & y. Habetur ergo quæſitum. Atque hoc exemplum ſatis implicatum ideo tantùm aſcripſimus, ut modus ſuperioribus regulis in calculo etiam difficiliore utendi appareret. Nunc præſtat uſum in exemplis intellectui magis obviis oſtendere.

Data ſint duo puncta C & E, & recta SS in eodem cum ipſis plano, Tab. VI.
quæritur punctum F in recta SS ita ſumendum, ut junctis CF, FE, Fig. 30.
ſit aggregatum rectangulorum, CF in datam h, & FE in datam r, omnium poſſibilium minimum, hoc eſt ſi SS ſit mediorum ſeparatrix, & h repræſentet denſitatem medii, ut aquæ, a parte C & r denſitatem medii ut areis, a parte E, quæritur punctum F tale, ut via a C ad E per F ſit omnium poſſibilium facillima. Ponamus omnia iſta rectangulorum aggregata poſſibilia, vel omnes viarum poſſibilium difficultates, repræſentari per ipſas KV, curvæ VV ordinatas ad rectam GK normales, quas vocabimus ω, quærique minimam earum, NM. Quia dantur puncta C & E dabuntur & perpendiculares ad SS, nempe CP (quam vocabimus c) & EQ (quam e) & præterea PQ (quam p) ipſam autem QF quæ ſit æqualis ipſi GN (vel AX) vocabimus x, & CF, f; & EF, g; fiet FP, $p - x$; f æqu. $\sqrt{cc + pp - 2px + xx}$, ſeu compendio $\sqrt{l}$, & g æq. $\sqrt{ee + xx}$ ſeu compendio $\sqrt{m}$. Habemus ergo ω æqu. $h\sqrt{l} + r\sqrt{m}$, cujus æquationis æquatio differentialis (poſito $d\omega$ eſſe o, in caſu minimæ) eſt o æq. $-hdl : 2\sqrt{l} - rdm : 2\sqrt{m}$ per regulas calculi noſtri traditas; jam dl eſt $-2dx\,\overline{-p + x}$, & dm eſt $2xdx$, ergo fit: $h\,\overline{p - x} : f$ æqu. $rx : m$. Quod ſi jam hæc accommodentur ad dioptricam, & ponantur f & m, ſeu CF & EF æquales, quia eadem manet refractio in puncto F quantacunque ponatur longitudo rectæ CF, fiet $h\,\overline{p - x}$ æqu. rx, ſeu $h : r :: x : \overline{p - x}$, ſeu h ad r ut QF ad FP, hoc eſt ſinus angulorum incidentiæ, & refractionis FP & QF erunt reciproce ut r & h, denſitates mediorum, in quibus fit incidentia, & refractio. Quæ denſitas tamen non reſpectu noſtri, ſed reſpectu reſiſtentiæ, quam radiis lucis faciunt intelligenda eſt. Et habetur ita demon-

ſtratio calculi, alibi a nobis in his ipſis actis exhibiti, (Vid. N. IX.) quando generale Opticæ, Catoptricæ, & Dioptricæ fundamentum exponebamus. Cum alii doctiſſimi Viri multis ambagibus venati ſint, quæ hujus calculi peritus tribus lineis impoſterum præſtabit. Quod alio adhuc exemplo docebo. Sit curva 133 talis naturæ, ut a puncto ejus quocunque ut 3 ductæ ad ſex puncta fixa in axe poſita, 4, 5, 6, 7, 8, 9, ſex
rectæ 34, 35, 36, 37, 38, 39, ſimul additæ, ſint rectæ datæ g, æquales.
Tab. VI. Sit axis T 1 4 5 2 6 7 8 9, & 12 ſit abſciſſa, 23. ordinata, quæritur tan-
Fig. 31. gens 3 T, dico fore T 2 ad 23 ut $\frac{23}{34} + \frac{23}{35} + \frac{23}{36} + \frac{23}{37} + \frac{23}{38} + \frac{23}{39}$ eſt ad $-\frac{24}{34} - \frac{25}{35} + \frac{26}{36} + \frac{27}{37} + \frac{28}{38} + \frac{29}{39}$. Eademque erit regula, continuatis tantum terminis, ſi non ſex, ſed decem, vel plura puncta fixa ſupponerentur, qualia ſecundùm methodos tangentium editas calculo præſtare ſublatis irrationalibus, tædioſiſſimæ, & aliquando inſuperabilis operæ foret, ut ſi rectangula plana vel ſolida ſecundùm omnes biniones vel terniones poſſibiles ex rectis illis compoſita datæ quantitati æquari deberent; in quibus omnibus, & multo implicatioribus, methodi noſtræ eadem eſt opinione multo major, rariſſimique exempli facilitas. Et hæc quidem initia ſunt tantùm Geometriæ cujuſdam multo ſublimioris, ad difficillima, & pulcherrima quæque etiam miſtæ Matheſeos problemata pertingentis, quæ ſine calculo noſtro differentiali, aut ſimili, non temerè quiſquam pari facilitate tractabit. Appendicis loco placet adjicere ſolutionem Problematis, quod *Carteſius* a *Beaunio* ſibi propoſitum, Tom. 3. Epiſt. tentavit, ſed non ſolvit. Lineam invenire W W talis naturæ, ut ducta ad axem tangente WC, ſit XC ſemper æqualis eidem rectæ conſtanti, a. Jam XW ſeu w ad XC ſeu a, ut dw ad dx: Ergo ſi dx (quæ aſſumi poteſt pro arbitrio) aſſumatur conſtans, ſive ſemper eadem nempe b, ſeu ſi ipſæ x ſive AX creſcant uniformiter, fiet W æqu. $\frac{a}{b}$ dw, quæ erunt ipſæ W ordinatæ, ipſis dw, ſuis incrementis, ſive differentiis, proportionales, hoc eſt ſi x ſint progreſſionis arithmeticæ, erunt w progreſſionis Geometricæ, ſeu ſi w ſint numeri, x erunt logarithmi: linea ergo W W logarithmica eſt.

N°. XIV.

Nº. XIV.

DE DIMENSIONIBUS CURVILINEORUM,

Additio ad Schedam

DE DIMENSIONIBUS FIGURARUM INVENIENDIS,

ſuperiùs p. 158. relatam.

Ex Actis Erud. Lipſ. 1684.

CUm eximiæ eruditionis Mathematicus, *Joh. Chriſtophorus Sturmius*, in Actis nuperi menſis Martii publicaverit methodum, qua dimenſiones figurarum ab *Euclide*, *Archimede*, aliiſque datæ directius, & compendioſius, quàm vulgo fieri ſolet, demonſtrantur, reducendo ſcilicet ad ſeries infinitas continua abſciſſarum, ſeu partium axis biſectione, & parallelogrammorum ſemper aliorum, atque aliorum (pro altitudine partes axis, pro baſi ordinatas habentium) circumſcriptione, ac de ea re meam nominatim, aliorumque Geometrarum ſententiam deſideraverit; officii mei putavi, quid ſentiam paucis expromere, etſi ſerius fortaſſe quàm facturus eram, ſi illum actorum locum maturiùs animadvertiſſem. Et quidem non poſſum non agnoſcere methodum hanc demonſtrandi probam eſſe, & laudandam. Sentio autem & hanc, & alias hactenus adhibitas omnes, deduci poſſe ex generali quodam meo dimetiendorum curvilineorum principio, *quod figura curvilinea cenſenda ſit æquipollere Polygono infinitorum laterum*; unde ſequitur, quicquid de tali Polygono demonſtrari poteſt, ſive ita, ut nullus habeatur ad numerum laterum reſpectus, ſive ita, ut tanto magis verificetur, quanto major ſumitur laterum numerus, ita, ut error tandem fiat quovis dato minor; id de curva poſſe pronuntiari. Unde duæ oriuntur methodorum ſpecies, ex quibus meo judicio pendet, quicquid vel hactenus inventum eſt, circa dimenſionem curvilineorum, vel inpoſterum poterit inveniri. Idque hactenus non ſatis conſideratum reperio. Cæterum hortor Virum Clariſſimum, ut tentet methodum ſuam ad eas promovere figuras, quarum dimenſio nondum datur, ut ſcilicet non tantùm ad demonſtrandum, ſed etiam ad inveniendum ſerviat, quod variis modis præſtari poſſe video. Licet autem generaliores methodos dudum habeam, qualis illa eſt, quam in ſcheda menſis Maii Actorum hujus anni publicavi, non tamen tales contemno vias magis reſtrictas, quia ſæpe ſunt compendioſiores in quibuſdam caſibus,

& variare Methodos ad perfectionem ſcientiæ pertinet, & aliæ methodi aliis problematis ſunt aptiores, ac quaſi à natura aſſignatæ; præſertim cùm generalis illa Methodus mea comparata ſit ad inveniendas quadraturas indefinitas, ſeu figuræ toti pariter, & partibus ejus quibuſcunque communes; pro definitis verò portionibus, vel totis figuris ſolis nondum mihi ſufficere, ſed alia planè adhibenda eſſe videatur.

Qua tamen occaſione non diſſimulabo, alium Virum Eximium, qui in iiſdem Actis menſe Octobri anni præteriti 1683. etiam quadraturas definitas, aut earum impoſſibilitatem, & ſpeciatim circa dimenſionem totius circuli exhibere voluit, (quod mihi ex iis, quæ affert, nondum ſequi videbatur) nuper mihi ſignificaſſe, inventum ſe habere modum ſatisfaciendi huic difficultati. Id inventum ſi legitimum eſt, lubens, quæ in Actis proximi menſis Martii contra ſcripſi, retractabo, & fatebor, eum aliquid magni momenti, mihique ſecundùm hanc inveſtigandi rationem ignotum, & inſperatum præſtitiſſe, magnumque illud Problema Tetragoniſmi Circularis quoad eum quadrandi modum, qui vulgo quæritur, abſolviſſe demonſtrata ejus impoſſibilitate, quod hactenus publicè fecit nemo. Ait enim, ſe poſſe demonſtrare quandocunque figuræ alicujus linea algebraica (ut ego loqui ſoleo) terminatæ, non datur quadratura algebraica indefinita, ſive generalis, (ſeu quando ejus non datur quadratrix Algebraica) tunc nec poſſe dari alicujus portionis ejus quadraturam algebraicam definitam, ſeu ſpecialem. (Alibi autem explicui nec *Algebraicam* vocare quantitatem, vel lineam, cujus natura per æquationem certi gradus exprimi poteſt.) Ego ſanè me fateor hactenus in alia fuiſſe ſententia; quoniam tamen promittentis amici ingenium maximi facio, ideo nondum deſperare volo de ſucceſſu, hortorque magnopere, ut illam demonſtrationem edat, unde plurimum lucis accedet Geometriæ.

N°. XV.

N°. XV.

DEMONSTRATIO GEOMETRICA

Regulæ apud Staticos receptæ *de momentis gravium in planis inclinatis*, nuper in dubium vocatæ: & ſolutio caſus elegantis, in Actis Novembr. 1684. pag. 512. propoſiti, *de globo duobus planis angulum rectum facientibus ſimul incumbente*; quantum unumquodque planorum prematur, determinans.

Ex Actis Erudit. Lipſ. ann. 1685.

SIt in *Fig.* 32. planum verticale ADB, & inclinatum ACE; & in illo deſcendere tendat grave B, in hoc grave C, quæ deſigno per puncta, in quæ incidunt eorum centra gravitatis. Sint autem gravia connexa fune BAC, & in æquilibrio, anguluſque ABC rectus. *Ajo fore grave* B *ad grave* C, *ut recta* AB *ad rectam* AC, quod ſic oſtendo: Funem, (qui gravitate carere intelligitur) manu prehendendo in C, trahendoque grave C deorſum in E, adeoque ſimul grave B ſurſum in D (quo facto æquales erunt CE & BD) patet æquilibrium, quod prius erat inter gravia, manere, nec manum ab ipſis juvari, vel impediri, nec proinde eorum centrum gravitatis commune (ſeu centrum totius ex ipſis compoſiti, ſive centrum æquilibrii) attolli, vel deprimi. Et cùm gravium in ſitu B, C, centrum gravitatis commune eſſet in recta BC, horizonti parallela, ideo eorumdem centrum in ſitu DE poſitorum manebit in recta BC, alioqui attolleretur, vel deprimeretur. At idem eſt & in recta DE; quippe quæ eorum centra gravitatis, B & C, jungit: erit ergo in H puncto communi rectarum BC, & DE. Jam ex Geometria oſtendi poteſt *Lemma* facile, nec injucundum: ſi ſint CE & BD æquales, fore DH ad HE, ut AC ad AB, (*de quo mox.*) Eſt autem etiam grave E (ſive C) ad grave D (ſive B) ut DH ad HE, quia H eſt centrum æquilibrii ipſorum. Ergo erit grave C ad grave B, ut AC ad AB, quod aſſerebatur. *Idem aliter etiam ſine aſſumto lemmate* illo geometrico oſtendi poteſt, ſi grave B attollatur uſque ad A, ſeu ſi (D) incidat in ipſum Tab. 7. Fig. 32.

ipſum punctum A, eo enim caſu C (E) ſeu B (D) erit æqualis B A, & (H) incidet in C, & (H) (D) coincidet cum C A; eritque C centrum æquilibrii gravium ex B & C translatorum in A & (E), ac pro grave inde in (E) hoc eſt grave C, ad grave in A, hoc eſt grave B, erit ut AC ad C (E) ſive AB, ut ante. Placet tamen ipſius propoſitionis Geometricæ ſupradictæ demonſtrationem ſubjicere.

LEMMA: *Omnium triangulorum, angulum coincidentem, & ſummam laterum circa eundem angulum æqualem habentium, baſes a baſi unius ex ipſis trianguli in eadem ratione ſecantur; quæ ſcilicet eſt ratio laterum hujus trianguli poſitorum circa angulum communem.* Sit angulus communis FAM *in eadem Fig.* 32. & triangula quotcunque ut A B C, A D E angulum B A C, D A E habentia coincidentem, & ſummam laterum BA + AC vel DA + AE ſemper æqualem (unde & B D æqualis erit ipſi C E) unumque ex his triangulis aſſumatur ut ABC: dico a baſi ejus B C ſecari baſin DE trianguli alterius cujuſcunque ſupradictas conditiones habentis ADE, in partes D H, H E, quæ ſint in ratione AC, A B. Nimirum ex D ad AC ducatur DG parallela ipſi BC, & ex G ad BC ducatur GL, parallela ipſi AB. Jam (ob triangula ABC, GLC, ſimilia) eſt AC ad AB, ut GC ad GL, ſeu ad DB, ſeu ad CE. Rurſus (ob triangula EGD, ECH ſimilia) G C ad CE, ut DH ad HE. Ergo (a primis ad poſtrema) erit AC ad AB, ut DH ad HE, quod oſtendendum proponebatur. Patet autem ex demonſtratione, nihil referre utrum angulus B ſit rectus, & proinde etiam D E, baſin trianguli A D E, ſecare baſin BC alterius trianguli ABC (eamdem laterum circa communem angulum ſummam habentis) ita ut ſegmenta CH, HB, ſint proportionalia ipſis DA, AE, lateribus trianguli ADE circa angulum triangulis communem A. Poteſt etiam Lemma noſtrum haberi pro acceſſione locorum Planorum. Locus enim punctorum, quibus baſes omnium triangulorum, eandem ſummam laterum circa communem angulum habentium, in data ratione ſecantur, eſt recta. Supereſt nunc, ut veniamus ad ſolutionem caſus *de globo* I (*fig.* 33.) *duobus planis* XC, ZC, *ad horizontem* NO
Tab. 7. *inclinatis, ſed ad ſe invicem angulum rectum facientibus ſimul incumbente, illi*
Fig. 33. *in F, huic in H; ut determinemus, quantum ſit momentum, quo unumquodque planum premitur.* Statim autem patet, (quod etiam ab Adm. Rev. P. *Kochanskio* in Actis Junii 1685. rectè notatum video) globum in plano aliquo inclinato duplex exercere momentum, unum quo decliviter deſcendere tendit, alterum quo planum declive premit, quæ duo ſimul abſolutum, ſeu totale gravis momentum conſtituunt. Itaque in noſtro caſu *ob duas cauſas* planum alterutrum ut XFC, a globo I premi intelligitur: *prima* eſt quod globus I deſcendere tendens in plani X F C

linea

linea F C; momento, quod ſit ad totale, ut XN ad XC (quemadmodum demonſtravimus) aget reliquo (quod erit ad totale, ut XC - XN, ad XC) in ipſum planum declive XFC, a quo ſuſtentatur. Sed actio iſta etſi vera, & realis ſit, eſt tamen alternativa, & ob præſentiam alterius plani etiam ſuſtentantis refracta, ut poſtea explicabitur. *Secunda* cauſa premendi planum XFC eſt, quod globus I deſcendens in altero plano ZHC, momento quod ſit ad totale, ut ZO ad ZC, premit hoc ipſo momento planum XFC deſcenſui ſuo declivi, in linea HC affectato, ſed directè objiciens, atque ita hanc deſcenſus vim excipiens. Porro eadem ratiocinatio inſtitui poteſt de plano altero ZHC, etiam ex duabus illis premendi cauſis, & quidem *ex prima cauſa*, quæ erat *ſuſtentatio* globi in ipſo plano, in quo decliviter deſcendere tendit, premitur hoc planum ZHC momento, quod ſit ad totale momentum globi, ut ZC - ZO, ad ZC: at verò ex *altera* cauſa quæ erat *exceptio* globi, dum ſcilicet planum ZHC, ei in altero plano XFC, decliviter deſcendere conanti, ſe directè objiciens, vim illam excipit, premitur planum ZHC momento, quod ſit ad totale, ut XN ad XC. Et quidem cauſa prima premendi planum XFC, & ſecunda premendi planum ZHC, quæ ſunt diſſimilares, ſimul conſtituunt totum momentum globi; globus enim premit planum XFC quatenus ab eo ſuſtentatur, & planum ZHC quatenus à priore non ſuſtentatur. Similiter cauſa prima premendi planum ZHC, & ſecunda premendi planum XFC, licet diſſimilares, conſtituunt totum momentum globi. Cauſæ autem ſimiles conjunctæ, duæ ſcilicet preſſiones ob ſuſtentationem, vel duæ preſſiones ob exceptionem, (quibus duabus poſterioribus compoſitis utitur doctiſſimus Autor ſpeciminis de momentis gravium in Actis Novembr. 1684 exhibiti, qui caſum hunc de duobus planis angulum rectum facientibus, a ſe ingenioſe excogitatum propoſuit) momentum totale non integrant, ſumtæ ſcilicet ex diverſis momenti totalis partitionibus. Verùm cum quatuor premendi cauſis ſimul ſumtis bis integretur momentum totale, patet illas ſic abſolutè ſumtas non eſſe compatibiles, nec *cumulativè*, ſed ut poſt dicam, tantùm *electivè* ſive alternativè componendas: alioqui effectus globi in plana major eſſet momento globi totalis abſoluto. Cùm verò manifeſtum ſit, duas ſemper cauſas in quolibet plano æquali ratione in conſiderationem venire debere, nec tamen integras retineri poſſe; adhibenda eſt *regula alternativorum*, quæ in jure accreſcendi, in æſtimatione ſpei alea ludentium, aliiſque caſibus locum habet, hoc eſt, utriuſque momenti ſumendum eſt dimidium, ſeu, quod eodem redit, medium inter ipſa arithmeticum, ſive dimidium ſummæ ex ambobus. Itaque ſi momentum globi totale ſit unitas, cùm duo momenta premendi planum XFC ſint $\frac{XC - XN}{XC}$, & $\frac{ZO}{ZC}$ ſeu $\frac{ZO}{XC}$ (ſi po-

nantur XC & ZC æquales) ſequitur momentum, quo revera in hoc ſitu premitur planum XFC, fore dimid. $\frac{xc - xn}{xc}$ + dimid. $\frac{zo}{xc}$ ſeu $\frac{xc - xn + zo}{2\,xc}$, & ſimiliter momentum, quo revera premitur planum ZHC erit dimid. $\frac{xc \cdot zo}{zc}$ (ſeu dimid. $\frac{xc - zo}{xc}$ + dimid. $\frac{xn}{xc}$ hoc eſt $\frac{xc - zo + xn}{2\,xc}$ quorum duorum momentorum revera duo plana prementium ſumma componit momentum globi totale, ſeu unitatem, quod omnino opus erat obſervari. Atque adeo ceſſat difficultas, quæ ex caſu propoſito naſci poſſe videbatur; quæ tamen talis erat, ut omnino mereretur explicari: nec ideo minus obligati ſumus Autori ſpeciminis, qui eam excogitavit, pariter atque Adm. R. P. *Kochanskio*, qui viam jam tum deſignavit, cui rectè inſiſtendo ad determinationem preſſionis cujuſque plani perveniri poterat. In numeris Kochanskianis ſit XN vel CO, 3. CN vel ZO, 4. XC vel ZC, 5. tunc planum XFC revera premitur a $\frac{3}{5}$ & planum ZHC a $\frac{2}{5}$, momenti totalis. Sin pro 3, 4, 5, numeri ſint 5, 12, 13, tunc planum XFC premitur a $\frac{10}{13}$, & planum ZHC a $\frac{3}{13}$ momenti totalis. Ad examen autem regulæ noſtræ proderit etiam conſiderare, & cum regula conferre ſolutiones caſuum ſpecialium aliunde notas: ut ſi XN fiat æqualis nihilo, planum XFC fiet horizontale, ZHC verticale, rectæque XC & ZO æquales, ubi etiam ex regula rectè prodibit totum momentum totale pro premendo plano XFC, & nihil pro premendo plano ZHC. Si verò rectæ XN & ZO ſumantur æquales, adeoque & anguli XCN, ZCO æquales, tunc per ſe manifeſtum eſt, utrumque planum eodem modo premi a globo, ac proinde dimidium momenti totalis unicuique impendi: quod ipſum & ex regula noſtra prodit. Methodus autem qua uſi ſumus, per regulam alternativorum, etiam in aliis caſibus perplexis enodandis magnum uſum habere poteſt; quamvis non ſit purè Geometria, ſed quodammodo Metaphyſica ſimul; unde proviſionalis cenſeri poteſt, donec idem demonſtretur alia via, magis ſecundùm vulgares notiones geometrica, & rigoroſa, quàm ubi vacaverit, exhibere mihi reſervo. Porrò unum adhuc admonendum eſt, ne quis in captionem ſatis alioqui ſubtilem incidat, & ut appareat clarius, cur duos conatus componendos vocaverimus alternativos: nempe hæc quidem, quæ de preſſione cujuſque plani determinavimus, tantum locum habent, cùm unumquodque planum ſatis firmum eſt, ut reſiſtere poſſit unicuique conatuum alternativorum a quibus premitur, ſeparatim ſumto; ſed ſi unum ex planis reſiſtere quidem poſſet minori conatui ſe urgenti, vel etiam dimidiæ amborum ſummæ, non verò majori, alterum verò planum ita firmum eſſet, ut unicuique ex ambabus in ſe preſſionibus poſſet reſiſtere, tunc eo ipſo locum habebit abſolutè unus ex caſibus

ſibus alternativis præ reliquis, ac proinde ceſſante regula alternativorum æqualiter locum habentium, prius illud, ſeu debilius planum vi ejus conatus, cui impar eſt, ſuperaretur. Quæ quidem obſervatio ſingularis eſt, utiliſque ut conatus naturæ alternativi ſinguli, a conatu ob exitum alterutro modo fruſtra tentatum, ex ipſis alternativis ſibi obſtantibus reſultante, diſtinguantur: nec ideo exempli cauſa putetur planum XFC premi abſolutè momento $\frac{zo}{xc}$, quoniam eo ipſo momento premitur conditionaliter; ita ſcilicet, ut frangendum ſit, ſi ei reſiſtere non poſſit. Nam in caſu quo ei reſiſtere poteſt, vi ſua elaſtica renitens prementi, onus in alterum planum rejicere tentat; quod ipſum ſi etiam ſatis firmum ſit, ex conflictu ea demum æquiſſima diſtributio ſequitur, quam expoſuimus, ubi non ipſa quidem quatuor momenta, ſed tamen ipſis proportionalia adhibentur; in quæ momentum totale diſtribuitur. Sunt autem hæc, quemadmodum prima fronte paradoxa (ut ſcilicet planum aliquod dicatur certo aliquo momento, ſeu conatu premi alternativè, ſive conditionaliter) ita conſideratu jucunda, & proceſſum naturæ non tantùm mathematicum, ſed & quodammodo Metaphyſicum illuſtrare apta.

N°. XVI.

BREVIS DEMONSTRATIO

Erroris memorabilis *Carteſii*, & aliorum circa legem naturalem, ſecundùm quam volunt à Deo eamdem ſemper quantitatem motûs conſervari; qua & in re mechanica abutuntur.

Ex Actis Erudit. Lipſ. ann. 1686.

COmplures Mathematici cùm videant in quinque machinis vulgaribus celeritatem, & molem inter ſe compenſari, generaliter vim motricem æſtimant a quantitate motûs, ſive producto ex multiplicatione corporis in celeritatem ſuam. Vel ut magis geometricè loquar, vires duorum corporum (ejuſdem ſpeciei) in motum concitatorum, ac ſua mole pariter, ac motu agentium, eſſe dicunt in ratione compoſita corporum, ſeu molium, & earum quas habent velocitatum. Itaque cùm rationi conſentaneum ſit, eamdem motricis potentiæ ſummam in natura conſervari: & neque imminui, quoniam videmus nullam vim ab uno corpore amitti, quin in aliud transferatur; neque augeri, quia vel ideo motus perpetuus mechanicus nuſpiam ſuccedit, quod nulla machina, ac proinde ne integer quidem mundus ſuam vim intendere poteſt ſine novo externo impulſu; inde factum eſt, ut *Carteſius*, qui vim motricem, & quantitatem motûs pro re æquivalente habebat, pronunciaverit eamdem quantitatem motûs a Deo in mundo conſervari.

Ego verò ut oſtendam quantum inter hæc duo interſit, ſuppono, primò corpus cadens ex certa altitudine acquirere vim eouſque rurſus aſſurgendi, ſi directio ejus ita ferat, nec quicquam externorum impediat: exempli cauſa, pendulum ad altitudinem, ex qua demiſſum eſt præciſe rediturum eſſe, niſi aeris reſiſtentia, ſimiliaque impedimenta exigua alia nonnihil de vi ejus abſorberent, a quibus nos quidem nunc animum abſtrahimus. Suppono item ſecundò, tanta vi opus eſſe ad elevandum corpus A unius libræ uſque ad altitudinem CD quatuor ulnarum, quanta opus eſt ad elevandum corpus B quatuor librarum, uſque ad altitudinem EF unius ulnæ. Omnia hæc a Carteſianis pariter ac cæteris Philoſophis, & Mathe-

Tab. 7. Fig. 35.

Mathematicis noſtri temporis conceduntur. Hinc ſequitur corpus A delapſum ex altitudine CD præciſe tantum acquiſiviſſe virium, quantum corpus B lapſum ex altitudine EF. Nam corpus (A) poſtquam lapſu ex C pervenit ad D, ibi habet vim reaſſurgendi uſque ad C, per *ſuppoſ.* 1, hoc eſt vim elevandi corpus unius libræ (corpus ſcilicet proprium) ad altitudinem quatuor ulnarum. Et ſimiliter corpus (B) poſtquam lapſu ex E pervenit ad F, ibi habet vim reaſſurgendi uſque ad E, per *ſuppoſ.* 1, hoc eſt vim elevandi corpus quatuor librarum (corpus ſcilicet proprium) ad altitudinem unius ulnæ. Ergo per *ſuppoſ.* 2, vis corporis (A) exiſtentis in D, & vis corporis (B) exiſtentis in E, ſunt æquales. Tab. 7. Fig. 34.

Videamus jam an & quantitas motus utrobique eadem ſit. Verùm ibi præter ſpem diſcrimen maximum reperietur. Quod ita oſtendo. Demonſtratum eſt a *Galilæo*, celeritatem acquiſitam lapſu CD, eſſe duplum celeritatis acquiſitæ lapſu EF. Multiplicemus ergo corpus A quod eſt ut 1, per celeritatem ſuam, quæ eſt ut 2, productum, ſeu quantitas motus erit ut 2; rurſus multiplicemus corpus B quod eſt ut 4, per ſuam celeritatem, quæ eſt ut 1, productum, ſeu quantitas motûs erit ut 4. Ergo quantitas motûs, quæ eſt corporis (A) exiſtentis in D, eſt dimidia quantitatis motûs, quæ eſt corporis (B) exiſtentis in F, & tamen paulo antè vires utrobique inventæ ſunt æquales. Itaque magnum eſt diſcrimen inter vim motricem, & quantitatem motûs, ita ut unum per alterum æſtimari non poſſit, quod oſtendendum ſuſceperamus. Ex his apparet, quomodo vis æſtimanda ſit a quantitate effectûs, quem producere poteſt, exempli gratia ab altitudine, ad quam ipſa corpus grave datæ magnitudinis, & ſpeciei poteſt elevare, non verò a celeritate quam corpori poteſt imprimere. Non enim dupla, ſed majore vi opus eſt ad duplam eidem corpori dandam celeritatem. Nemo verò miretur in vulgaribus machinis, vecte, axe in peritrochis, trochlea, cuneo, cochlea, & ſimilibus æquilibrium eſſe, cùm magnitudo unius corporis celeritate alterius, quæ ex diſpoſitione machinæ oritura eſſet, compenſatur; ſeu cùm magnitudines (poſita eadem corporum ſpecie) ſunt reciprocè ut celeritates; ſeu cùm eadem alterutro modo prodiret quantitas motûs. Ibi enim evenit etiam eamdem utrobique futuram eſſe quantitatem effectûs, ſeu altitudinem deſcenſûs, aut aſcenſûs in quodcumque æquilibrii latus motum fieri velis. Itaque per accidens ibi contingit, ut vis a motûs quantitate poſſit æſtimari. Alii verò caſus dantur, qualis is eſt, quem ſupra attulimus, ubi non coincidunt.

Cæterum cùm nihil ſit probatione noſtra ſimplicius, mirum eſt vel *Carteſio*, vel Carteſianis, viris doctiſſimis, in mentem non veniſſe. Sed illum quidem nimia fiducia ſui ingenii in tranſverſum egit, hos alieni. Nam *Carteſius*, ſolito magnis viris vitio, poſtremo factus eſt paulo præfidentior. Carteſiani autem non pauci vereor ne paulatim Peripateticos com-

plures imitari incipiant, quos irrident, hoc eſt ne pro recta ratione & natura rerum, conſulendis magiſtri libris aſſuefiant.

Dicendum eſt ergo vires eſſe in compoſita ratione corporum (ejuſdem gravitatis ſpecificæ, ſeu ſoliditatis) & altitudinum celeritatis productricium, ex quibus ſcilicet labendo tales celeritates acquiri potuiſſent; vel generalius (quia interdum nulla adhuc celeritas producta eſt) altitudinum prodituarum: non verò generaliter ipſarum celeritatum, utcunque id plauſibile prima ſpecie videatur, & pleriſque ſit viſum; ex quo complures errores nati ſunt, qui in ſcriptis mathematico-mechanicis RR. PP. *Honorati Fabri* & *Claudii Dechales*, itemque *Joh. Alph. Borelli*, & aliorum virorum, cæteroqui in his ſtudiis præſtantium, deprehenduntur. Quin & hinc factum puto, quod nuper Regula *Hugeniana* circa centrum oſcillationis pendulorum, quæ veriſſima eſt, a nonnullis viris doctis in dubium fuit vocata.

N°. XVII.

COURTE REMARQUE DE M. L'ABBE' DE CONTI, où l'on montre à M. G. G. *Leibniz* (a) le paralogiſme contenu dans l'objection précédente.

Extraite des Nouvelles de la République des Lettres du mois de Septembre 1686.

MOnſieur *Leibniz* s'étonne que ſa preuve, qu'il croit la plus ſimple du monde, ne ſe ſoit pas préſentée à l'eſprit de M. *Deſcartes*, ni à celui des Carteſiens. Mais il faudroit bien plus s'étonner ſi un Philoſophe & un Géomètre de tant de pénétration avoit pû donner par mégarde dans une telle penſée, & y précipiter avec lui tant d'habiles gens. Que les ſavans jugent ſi c'eſt lui, ou M. *Leibniz*, qui eſt allé de travers par une trop grande confiance en ſon eſprit, le défaut ordinaire des grands hommes. M. *Leibniz* ſe donne un ſouci qui eſt à la vérité d'une bonne ame, mais un peu trop à contre-tems, lorſqu'il a peur que les Diſciples de M. *Deſcartes* n'imitent les Péripateticiens dont ils ſe moquent. Voyons un peu cette erreur conſiderable, qu'il prétend détruire.

Il dit 1°. que M. *Deſcartes* aſſûre que Dieu conſerve dans l'Univers la même quantité de mouvement; 2°. que ce même Philoſophe compte pour cho-

(a) Vide N°. XX.

choſes équivalentes la force motrice, & la quantité du mouvement: 3°. que pluſieurs Mathématiciens font en général l'eſtime de la force mouvante par la quantité du mouvement, ou par le produit de la multiplication du corps par ſa viteſſe. Or il prétend que ces choſes répugnent entre elles, qu'ainſi la force mouvante, & la quantité du mouvement différent beaucoup, & que cette régle de M. *Deſcartes* eſt fauſſe: *la même quantité du mouvement eſt toujours conſervée dans la nature.*

Pour ce qui eſt de la derniére partie de ſa conſéquence, c'eſt aux lecteurs Cartéſiens à examiner comment elle peut être liée avec *ſes prémiſſes.* Pour la premiére, il la prouve ainſi. » Selon M. *Deſcartes* & les » autres Mathématiciens il ne faut pas moins de force pour élever un » corps d'une livre à la hauteur de 4. aunes, que pour élever un » corps de 4 livres à la hauteur d'une aune: d'où il s'enſuit que le » ſimple tombant de la hauteur quadruple acquiert préciſément la même » force que le quadruple tombant de la hauteur ſimple; car l'un & l'au- » tre acquerroit une telle force, que les obſtacles externes étant ôtés il » pourroit remonter d'où il ſeroit deſcendu. De plus *Galilée* a démontré » que la viteſſe qu'un corps acquiert en tombant de la hauteur de 4. » aunes eſt le double de la viteſſe qu'il acquiert en tombant de la hau- » teur d'une aune. Multipliant donc le corps d'une livre par ſa viteſſe, » c'eſt à-dire, 1. par 2. le produit, ou la quantité du mouvement ſe- » ra comme 2, & multipliant le corps de 4 livres par ſa viteſſe, » c'eſt-à-dire, 4. par 1., le produit, ou la quantité du mouvement » ſera comme 4, donc l'une de ces quantités eſt la moitié de l'au- » tre, quoique peu auparavant les forces ayent été trouvées égales, » les forces, dis-je, que M. *Deſcartes* ne diſtingue point des quantités du » mouvement. Donc &c. «

J'admire que M. *Leibniz* n'ait pas aperçu le paralogiſme de cette preuve, car où eſt l'homme un peu habile dans les méchaniques qui n'entende que le principe des Cartéſiens touchant les 5. machines vulgaires, regarde les puiſſances *iſochrones*, ou les mouvemens imprimés en tems égaux, lorſque l'on compare deux poids enſemble? Car on démontre dans les Elémens que 2. mobiles inégaux en volume comme 1. & 4. mais égaux en quantité de mouvement comme 4. ont des viteſſes proportionelles en raiſon reciproque de leurs maſſes, comme 4. à 1. & par conſéquent qu'ils parcourent toûjours en même tems des eſpaces proportionnels à ces viteſſes. Outre cela *Galilée* montre que les eſpaces décrits par les corps qui tombent, ſont en même raiſon entr'eux que les quarrés des temps. Ainſi dans l'exemple de M. *Leibniz* le corps d'une livre monteroit à la hauteur de 4. aunes dans un tems comme 2, & le corps de 4 livres monteroit à la hauteur d'une aune dans un tems comme 1. Puis donc que les tems ſont inégaux, il n'eſt pas

étrange

étrange qu'il trouve inégales dans cette chûte les quantités du mouvement, quoiqu'elles euſſent été trouvées égales dans une chûte que l'égalité de tems rendoit tout-à-fait différente de celle-ci. Suppoſons préſentement que ces deux corps ne ſe meuvent qu'en même tems, c'eſt-à-dire, qu'ils ſont ſuſpendus à une même balance & à des diſtances reciproques à leur groſſeur, nous trouverons égales les quantités oppoſées de leurs mouvemens, ou les forces de leurs poids, ſoit que nous multipliions leurs maſſes par leurs diſtances, ſoit que nous le faſſions par leurs viteſſes. La choſe arrive autrement lorſque les tems ſont inégaux. D'où il paroit que ni M. *Deſcàrtes* ni aucun autre ne ſe trompe ici, & je doute fort qu'aucun de ces hommes doctes, qui ont depuis peu conteſté la régle de M. *Huygens* touchant le centre d'Oſcillation, change de ſentiment à cauſe de cette objection de M. *Leibniz*.

N°. XVIII.

N°. XVIII.

MEDITATIO NOVA

De natura Anguli contactus & oſculi, horumque uſu in practica Matheſi, ad figuras faciliores ſuccedaneas difficilioribus ſubſtituendas.

Ex Actis Erud. Lipſ. 1686.

IN lineæ cujuſque partibus infinitè exiguis, conſiderari poteſt non tantùm directio, ſive declivitas, aut inclinatio, ut hactenus factum eſt, ſed & mutatio directionis, ſive flexura; & quemadmodum linearum directionem menſi ſunt Geometræ, ſimpliciſſima linea in eodem puncto eandem directionem habente, hoc eſt recta tangente; ita ego flexuram lineæ metior ſimpliciſſima linea in eodem puncto, non tantùm directionem eamdem, ſed & eamdem flexuram habente, hoc eſt circulo curvam propoſitam non tantùm tangente, ſed &, quod amplius eſt, oſculante, quod mox explicabo. Eſt autem ut recta linea aptiſſima ad determinandam directionem, quia eadem ubique ejus directio eſt; ita circulus aptiſſimus ad determinandam flexuram, quia ubique eadem unius circuli eſt flexura. Circulus autem ille lineam propoſitam ejuſdem plani in puncto propoſito oſculari a me dicitur, qui minimum cum ea facit angulum contactus. Ex infinitis enim circulis lineam, ubi ad eaſdem partes cava eſt, tangentibus in propoſito puncto, ſemper determinari poteſt unus, qui maximè ibi lineæ aſſimilatur, & cum ea longiſſimè quaſi repit, hoc eſt, ut Geometricè loquar, ita ad eam accedit, ut inter ipſum, & curvam propoſitam nullus alius arcus circuli, curvæ in puncto propoſito occurrens deſcribi poſſit. Et hunc minimum angulum contactus circuli ad lineam propoſitam, voco angulum oſculi, uti minimus angulus rectæ ad lineam vocatur angulus contactus. Ut enim inter rectam, & lineam, angulum contactus facientes, nulla cadere poteſt recta: ita inter circulum, & lineam, angulum oſculi facientes, nullus cadere poteſt arcus circuli. Ut autem habeatur & modus inveniendi circulum oſculantem, ſciendum eſt, quemadmodum tangentes inveniuntur per æquationes, quæ habent duas radices æquales, ſeu duos occurſus coincidentes, & flexus contrarii per tres radices æquales; ita circuli vel aliæ quævis lineæ datam oſculan-

tes inveniuntur per quatuor radices æquales, ſeu per duos contactus in unum coincidentes. Et quemadmodum duæ lineæ quæ eamdem habent rectam tangentem, ſe tangunt; ita eæ, quas idem oſculatur circulus, ſe oſculantur. Itaque ut ut linea quævis eumdem ad lineam ſibi occurrentem cenſetur facere angulum communem, ſeu rectilineum, quem faciunt in puncto occurſus earum tangentes rectæ, quia differentia conſiſtit in angulo contactus, qui reſpectu anguli rectilinei eſt infinitè exiguus, imò nullus; ita quando duæ rectæ tangentes duarum linearum curvarum ſibi occurrentium coincidunt, ſeu quando duæ lineæ ſe tangunt, tunc linea ad lineam occurrentem eumdem cenſetur facere angulum contactus, quem faciunt in puncto occurſus earum oſculantes circuli, quia differentia conſiſtit in angulo oſculi, qui reſpectu anguli contactus duorum circulorum eſt infinitè parvus, imò nullus. Ex quo intelligi poteſt angulum communem ſeu duarum rectarum, angulum contactus duorum circulorum, & angulum oſculi (primi gradûs) quodammodo ſe habere, ut corpus, ſuperficiem, & lineam. Non tantùm enim linea eſt minor quavis ſuperficie, ſed & ne quidem pars eſt ſuperficiei, ſed tantummodo minimum quoddam, ſive extremum. Quod ſi tres contactus coincidant, aut quatuor, aut plures, (radicibus ſex, aut octo, aut pluribus exiſtentibus æqualibus,) oriuntur oſculationes ſecundi, tertiive gradûs, aut adhuc altiores, in tantum perfectiores oſculo primi gradûs, in quantum prima oſculatio perfectiorem contactum continet, quàm contactus communis. Porrò circulus rectam tangere poteſt, oſculari non poteſt; ſi circulus circulum oſculetur, non erunt diverſi, ſed coincident. De cætero omnem lineam ejuſdem plani oſculari poterit circulus, & in genere, ut ſciri poſſit, quonam contactus, vel oſculi gradu linea lineæ conjungi poſſit, conſiderandum eſt, in quot punctis poſſit eam ſecare. Hæc porrò inſignem habent uſum in praxi. Ut enim ex conſideratione, quod idem ſit angulus, eadem inclinatio, vel directio linearum, quæ eſt rectarum tangentium, inſignes conſequentiæ in mechanicis, catoptricis & dioptricis ductæ ſunt; nam ſi corpus motu compoſito feratur, directio ejus eſt in recta tangente, lineæ, quam deſcribit, & ſi ſibi relinquatur, continuat motum in tangente, & radius incidens eumdem angulum facit ad ſuperficiem excipientem, quem faceret ad planum eam tangens: ita ex conſideratione quoque linearum oſculantium inſignes praxes duci poſſunt. Si enim linea, aut figura egregiam quamdam, atque utilem habens proprietatem inventa ſit, ſed quam ſive tornio, ſive alia ratione in materiam introducere ſit difficile, licebit pro arcu ejus (ſcilicet non nimis magno, tamen ad praxin ſuffecturo) ſubſtituere arcum quaſi coincidentem lineæ alterius deſcriptu facilioris, eam, quam perfectiſſimè licet, tangentis, ſive oſculantis, maximè autem circuli, qui omnium deſcriptu eſt facillimus. Et hinc jam oritur, quod in praxi catoptrica, & dioptrica circu-

lus

lus eſt ſuccedaneum parabolæ, hyperbolæ, aut ellipſeos, ſuoſque ad earum imitationem habet quaſi focos. Nam circulus cujus diameter æquatur parametro ſectionis conicæ, & cujus centrum in axe intra curvam ſumitur, circumferentia autem per verticem tranſit, ſectionem conicam in vertice oſculatur, adeoque aſſumpto arcu, quantum ſatis eſt parvo, ab ea non differt ad ſenſum. Quæ cauſa eſt, cur focus ſpeculi concavi circularis abſit a ſpeculo quarta parte diametri, quia focus parabolæ a vertice abeſt quarta parte parametri, & focus parabolæ, atque circuli oſculantis, coincidunt. Eadem in omni alio linearum, & utilium proprietatum genere, pro re nata locum habent. Quæ quantum conferant ad ſubtilitates Geometricas in uſum vitæ transferendas, nemo talium intelligens non videt. Nobis verò aditum aperuiſſe, ne fortè periret hæc meditatio, nunc quidem ſatis fuit. Nec injucundum erit conſiderare, quomodo ita tandem controverſia Geometrarum de angulo contactus, quæ pleriſque inanis viſa eſt, in veritates deſierit ſolidas, & profuturas.

N°. XIX.

DE GEOMETRIA RECONDITA ET ANALYSI INDIVISIBILIUM ATQUE INFINITORUM.

Ex Actis Erudit. Lipſ. ann. 1686.

CUm intelligam nonnulla, quæ in his Actis ad Geometriæ profectum publicavi, non mediocriter a viris quibuſdam doctis probari, quin & paulatim in uſum transferri, quædam tamen, ſive ſcribentis vitio, ſive aliam ob cauſam, ab aliquibus non ſatis fuiſſe percepta, ideo pretium operæ putavi, hoc loco adjicere, quæ illuſtrare priora poſſint. Accepi nimirum tractatum Dn. *Craigii* de dimenſione figurarum, Londini anno ſuperiore editum, ex quo ſanè apparet, autorem non contemnendos in Geometria interiore progreſſus feciſſe. Is quidem valde approbat diſtinctionem a me aliquoties inculcatam, inter dimenſiones figurarum generales, & ſpeciales, quam pag. 1. ait optimè nuper a Geometris fuiſſe obſervatam, & neglectioni hujus diſtinctionis paralogiſmos complures tetragoniſmi impoſſibilitatem probare conantium, rectè tribuit. Mecum etiam figuras, quas vulgo e Geometria rejiciunt, agnoſcit eſſe Tranſcendentes pag. 26. Methodum quoque Tangentium a me in Actis Octobr. 1684. publicatam, pro humanitate ſua plurimum laudat pag. 27. & 29. tamquam præſtantiſſimam, & cujus ope methodus dimenſionum valde juvetur, optimo contra irrationalitates remedio ſuppeditato. Sunt tamen nonnulla, de quibus monere eum alioſque, nec inutile, nec ipſi ingratum fore putavi. Neſcio enim quomodo factum ſit, ut crediderit, eum qui ſchediaſma Act. Maii 1684. p. 233. ſcripſit, retractaſſe ſententiam, & cum initio Act. Octobr. 1683. propoſuiſſet omnimodam dare demonſtrationem impoſſibilitatis tetragoniſmi circularis, poſtea agnoviſſe Majo anni ſequentis, nondum ſatis demonſtratam eſſe impoſſibilitatem tetragoniſmi ſpecialis. Cùm tamen ſchediaſma Octobr. 1683. ſit a Dn. *D. T.* Schediaſma verò Maii 1684. a me ſit profectum: qui partim eamdem methodum & mihi aſſerebam, ne aliquando rei alienæ uſurpatæ accuſarer, partim ab uſu quem ei tribuebat Dn. *D. T.* amicè diſſentiebam. Nam putabat

tabat ille ex indefiniti tetragoniſmi impoſſibilitate, ſequi & cujuſque definiti impoſſibilitatem: meum verò conſtans dogma fuerat (jam tum indicatum, cùm tetragoniſmum arithmeticum ederem, menſe ſecundo anni primi Actorum, nempe 1682.) ab illa ad hanc non valere conſequentiam. Quod ut probarem, inſtantiam cujuſdam figuræ attuli in Actis Maii 1684, quæ tetragoniſmum ſpecialem recipit, (quod poſſum demonſtrare) non verò generalem, ut ex ipſis Dn. *D. T.* theorematis ibi oſtendere ſuſceperam; quamquam feſtinus, & rei certus in modo probandi per calculum nonnihil aberraverim, quod poſtea explicabo, & corrigam. Ad hæc Dn. *D. T.* privatim reſpondit, ſe methodum iſtam non ex meis hauſiſſe, ſed in eam proprio Marte deveniſſe, & quod ad objectionem attineret, ſe conſequentiam illam à tetragoniſmis indefinitis ad definitos poſſe demonſtrare, inque eo potiſſimum methodum ſuam eminere; inſtantiam verò meam pravo calculo niti. Ego verò lubens faſſus ſum (in Actis Decembr. 1684. p. 587.) ſi eam conſequentiam demonſtrare poſſit, facturum quod hactenus nemo; ſemper tamen ſubdubitavi, & correcto calculo poſtea inſtantiam meam roboravi, de quo mox. Quamquam autem ego hanc methodum jam habuerim ante decennium, & ampliùs, cùm unà eſſemus Pariſiis, & de rebus Geometricis creberrimè loqueremur, quo tempore ipſe per alias planè vias incedebat, mihi verò jam tum familiariſſimum erat æquationes generales adhibere pro exprimenda natura lineæ quæſitæ, progreſſu calculi determinandas, in quo methodi nervus conſiſtit, quale quid alibi nuſpiam animadverteram: attamen candori ejus pariter, & ingenio tantùm tribuo, ut facilè credam vel ipſum per ſe in hæc incidiſſe, vel ſaltem non ampliùs meminiſſe, qua olim occaſione talium meditationum ſemina fuerint jacta: præſertim cùm ſciam, etiam difficiliora ipſum per ſe præſtitiſſe, & multa præclara maximique momenti ab ejus ingenio poſſe expectari.

Quoniam verò in inſtantiæ ſupradictæ calculo erratum a me, ut dixi, admiſſum eſt, quod Dn. *Craigius* Dno. *D. T.* (cui id tribuerat) tamquam argumentum, opinor, ad hominem objecit, ut ipſam methodum indefinitam refutaret, ideo corrigere calculum debeo. Inſpiciatur Actorum anni 1684. pag. 239, ubi æquationem 4zz — 8hz, &c. conferendo cum æquatione bzz + caz &c. debent in æquatione poſteriore termini ubi abeſt z, extra fractionem poſiti multiplicari per fractionis nominatorem, antequam comparatio inſtituatur, ut in utraque fractione omnes termini carentes litera z, una fractione comprehendantur. Ponatur, & b = 1 quod ſemper fieri poteſt, & quia in æquatione priore terminus xz planè abeſt, fiat in poſteriore d = o, dividatur & æquatio prior, ſeu data per 4, & in poſterioris, ſeu ſuppoſititiæ æquationis fractione tam numerator, quàm nominator dividatur per g: ita tam terminus zz utrobique, quàm terminus zz in nominatore fractionis utrobique conſentient. Cætera com-

 parando,

parando, ob terminum z, fiet $c = 2h : a$; ob x^4 fiet $g = 1 : 16$, ſeu $\frac{1}{16}$; ob x^3 fiet $f = -1 : 6a$; ob x in nominatore fiet $f = -h : 8a$. Ergo fit $h = 8 : 6$, ſeu $\frac{4}{3}$ quod abſurdum, nam h eſt quantitas data. Oriuntur & aliæ ex comparatione continuata abſurditates, nam fit vel c vel $f = 0$, contra jam concluſa.

Cæterum placet hoc loco, ut magis profutura dicamus, *fontem aperire Tranſcendentium Quantitatum*, cur nimirum quædam problemata neque ſint plana, neque ſolida, neque ſurſolida, aut ullius certi gradus, ſed omnem æquationem Algebraicam tranſcendant. Eademque opera modum oſtendemus, quomodo ſine calculo demonſtrari poſſit, lineam quadratricem Algebraicam circuli, & hyperbolæ eſſe impoſſibilem. Si enim iſta daretur, ſequeretur ejus ope angulum, aut rationem ſive logarithmum ſecari poſſe in data ratione rectæ ad rectam, idque una generali conſtructione, & proinde problema ſectionis anguli vel inventionis quotcumque mediarum proportionalium foret certi gradus, cùm tamen pro alio numero partium anguli, aut mediarum proportionalium, alius atque alius gradus æquationis Algebraicæ requiratur, & ideo problema intellectum in genere de numero partium, aut mediarum quocumque, ſit gradus indefiniti, & omnem Algebraicam æquationem tranſcendat. Quoniam tamen nihilominus talia problemata revera in Geometria proponi poſſunt, imò inter primaria haberi debent, & determinata ſunt; ideo neceſſe utique eſt, eas quoque lineas recipi in Geometriam, per quales ſolas conſtrui poſſunt; & cùm ea exactè, continuoque motu deſcribi poſſint, ut de cycloide, & ſimilibus patet, revera cenſendas eſſe non Mechanicas, ſed Geometricas; præſertim cùm utilitate ſua lineas communis Geometriæ (ſi rectam circulumque exceperis) multis paraſangis poſt ſe relinquant, & maximi momenti proprietates habeant, quæ prorſus Geometricarum demonſtrationum ſunt capaces. *Non minor ergo* Carteſii *Geometria eas excludentis, quam veterum lapſus fuit,* qui loca ſolida, aut linearia tamquam minus Geometrica rejiciebant.

Quoniam etiam methodus inveſtigandi Tetragoniſmos indefinitos, aut eorum impoſſibilitates, apud me caſus tantùm ſpecialis eſt (& quidem facilior) problematis multo majoris, quod appello *Methodum Tangentium inverſam*, in quo maxima pars totius Geometriæ tranſcendentis continetur, & quod ſi Algebraice ſemper poſſet ſolvi, omnia reperta haberentur, & verò nihil adhuc de eo extare video ſatisfaciens, ideo oſtendam quomodo non minus abſolvi poſſit, quàm Tetragoniſmus ipſe indefinitus. Cùm igitur antea Algebraiſtæ aſſumerent literas, ſeu numeros generales pro quantitatibus quæſitis, ego in talibus problematibus transcendentibus aſſumſi æquationes generales, ſeu indefinitas pro lineis quæſitis, v. g. abſciſſa, & ordinata exiſtentibus x & y, æquatio pro linea quæſita mihi eſt, $0 = a + bx + cy + exy + fxx + gyy$ &c. ope hujus æqua-

æquationis indefinitè propoſitæ, revera finitæ (ſemper enim determinari poteſt, quouſque aſſurgi opus ſit) quæro lineæ tangentem, & quod invenio, id cum proprietate tangentium data conferens, reperio valorem literarum aſſumtitiarum, a, b, c, &c. atque adeo æquationem lineæ quæſitæ definio, ubi tamen interdum quædam manent arbitrariæ; quo caſu etiam innumeræ lineæ reperiri poſſunt, quæſito ſatisfacientes, quod in cauſa fuit, ut multi problema non ſatis definitum à poſteriori videntes, putarent, nec in poteſtate eſſe. Eadem per ſeries quoque præſtantur. Ad calculum autem contrahendum multa habeo, de quibus alias. Quod ſi comparatio non procedat, pronuntio lineam quæſitam non eſſe Algebraicam, ſed tranſcendentem.

Quo poſito ut ipſam *Tranſcendentiæ ſpeciem* reperiam (aliæ enim transcendentes pendent à ſectione generali rationis, ſeu à Logarithmis, aliæ à ſectione generali anguli, ſeu ab arcubus circuli, aliæ ab aliis indefinitis quæſtionibus magis compoſitis) ideo præter literas x & y aſſumo adhuc tertiam ut v, quæ tranſcendentem quantitatem ſignificat, & ex his tribus formo æquationem generalem ad lineam quæſitam, ex qua lineæ tangentem quæro, ſecundùm meam methodum tangentium in Actis Octobr. 1684. publicatam, quæ nec tranſcendentes moratur. Deinde id quod invenio comparans cum data proprietate tangentium curvæ reperio non tantùm literas aſſumtitias a, b, c, &c. ſed & ſpecialem tranſcendentis naturam. Quamquam autem aliquando fieri poſſit, ut plures adhibendæ ſint tranſcendentes, naturæ quandoque inter ſe diverſæ, & dentur tranſcendentes tranſcendentium, & omnino talia procedant in infinitum, tamen facilioribus, & utilioribus contenti eſſe poſſumus; & plerumque peculiaribus artificiis uti licet ad calculum contrahendum, problemaque, quoad licet, ad terminos ſimplices revocandum, quæ non ſunt hujus loci. Hac autem methodo ad Tetragoniſmos applicata, ſeu ad inventionem linearum quadratricium (in quibus utique ſemper tangentium proprietas data eſt) patet non tantùm, quomodo inveniatur, an quadratura indefinita ſit Algebraicè impoſſibilis, ſed & quomodo impoſſibilitate hac deprehenſa reperiri poſſit quadratrix tranſcendens, quod hactenus traditum non fuit. Adeo ut videar non vanè aſſeruiſſe, Geometriam hac methodo ultra terminos à *Vieta*, & *Carteſio* poſitos in immenſum promoveri. Cùm hac ratione Analyſis certa & generalis ad ea porrigatur problemata, quæ nullius ſunt certi gradûs, atque adeo Algebraicis æquationibus non comprehenduntur.

Porrò quoniam ad problemata tranſcendentia, ubicunque dimenſiones, tangenteſque occurrunt, calculo tractanda, vix quicquam utilius, brevius, univerſalius fingi poteſt *calculo* meo *differentiali* ſeu *analyſi indiviſibilium, atque infinitorum*, cujus exiguum tantùm velut ſpecimen, ſive corollarium continetur in methodo illa mea Tangentium in Actis Octobr. 1684.

1684. edita, & Dn. *Craigio* tantopere probata; & ipſe Dn. *Craigius* ſuſpicatus eſt aliquid altius in ea latere, ac proinde pag. 29. ſui libelli inde derivare conatus eſt theorema Barrovianum (quod ſumma intervallorum, inter ordinatas, & curvæ perpendiculares in axe ſumtorum, & ad axem applicatorum, æquetur ſemiquadrato ordinatæ ultimæ) in cujus executione tamen nonnihil a ſcopo deflexit, quod in nova methodo non miror, ideo gratiſſimum ipſi, aliiſque fore arbitror, *ſi hoc loco aditum rei, cujus tam latè patet utilitas, patefecero.* Nam inde omnia hujuſmodi theoremata, ac problemata, quæ admirationi meritò fuere, ea facilitate fluunt, ut jam non magis ea diſci, tenerique neceſſe ſit, quàm plurima vulgaris Geometriæ theoremata illi ediſcenda ſunt, qui ſpecioſam tenet. Sic ergo in caſu prædicto procedo. Sit ordinata x, abſciſſa y, intervallum inter perpendicularem, & ordinatam, quod dixi ſit p, patet ſtatim methodo mea fore $p\,dy = x\,dx$, quod & Dn. *Craigius* ex ea obſervavit; qua æquatione differentiali verſa in ſummatricem, fit $\int p\,d\,y = \int x\,d\,x$. Sed ex iis, quæ in methodo tangentium expoſui, patet eſſe $d, \frac{1}{2}xx = x\,dx$; ergo contra $\frac{1}{2}xx = \int x\,dx$ (ut enim poteſtates, & radices in vulgaribus calculis, ſic nobis ſummæ, & differentiæ ſeu ſ & d, reciprocæ ſunt.) Habemus ergo $\int p\,dy = \frac{1}{2}xx$. Quod erat dem. Malo autem dx & ſimilia adhibere, quàm literas pro illis, quia iſtud dx eſt modificatio quædam ipſius x, & ita ope ejus fit, ut ſola quando id fieri opus eſt litera x cum ſuis ſcilicet poteſtatibus, & differentialibus calculum ingrediatur, & relationes transcendentes inter x & aliud exprimantur. Qua ratione etiam lineas transcendentes æquatione explicare licet, verbi grat. Sit arcus a, ſinus verſus x, fiet $a = \int dx : \sqrt{2x - xx}$, & ſi cycloidis ordinata ſit y, fiet: $y = \sqrt{2x - xx} + \int dx : \sqrt{2x - xx}$, quæ æquatio perfectè exprimit relationem inter ordinatam y, & abſciſſam x, & ex ea omnes cycloidis proprietates demonſtrari poſſunt; promotuſque eſt hoc modo calculus analyticus ad eas lineas, quæ non aliam magis ob cauſam hactenus excluſæ ſunt, quàm quòd ejus incapaces crederentur: interpolationes quoque Walliſianæ, & alia innumera hinc derivantur.

Quod ſupereſt, ne nimium mihi adſcribere, aut detrahere aliis videar, paucis dicam quid potiſſimum inſignibus noſtri ſæculi Mathematicis in hoc Geometriæ genere mea ſententia debeatur. Primi *Galilæus* & *Cavallerius* involutiſſimas *Cononis* & *Archimedis* artes detegere cœperunt. Sed Geometria indiviſibilium Cavalleriana, ſcientiæ renaſcentis non niſi infantia fuit. Majora ſubſidia attulerunt triumviri celebres, *Fermatius* inventa methodo de maximis & minimis, *Carteſius* oſtenſa ratione lineas Geometriæ communis (tranſcendentes enim excluſit) exprimendi per æquationes, & P. *Gregorius à S. Vincentio* multis præclaris inventis. Quibus egregiam *Guldini* regulam de motu centri gravitatis addo. Sed & hi intra certos

certos limites conſtitere, quos tranſgreſſi ſunt novo aditu aperto, *Hugenius*, & *Walliſius*, Geometræ inclyti. Satis enim probabile eſt, Hugeniana *Heuratio*, Walliſiana *Neilio*, & *Wrennio*, qui primi curvis æquales rectas demonſtravere, pulcherrimorum inventorum occaſionem dediſſe. Quod tamen meritiſſimæ laudi inventionum nil detrahit. Secuti hos ſunt *Jacobus Gregorius* Scotus, & *Iſaacus Barrovius* Anglus, qui præclaris in hoc genere theorematibus ſcientiam mirè locupletarunt. Interea *Nicolaus Mercator*, Holſatus, Mathematicus & ipſe præſtantiſſimus, primus, quod ſciam, quadraturam aliquam dedit per ſeriem infinitam. At idem inventum non ſuo tantùm Marte aſſecutus eſt, ſed & univerſali quadam ratione abſolvit profundiſſimi ingenii Geometra, *Iſaacus Newtonus*, qui ſi ſua cogitata ederet, quæ illum adhuc premere intelligo, haud dubie nobis novos aditus ad magna ſcientiæ incrementa, compendiaque aperiret.

Mihi contigit adhuc tironi in his ſtudiis, ut ex uno aſpectu cujuſdam demonſtrationis de magnitudine ſuperficiei ſphæricæ, ſubitò magna lux oboriretur. Videbam enim generaliter figuram factam ex perpendicularibus ad curvam, axi ordinatim applicatis (in circulo radiis) eſſe proportionalem ſuperficiei ipſius ſolidi, rotatione figuræ circa axem geniti. Quo primo theoremate (cum aliis tale quid innotuiſſe ignorarem) mirificè delectatus, ſtatim comminiſcebar triangulum, quod in omni curva vocabam characteriſticum, cujus latera eſſent indiviſibilia (vel accuratius loquendo infinitè parva) ſeu quantitates differentiales; unde ſtatim innumera theoremata nullo negotio condebam, quorum partem poſtea apud *Gregorios*, & *Barrovium* deprehendi. Nec dum vero Algebraico calculo utebar, quem cùm adjeciſſem, mox quadraturam meam Arithmeticam, aliaque multa inveni. Sed neſcio quomodo non ſatisfaciebat mihi calculus Algebraicus in hoc negotio, multaque quæ analyſi voluiſſem, præſtare adhuc cogebar figurarum ambagibus, donec tandem verum Algebræ ſupplementum pro tranſcendentibus inveni, ſcilicet meum calculum indefinitè parvorum, quem & differentialem, aut ſummatorium, aut tetragoniſticum, & ni fallor, ſatis aptè *analyſim indiviſibilium*, *& infinitorum* voco, quo ſemel detecto, jam ludus jocuſque viſum eſt quicquid in hoc genere ipſe antea fueram admiratus. Unde non tantùm inſignia compendia, ſed & methodum generaliſſimam paulo ante expoſitam condere licuit, qua ſive quadratrices, ſive aliæ quæſitæ lineæ Algebraicæ, vel tranſcendentes, prout poſſibile eſt, determinantur. Antequam finiam, illud adhuc admoneo, ne quis in æquationibus differentialibus, qualis paulo ante erat $a = \int dx : \sqrt{1 - xx}$ ipſam dx temerè negligat, quia in caſu illo, quo ipſæ x uniformiter creſcentes aſſumuntur, negligi poteſt: nam in hoc ipſo peccarunt plerique, & ſibi viam ad ulteriora præcluſere, quod indiviſibilibus iſtiuſmodi, velut dx, univerſalitatem ſuam (ut ſcilicet pro-

greſſio ipſarum x aſſumi poſſet qualiſcunque) non reliquerunt; cùm tamen ex hoc uno innumerabiles figurarum transfigurationes, & æquipollentiæ oriantur.

Scriptiuncula hac jam abſoluta, venere in manus meas, quæ Dn. *D.T.* in Martio hujus anni Actorum pag. 176. communicavit. Ubi nonnullas quæſtiones elegantes propoſuit, & ſolvi dignas. Video autem lineam ACI (*fig. VIII.* ibi) eſſe quamdam ex lineis ſinuum, ſemperque rectangulum AH in GD eſſe æquale ſpatio ABCA. Et in *fig. IX.* ſi quadratum BC in BD ſeu X ſemper æquale debeat eſſe dato cubo ab a, ſatisfacere paraboloeidem, cujus æquatio eſt $4a^3yy = 25X^5$. Similiter rem determinare licet pro aliis potentiis. Sin AD, DB, BC = cubo dato, res redit ad quadratricem figuræ, cujus ordinatæ valor eſt aX^3 diviſ. per $\sqrt{a^6 - X^6}$. in genere autem data relatione quacunque inter rectas AB, BC, CD, AD, DB in dicta *fig. IX.* invenire lineam, problema eſt, quod coincidit cum inventione quadraturarum. Sed ſi in recta AC aſſumatur punctum fixum L, novæ oriuntur alterius naturæ relationes, ut ſi data ſit relatio inter LC, & CD, quod problema tamen itidem ſolutionem recipit.

N°. XX.

REPLIQUE DE M. G. G. LEIBNIZ

A M. l'Abbé *De Conti*, contenuë dans une Lettre écrite à l'Auteur des Nouvelles de la République des Lettres le 9. de Janvier 1687. touchant ce qu'a dit Mr. *Deſcartes* que Dieu conſerve toujours dans la nature la même quantité de mouvement. (a)

Tirée des Nouvelles de la Republ. des Lettres Février 1687.

AYant trouvé dans vos Nouvelles du mois de Septembre dernier mon objection contre le fameux principe Carteſien touchant la quantité de mouvement, avec la réponſe d'un ſavant Cartéſien de Paris nommé Mr. l'Abbé *Conti*, je vous envoye ma replique, afin que toutes les piéces du procès ſe trouvent enſemble ſi vous le jugez à propos. Il eſt vrai, que ceci n'eſt que pour éclaircir la matière, en pourſuivant plutôt qu'en

(a) Vid. N°. XVI. & XVII.

qu'en juſtifiant l'objection que j'ai donnée ; puiſque M. l'Abbé ne lui a rien oppoſé en effet, & m'accorde plus que je ne veux. Mais j'appréhende fort que les autres Cartéſiens ne le deſavouent. A ſon avis leur règle ſe reduit à bien peu de choſe, puiſqu'il veut que ce n'eſt *qu'un principe* particulier *touchant les cinq machines vulgaires*, *qui regarde les puiſſances Iſochrones ou mouvemens imprimés en tems égaux.* J'avois montré que dans un certain cas aſſez ordinaire & dans une infinité d'autres ſemblables, 2 corps ont une même force, quoiqu'ils n'ayent pas une même quantité de mouvement. Il l'accorde & je ne demande pas davantage. Mais il ajoute qu'il ne faut pas s'en étonner, parce que dans le cas propoſé les 2 corps ont acquis leurs forces en tems inégaux ; comme ſi ce principe ſe devoit borner à celles qui ont été acquiſes en tems égaux. C'eſt me donner cauſe gagnée, & même je ne demande pas tant. Mais j'aurois tort de vouloir profiter contre les Cartéſiens de ce qu'on les défend ainſi, car je ne crois pas que Mr. l'Abbé *Conti* en trouve jamais aucun, au moins de ceux qui paſſent pour Géomètres, qui approuve ſa reſtriction. Les Cartéſiens prétendent généralement, qu'il ſe garde la même force en ſomme, qu'ils eſtiment toujours par la quantité de mouvement, ou ſomme des produits des maſſes multipliées par leurs viteſſes. Par exemple, s'il y a un corps de 4 livres d'une viteſſe d'un degré, & qu'on ſuppoſe que toute ſa force doit maintenant être transférée ſur un corps d'une livre, n'eſt-il pas vrai que les Cartéſiens prononceront que dans cette ſuppoſition il faudra que ce corps reçoive une viteſſe de 4 degrés, afin que la même quantité de mouvement ſoit gardée ? car maſſe 4. multipliée par viteſſe 1 produit autant que maſſe 1 par viteſſe 4. Mais ſelon moi ce corps ne doit recevoir qu'une viteſſe comme 2. (comme je le prouverai ci après) de ſorte que l'oppoſition eſt aſſez manifeſte. Et en eſtimant ainſi les forces que les corps ont acquiſes, ni ces Meſſieurs ni aucuns autres, que je ſache, excepté Monſieur l'Abbé *Conti*, ne ſe mettent point en peine ſi elles ont été acquiſes dans un tems long ou court, égal ou inégal. En effet le tems ne ſert de rien à cette eſtime. Voyant un corps d'une grandeur donnée aller d'une viteſſe donnée, ne pourra-t-on point eſtimer ſa force ſans ſavoir en quel tems & par quels détours ou délais il a acquis cette viteſſe qu'il a ? Il me ſemble qu'on peut juger ici ſur l'état préſent ſans ſavoir le paſſé. Quand il y a 2 corps parfaitement égaux & ſemblables, & qui ont une même viteſſe, mais acquiſe dans l'un par un choc ſubit, dans l'autre par quelque deſcente d'une durée notable, dira-t-on que leurs forces ſont différentes ? Ce ſeroit comme ſi on diſoit qu'un homme eſt plus riche à qui l'argent a couté plus de tems à gagner. Mais qui plus eſt, il n'eſt pas même néceſſaire que les 2 corps, que j'avois propoſés, ayent parcouru leurs différentes hauteurs en tems inégaux, comme Mr. l'Abbé *Conti* le ſuppoſe,

ne s'étant point aperçu qu'on peut changer comme l'on veut le tems de la deſcente, ſelon qu'on change la ligne de la deſcente, en la rendant plus ou moins inclinée, & qu'on peut faire d'une infinité de façons que ces 2 corps deſcendent de leurs différentes hauteurs en tems égaux. Car en faiſant abſtraction de la reſiſtance de l'air & ſemblables empêchemens, on ſçait qu'un corps deſcendant d'une même hauteur acquiert une même viteſſe, ſoit que la deſcente ſoit perpendiculaire & promte, ou inclinée & plus lente. Et par conſéquent la diſtinction des tems ne fait rien à mon objection. Ces choſes ſont ſi viſibles, que j'aurois peut-être raiſon de rendre à Mr. l'Abbé *Conti* quelques expreſſions dont il ſe ſert, mais je tiens qu'il eſt plus convenable de ne s'y point amuſer. En effet je crois que mon objection étant ſi ſimple, cela même a ſervi à l'abuſer, ne lui paroiſſant pas croyable, qu'une remarque ſi aiſée auroit pu échaper à tant d'habiles gens. C'eſt pourquoi ayant obſervé la différence des tems, il s'y eſt jetté, ſans ſe donner le loiſir de conſidérer qu'elle n'eſt qu'accidentelle. Maintenant j'ai aſſez bonne opinion de ſon eſprit & de ſa ſincérité, pour eſpérer qu'il en conviendra lui-même, & je crois que ce qui ſuit ſervira encore mieux à lui faire reconnoitre ce qui en eſt. Afin auſſi de prévenir le doute de ceux qui penſeroient ſatisfaire à mon objection, en diſant que la matiére inſenſible, qui preſſe les corps peſans de deſcendre & fait leur accélération, a perdu juſtement la quantité de mouvement qu'elle donne à ces corps; je réponds que je demeure d'accord de cette preſſion qui eſt cauſe de la peſanteur, & je crois que cet Ether perd autant de force (mais non pas autant de mouvement) qu'il en donne aux corps peſans; mais que tout cela ne fait rien à réſoudre mon objection, quand j'accorderois même (contre la vérité) que l'Ether a perdu autant de mouvement qu'il en a donné. Car mon objection eſt formée exprès de telle ſorte, qu'il n'importe point comment la force a été acquiſe, dont je fais abſtraction pour ne pas entrer en diſpute ſur aucune hypothèſe. Je prends la force & la viteſſe acquiſe telle qu'elle eſt, ſans me mettre en peine maintenant ſi elle a été donnée tout d'un coup par un choc ſubit d'un autre corps, ou peu à peu par une accélération continuelle de la peſanteur ou d'un reſſort. Il me ſuffit que le corps a maintenant cette force ou bien cette viteſſe. Et là deſſus je fais voir que ſa force ne doit pas être eſtimée par la viteſſe ou quantité de mouvement, & que ce corps peut donner ſa force à un autre ſans lui donner ſa quantité de mouvement, & qu'ainſi ce tranſport ſe faiſant, il ſe peut & même ſe doit faire que la quantité de mouvement ſoit diminuée ou augmentée dans les corps, pendant que la même force demeure.

Je prouverai donc maintenant ce que j'avois avancé ci-deſſus, ſavoir *qu'en cas qu'on ſuppoſe que toute la force d'un corps de* 4 *livres*, *dont la viteſſe* (qu'il a par exemple allant dans un plan horizontal de quelque maniére

niére qu'il l'ait acquiſe) *eſt d'un degré, doit être donnée à un corps d'une livre, celui-ci recevra non pas une viteſſe de 4 degrés ſuivant le principe Cartéſien, mais de 2 degrés ſeulement*, parce qu'ainſi les corps ou poids ſeront en raiſon réciproque des hauteurs auxquelles ils peuvent monter en vertu des viteſſes qu'ils ont, or ces hauteurs ſont comme les quarrés des viteſſes. Et ſi le corps de 4. livres avec ſa viteſſe d'un degré, qu'il a dans un plan horizontal, allant s'engager par rencontre au bout d'un pendule ou fil perpendiculaire, monte à une hauteur d'un pied; celui d'une livre aura une viteſſe de 2 degrés, afin de pouvoir (en cas d'un pareil engagement) monter juſqu'à 4 pieds. Car il faut la même force pour élever 4 livres à un pied, & une livre à 4 pieds. Mais ſi ce corps d'une livre devoit recevoir 4 degrés de viteſſe, ſuivant *Deſcartes*, il pourroit monter à la hauteur de 16 pieds. Et par conſéquent la même force qui pouvoit élever 4 livres à un pied transférée ſur une livre, la pourroit élever à 16 pieds. Ce qui eſt impoſſible, car l'effet eſt quadruple, ainſi on auroit gagné & tiré de rien le triple de la force qu'il y avoit auparavant. C'eſt pourquoi je crois qu'au lieu du principe Cartéſien, on pourroit établir une autre *Loi de la nature* que je tiens la plus univerſelle & la plus inviolable, ſavoir, *qu'il y a toujours une parfaite équation entre la cauſe pleine & l'effet entier*. Elle ne dit pas ſeulement que les effets ſont proportionnels aux cauſes, mais de plus que chaque effet entier eſt équivalent à ſa cauſe. Et quoique cet axiome ſoit tout-à-fait Métaphyſique, il ne laiſſe pas d'être des plus utiles qu'on puiſſe employer en Phyſique, & il donne moyen de reduire les forces à un calcul de Géométrie. Mais pour faire mieux voir comment il s'en faut ſervir, & pourquoi *Deſcartes* & d'autres s'en ſont éloignés, conſidérons la troiſiéme régle du mouvement pour ſervir d'exemple, & ſuppoſons que deux corps *B* & *C*, chacun d'une livre, aillent l'un contre l'autre, *B* avec une viteſſe de 100 degrés, & *C* avec une viteſſe d'un degré. Toute leur quantité de mouvement ſera 101. Mais ſi *C* avec ſa viteſſe peut monter à un pouce de hauteur, *B* pourra monter avec la ſienne à 10000 pouces, ainſi la force de tous les deux ſera d'élever une livre à 10001 pouces. Or ſuivant cette *troiſiéme régle Cartéſienne*, après le choc ils iront enſemble de compagnie avec une viteſſe comme 50 & demi, afin qu'en la multipliant par 2 (nombre des livres qui vont enſemble après le choc) il revienne la premiére quantité de mouvement 101. Mais ainſi ces 2 livres ne ſe pourront élever enſemble qu'à une hauteur de 2550 pouces & un quart, (qui eſt le quarré de 50 & demi) ce qui vaut autant que s'ils avoient la force d'élever une livre à 5100 & demi, au lieu qu'avant le choc il y avoit la force d'élever une livre à 10001 pouces. Ainſi preſque la moitié de la force ſera perdue en vertu de cette règle ſans aucune raiſon, & ſans être employée à rien. Ce qui eſt auſſi peu poſſible, que ce

que nous avons montré auparavant dans un autre cas, où en vertu du même principe Cartéſien général, on pourroit gagner le triple de la force ſans aucune raiſon.

Le célébre auteur *de la Recherche de la vérité* a bien vu quelques erreurs de Mr. *Deſcartes* en ces matiéres, mais comme il préſuppoſoit la maxime que je refute, il a cru que des 7 régles Cartéſiennes la 1, 2, 3, & 5 étoient véritables, au lieu que la ſeule 1 qui eſt manifeſte d'elle-même, eſt ſoutenable. Le même auteur de la Recherche raiſonnant dans la ſuppoſition des corps durs ſans reſſort, veut qu'ils ne doivent réjaillir ni ſe ſéparer l'un de l'autre, après le choc, que lorſqu'ils vont l'un contre l'autre avec des viteſſes réciproques à leurs grandeurs, & qu'en tous les autres cas ils iront de compagnie après le choc, en gardant la premiére quantité de mouvement. Mais voici une grande difficulté que j'y trouve. Soit corps *B* 2. viteſſe 1, & corps *C* 1. viteſſe 2. qui vont directement l'un contre l'autre, il accorde qu'ils rejailliront avec les viteſſes qu'ils avoient. Mais ſi on ſuppoſe la viteſſe ou grandeur de l'un des corps, comme *B*, tant ſoit peu augmentée, il veut qu'ils aillent tous deux enſemble du côté où *B* ſeul alloit auparavant, ce qui ſera à peu près avec une viteſſe comme 4 tiers, ſuppoſé le changement fait à l'égard de *B* ſi petit, qu'en calculant la quantité de mouvement, on puiſſe retenir les premiers nombres ſans erreur conſidérable. Mais eſt-il croyable que pour un changement auſſi petit que l'on voudra, fait dans la ſuppoſition à l'égard du corps *B*, il en reſulte une ſi grande différence dans l'événement, en ſorte que tout le rejailliſſement ceſſe, & que *B* qui devoit auparavant retourner en arriére avec une viteſſe 1, maintenant, pour avoir tant ſoit peu plus de force, doive non-ſeulement ne pas aller en arriére, mais aller même en avant avec une viteſſe preſque comme 4 tiers. Ce qui eſt d'autant plus étrange, qu'avant le choc il n'alloit en avant qu'avec une viteſſe à peu près comme 1. Ainſi le corps contraire au lieu de faire reculer, ou moins avancer celui-ci par un choc oppoſé, le feroit avancer davantage, & l'attireroit quaſi à ſoi, ce qui eſt hors de toute apparence. Comme c'eſt l'auteur de la *Recherche de la vérité* à qui nous ſommes redevables de la correction de quelques préjugés Cartéſiens aſſez conſidérables, tant ailleurs que ſur cette matiére, il m'a paru à propos de faire connoitre ici ce qui reſtoit encore à dire. Et m'aſſûrant qu'il n'a pas moins d'honnêteté que de pénétration, bien loin de craindre qu'il le puiſſe trouver mauvais, je m'attends à ſon approbation.

Cependant je crois que Mr. *Deſcartes*, qui a oublié dans ſes régles de marquer les cas quand 2 corps inégaux vont l'un contre l'autre avec des viteſſes inégales, auroit été obligé en ce même cas précédent de dire la même choſe que l'auteur de la Recherche, autant que je puis juger par la 3[e] régle, dans laquelle ils conviennent tous deux. Mais il s'y trouvera encore

encore l'inégalité de l'effet & de la cauſe, comme il ſeroit aiſé de montrer par le calcul à l'exemple de la 3ᵉ régle ; cette inégalité ſe trouve auſſi en ce que dit l'auteur de la Recherche pour corriger la 4ᵉ, 6ᵉ ou 7ᵉ régle de M. *Deſcartes.* Par exemble *à l'égard de la* 6ᵉ. ſoit *B* 1 livre, viteſſe 4. *C* 1. livre & en repos. Il veut qu'ils aillent de compagnie après le choc avec une viteſſe 2. Donc au lieu qu'auparavant il y avoit une force capable d'élever une livre à 16 pieds, il n'y aura maintenant qu'une force capable d'élever 2 livres à 4 pieds, & la moitié de la force ſeroit perdue ſelon M. *Deſcartes*, en ce cas *B* & *C* iront d'un même côté, & la viteſſe de *B* ſera 3. de *C*, 1. donc en tout il y aura une force capable d'élever une livre à 10 pieds, & plus que le tiers de la force ſera perdu.

Ce qui peut avoir ſéduit des auteurs ſi excellens, & qui a le plus embrouillé cette matiére, eſt qu'on a vu que des corps dont les viteſſes ſont réciproques aux étendues, s'arrêtent l'un l'autre, ſoit dans une balance, ſoit hors d'une balance. C'eſt pourquoi on a cru que leurs forces étoient égales, *d'autant plus qu'on ne remarquoit rien dans les corps que la viteſſe & l'étendue.* Mais c'eſt ici qu'on auroit pu employer utilement la diſtinction qu'il y a entre la force & la direction, ou plutôt entre la force abſolue qu'il faut pour faire quelque effet ſubſiſtant, (par exemple pour élever un tel poids à une telle hauteur, ou pour bander un tel reſſort à un tel degré,) & entre la force d'avancer d'un certain côté, ou de conſerver ſa direction. Car quoiqu'un corps 2. avec une viteſſe 1. & un corps 1. avec une viteſſe 2. s'arrêtent ou s'empêchent mutuellement d'avancer, néanmoins ſi le 1. peut élever une livre à 2 pieds de hauteur, le 2 pourra élever 1 livre à 4 pieds de hauteur. Ce qui eſt paradoxe, mais indubitable, après ce que nous venons de dire. On pourroit cependant donner quelque interprétation nouvelle au principe de la quantité de mouvement, & après cette correction il demeureroit univerſel, mais il n'eſt pas aiſé de s'en aviſer.

J'ajouterai une remarque de conſéquence pour la Métaphyſique. J'ai montré que la force ne ſe doit pas eſtimer par la compoſition de la viteſſe & de la grandeur, mais par l'effet futur. Cependant il ſemble que la force ou puiſſance eſt quelque choſe de réel dès à préſent, & l'effet futur ne l'eſt pas. D'où il s'enſuit, *qu'il faudra admettre dans les corps quelque choſe de différent de la grandeur & de la viteſſe, à moins qu'on veuille réfuſer aux corps toute la puiſſance d'agir.* Je crois d'ailleurs que nous ne concevons pas encore parfaitement la matiére & l'étendue même. L'Auteur de la Recherche de la Vérité a reconnu cette obſcurité à l'égard de l'ame & de la penſée, contre le ſentiment commun des Cartéſiens, mais quant à la matiére & l'étendue il paroit convenir avec eux. Cependant il y a une marque pour reconnoitre ſi une choſe eſt ſuffiſamment connue, que

que j'ai donnée dans un petit eſſai touchant l'abus des idées & de la connoiſſance prétendue claire & diſtincte, je m'y rapporte maintenant, auſſibien qu'à ce que j'ai dit par ci par là, touchant l'imperfection de la Géométrie & de l'Analyſe de M. *Deſcartes.* De quoi je fais mention ici afin qu'on ne croye pas que c'eſt légérement, & ſans quelque connoiſſance de cauſe que j'ai ſouhaité qu'on ne ſe contente pas de paraphraſer M. *Deſcartes*, & que ceux qui ſuivent ce fameux auteur (dont j'admire les travaux comme ils le méritent) veuillent repaſſer ſur pluſieurs endroits de ſes ouvrages pour les confronter avec la raiſon & la nature; d'autant plus qu'un de ſes plus célébres arrêts, & qui paroiſſoit le mieux établi, vient d'être caſſé tout préſentement. Je ſuis aſſuré que les perſonnes véritablement habiles parmi ceux qu'on appelle Cartéſiens ne ſe fâcheront pas de ces remarques, & je tiens qu'il y en a tel qui pourroit donner quelque choſe d'auſſi beau, que ce que *Deſcartes* a donné lui-même, par exemple ſur le ſel, ou ſur l'arc-en-Ciel. Il n'y a peut-être que le trop grand attachement aux ſentimens du Maitre, qui les en empêche. L'eſprit de ſecte eſt naturellemeut contraire aux progrès: pour avancer il faut prendre les choſes d'un nouveau biais, ce qui n'eſt pas aiſé, quand on a l'eſprit trop occupé des penſées d'emprunt, que l'autorité a fait recevoir bien plus que la raiſon. Je ſuis &c.

N°. XXI.

REPONSE DE M. G. G. LEIBNIZ

A la Remarque de M. l'Abbé de *Conti*, contenue dans l'art. 1. des Nouvelles de la République des Lettres du mois de Juin 1687. où il prétend ſoutenir une Loi de la Nature avancée par M. *Deſcartes.*

Tirée des Nouvelles de la République des Lettres de la même année.

NOus aurions encore battu bien du pays, ſi M. l'Abbé de *Conti* n'avoit découvert nettement dans ſa Remarque, qu'il n'a pas encore pris mon ſens. Je ne comprends pas ſur quel fondement il m'attribue une opinion, à laquelle je n'ai jamais penſé. Car il met en avant trois propoſitions, & dit enſuite, *p.* 580. *qu'il ne ſçauroit convenir avec moi de la contradiction que j'y trouve.* Et moi bien loin d'y en trouver aucune, je les ai employées moi-même pour démontrer l'erreur du principe Cartéſien.

Cartéſien. Ainſi preſque tout ce qu'il dit enſuite, ne devant ſervir qu'à expliquer & à ſoutenir ces propoſitions, ne me touche point. Si ces meſentendus arrivent dans une diſpute, qui eſt preſque de pure Mathématique, que ne doit-on point attendre en Morale, & en Métaphyſique? Cela m'oblige de prier M. l'Abbé, ou tout autre qui eſpérera de pouvoir ſoûtenir le principe des Cartéſiens, de répondre nettement & de point en point, à ce que j'avois déja avancé d'abord, & que je mettrai ici par Articles. Autrement ce ſeroit vouloir nous amuſer par des détours.

1. Je demande, s'il n'eſt pas vrai que ſelon M. *Deſcartes* un corps de quatre livres, dont la viteſſe eſt ſimple, a autant de force qu'un corps d'une livre dont la viteſſe eſt quadruple? Tellement que ſi toute la force d'un corps de quatre livres, doit être transférée ſur un corps d'une livre, il doit recevoir le quadruple de la viteſſe du premier, ſuivant le principe de la quantité de mouvement, ſur lequel roulent les Régles de M. *Deſcartes.*

2. Je demande encore, s'il n'eſt pas vrai que le premier, avec un degré de viteſſe, pouvant élever quatre livres (qui eſt ſon poids) à un pied, ou (ce qui eſt équivalent) une livre à quatre pieds; le ſecond, avec quatre degrés de viteſſe, pourra élever une livre (qui eſt ſon poids) à ſeize pieds; ſuivant les démonſtrations de *Galilei* & autres? Car les corps peuvent monter à des hauteurs qui ſont comme les quarrés des viteſſes qu'ils ont avant que de monter.

3. Et qu'ainſi il ſuit de l'opinion de M. *Deſcartes*, que d'une force qui pouvoit élever 4 livres à 1. pied, ou 1. livre à 4 pieds, on pourra faire *par la translation*, une force capable d'élever 1. livre à 16. pieds, qui eſt le quadruple; & le ſurplus qu'on aura gagné, qui eſt le triple de la premiére force, ſera tiré de rien. Ce qui eſt une abſurdité manifeſte.

4. Mais, ſelon moi, & ſelon la vérité, toute la force d'un corps de 4. livres, dont la viteſſe eſt d'un degré, devant être transférée ſur un corps d'une livre, lui donneroit une viteſſe de 2. degrés ſeulement, afin que ſi le premier pouvoit élever ſon poids de 4. livres à un pied, le ſecond puiſſe élever le ſien d'une livre à la hauteur de 4. pieds. Ainſi *il ne ſe garde pas la même quantité de mouvement*, *mais il ſe garde la même quantité de force*, qui ſe doit eſtimer par l'effet qu'elle peut produire.

Il eſt aſſez ſurprenant de voir qu'on n'ait pas encore voulu répondre nettement à des choſes ſi préciſes & ſi aiſées, & qu'au lieu de cela, on m'ait imputé des ſentimens que je n'ai point. Cependant, *ce ſeroit une choſe peu conforme à la reputation*, *dont Meſſieurs les Cartéſiens ſe piquent*, *de raiſonner diſtinctement*, *s'ils le faiſoient ſi peu connoitre*, *lorſqu'il s'agit de ſoutenir un de leurs plus fameux principes.* Ne diroit-on pas, que ne pouvant défendre l'erreur de leur Maître, ils ont au moins tâché de la déguiſer?

guiſer ? Et que deviendroient donc ces belles proteſtations de l'amour de la vérité, & qu'on ne prétend ſuivre *Deſcartes*, qu'autant qu'il s'accorde avec la Raiſon ? Mais je m'attends à quelque choſe de mieux.

J'ajouterai ſeulement, comme hors d'œuvre, que j'accorde à M. l'Abbé qu'on peut eſtimer la force par le tems, mais c'eſt avec précaution. Par exemple on connoit la force acquiſe, par le tems que le corps peſant a mis à l'acquérir en deſcendant, pourvû qu'on ſache la ligne de la deſcente; car ſelon qu'elle eſt plus ou moins inclinée le tems changera : au lieu qu'il ſuffit de ſavoir la hauteur pour juger de la force que le corps a acquiſe en deſcendant de cette hauteur. Or cette variété de tems m'a fait penſer à un fort joli *probléme* que je viens de réſoudre préſentement, & que je veux marquer ici, afin que notre diſpute donne quelque occaſion à l'avancement de la ſcience : *Trouver une ligne de deſcente dans laquelle le corps peſant deſcende uniformément, & approche également de l'horiſon en tems égaux.* L'Analyſe de Meſſieurs les Cartéſiens le donnera peut-être aiſément.

N°. XXII.

DE LINEIS OPTICIS,

ET ALIA;

Excerpta ex Actis Erudit. Lipſ. ann. 1689.

VErſanti mihi dudum in longinquo ſatis itinere, quod Sereniſſimi Principis mei juſſu ſuſcepi, & paſſim monumenta in Archiviis, & Bibliothecis excutienti, oblati ſunt ab amico quodam Actorum Lipſienſium menſes, unde jamdiu novorum librorum expers diſcerem, quid in Republica Literaria ageretur. Inſpicienti igitur Junium anni 1688. occurrit relatio *de principiis naturæ Mathematicis* Viri Clariſſimi *Iſaaci Newtoni*, quam licèt a præſentibus meis cogitationibus longè ſemotam, avidè, & magna cum delectatione legi. Eſt enim vir ille ex paucorum illorum numero, qui ſcientiarum pomœria protulere. Quod vel ſolæ illæ ſeries docere poſſunt, quas *Nicolaus Mercator* Holſatus per diviſionem erat aſſecutus, ſed *Newtonus* longè ampliore invento extractionibus radicum purarum pariter, & affectarum accommodavit. A me, ut obiter hic dicam, methodo ſerierum promovendæ, præter transformationem irrationa-

rationalium linearum in rationales ſymmetras (voco autem rationales, quarum ordinatæ ſemper ex abſciſſis haberi poſſunt in numeris rationalibus) excogitata eſt ratio pro curvis tranſcendenter datis, ubi ne extractio quidem locum habet. Aſſumo enim ſeriem arbitrariam, eamque ex legibus problematis tractando, obtineo ejus coefficientes. Porrò a præſenti opere Newtoniano præclara quæque expecto, & ex relatione actorum video, cùm multa prorſus nova, magni ſanè momenti, tum quædam etiam ibi tradi, à me nonnihil tractata; nam præter motuum cœleſtium cauſas, etiam lineas catoptricas, vel dioptricas, & reſiſtentiam medii explicare aggreſſus eſt. *Lineas* illas *Opticas Carteſius* habuit, ſed celavit, nec ſuppleverunt commentatores; neque enim res communi analyſi ſubeſt. Eas poſtea ab *Hugenio* (ſed qui nondum edidit) & nunc a *Newtono* inventas intelligo. Etiam mihi, ſed per diverſam, ut arbitror, viam, innotuere. Et habebam quidem methodos generales dudum, ſed proprias perelegantes eruendi occaſionem dedit egregium inventum Dn. *Tſchirnhauſii* noſtri in Actis publicatum, qui integras lineas, tanquam focos conſiderat. Quid inde conſecutus ſim, exemplo explicabo, unde reliqua intelligantur. Sit punctum A & linea data BB, reflectens radios AB, quæritur linea CC, radios ABC iterum reflectens in unum commune punctum D. Solutio primæ aggreſſionis hæc eſt. Data linea BB, ejus reſpectu conſtat dari puncti A confocum linearem, ſeu lineam EE. Rurſus datis duobus confocis, uno lineari EE, altero puncto D, conſtat inveniri poſſe aliquam lineam CC, cujus ſunt foci, quæ erit quæſita. Meliores autem conſtructiones prodeunt, nam A 1 B + 1 B 1 E + arc. 1 E 2 E = A 2 B + 2 B 2 E, & D 2 C + 2 C 2 E + arc. 2 E 1 E = D 1 C + 1 C 1 E, unde tota AB + BC + CD ſemper eſt æqualis uni conſtanti rectæ. Si filum circumligatum ſit lineæ EE ſimulque alligatum puncto D, tunc evolutione curvæ EE, ſtylus filum intendens deſcribet lineam CC. Sin filum idem altero extremo alligatum ſit puncto A, ſtylus filum intendens deſcribet lineam BB. Sed diſſimulata curva EE, prodit *conſtructio ſimpliciſſima* talis: a data recta conſtante (æquali AB + BC + CD) detrahatur quævis data AB, reſiduæ ſumatur æqualis BF ita ducta, ut ad PB curvæ BB vel ejus tangenti perpendicularem in B, faciat angulum FBP, ipſi ABP æqualem. Jungatur DF, & ex puncto ipſius DF medio G normaliter educta GC occurret ipſi BF in quæſito puncto C; & quidem patet, GC eſſe lineæ CC tangentem. Rotetur porrò figura hæc circa axem AD, & quæ in lineis diximus, etiam in ſuperficiebus genitis locum habebunt. Eadem & dioptricis applicari poſſunt. Lineam EE voco *Acampton*, quæ radios ABE ſine reflexione, & refractione accipit. Dantur & *Aclaſtæ*, quæ eoſdem non refringunt, & tamen reflectunt, & ſunt illæ, quæ ipſius EE evolutione ſimplici deſcribuntur, quod primus licèt alio fine conſideravit *Hugenius*. Talis eſt

Tab. VII. Fig. 27.

FF poſita CF (in producta BC) = CD. Si pro A aut D punctis, aut alterutro, foci lineares darentur, aut punctum infinitè abeſſet, ubi radii fierent paralleli, eadem ſuo modo locum haberent.

Quæ de reſiſtentia medii peculiari ſcheda complexus ſum, jam pro magna parte Pariſiis duodecim abhinc annis eram aſſecutus, & illuſtri Academiæ Regiæ nonnulla ex illis communicavi. Denique cùm mihi quoque meditationes inciderint de cauſſa phyſica motuum cœleſtium, operæ pretium duxi peculiari ſchediaſmate nonnullas ex illis in publicum proferre. Decreveram quidem premere, donec mihi liceret leges Geometricas diligentiùs conferre cum phænomenis noviſſimis Aſtronomorum. Sed (præterquàm quòd alterius planè generis occupationibus diſtinguor, quæ vix quicquam tale ſperare patiuntur) excitavit me Newtonianum opus, ut hæc qualiacunque extare paterer, quo magis collatione rationum excuſſæ emicent ſcintillæ veritatis, & ingenioſiſſimi viri acumine adjuvemur.

N°. XXII.

N°. XXIII.

SCHEDIASMA
DE RESISTENTIA MEDII,
Et Motu projectorum gravium in medio reſiſtente.

Ex Actis Erudit. Lipſ. ann. 1689.

G*Alilæus*, cùm regulas motûs projectorum inveſtigavit, reſiſtentiam medii ſepoſuit; fecere idem *Torricellius*, & qui ſecuti ſunt: fatentur tamen aliqui defectum doctrinæ, atque hinc orientes in praxi errores. *Blondellus* quidem in libro de jactu bomborum putat, impunè poſſe negligi hanc conſiderationem, ſed argumenta ejus non ſufficiunt, nec experimenta affert in magno ſumta. Cæterùm difficilior eſt rei Geometrica inveſtigatio, quàm ut ab illis, doctiſſimis licèt viris, expectari facilè, & ſperari potuerit, nondum inventis tunc, aut certè non ſatis paſſim notis ſubſidiis. Et tamen leges projectorum veræ, & calculus experimentis conſentiens, magno in baliſtica, & pyrobolicis uſui futurus, hinc potiſſimum pendere videntur.

Ego jamdudum inclytæ Academiæ Scientiarum Regiæ Pariſinæ, cùm apud illos agerem, de hoc argumento ratiocinationes communicavi, & modum æſtimandi ex parte tradidi, ſpecieſque diſtinxi. Duplex igitur medii reſiſtentia eſt, una abſoluta, altera reſpectiva, quæ plerumque concurrere ſolent. *Abſoluta reſiſtentia* eſt, quæ tantumdem virium mobilis abſorbet, ſive id parva, ſive magna velocitate moveatur, dummodò moveatur, & pendet à medii glutinoſitate; perinde enim eſt, ac ſi partes filamentis motu mobilis perrumpendis, connexæ eſſent inter ſe. Eadem locum habet in *frictionibus* ſuperficierum aſperarum, in quibus mobilia decurrunt; nam obſtacula ſunt abradenda, vel ſaltem deprimenda, ad inſtar pilorum elaſticorum ſeſe poſtea rurſus erigentium; ad elaſtrum autem deprimendum, vel ad filum rumpendum, eadem ſemper vis impendenda eſt, nec refert quæ ſit agentis velocitas. *Reſiſtentia reſpectiva* oritur ex medii denſitate, & major eſt pro majori mobilis velocitate, eo ipſo

quòd partes medii agitandæ ſunt a penetrante, movere autem aliquid eſt vim impendere, & eo majorem, quo major communicatur motus medii partibus, hoc eſt, quo celerior eſt motus penetrantis. Et reſiſtentia fluidi quieſcentis, erga corpus incurrens, eſt æqualis vi fluidi incurrentis in corpus quieſcens, quæ major eſt, cùm celerior eſt motus fluidi, ut videmus corpora vento & aqua moveri, imò jactu aquæ ſatis impetuoſo gravia ſuſtineri; licèt hìc quoque ſeſe abſoluta reſiſtentia immiſceat, a qua tamen abſtrahendus eſt animus, cùm reſpectivam æſtimamus, quaſi nulla eſſet medii tenacitas. Hoc quoque intereſt inter duas reſiſtentiarum ſpecies, quòd abſoluta habet quodammodo rationem ſuperficiei mobilis, ſive contactûs; reſpectiva verò ſoliditatis. Utrobique paradoxum occurrit, quod mobile penetrans in medium uniforme ubique reſiſtens, nunquam quidem ab eo redigetur ad quietem: a reſiſtentia tamen abſoluta corpus, quod vi ſemel concepta movetur, neque aliunde acceleratur, certum habet limitem ſpatii, ſive penetrationis in medium, ita ut ſemper ad ipſum recta accedat, nunquam tamen eo perveniat, quam voco penetrationem maximam excluſivam, ſeu maximam quæ non; a reſiſtentia verò reſpectiva corpus uniformiter acceleratum (ut grave deſcendens) habet certum limitem velocitatis, ſeu maximam velocitatem excluſivam, ad quam ſemper accedit, (ut poſtremò differentia ſit inſenſibilis) ita tamen ut eam nunquam perfectè attingat. Et hæc velocitas eſt illa ipſa, qua motum fluidum (ad inſtar jactûs aquæ) poſſet grave ſuſtinere, ne deſcendere incipiat. Utriuſque motûs leges primarias hìc exponemus, quantum iſta brevitas patitur, nam cuncta diſtinctè tradere res integri tractatûs foret.

DE RESISTENTIA ABSOLUTA.

Artic. I.

Si motus mobilis ſit per ſe uniformis & a medio æqualiter ſecundùm ſpatia retardatus.

(1) Decrementa virium ſunt proportionalia incrementis ſpatiorum (quæ eſt *hypotheſis* caſus præſentis.)

(2) Velocitates ſunt proportionales ſpatiis: perditæ, percurſis; reſiduæ, adhuc percurrendis. Ponantur incrementa ſpatii eſſe æqualia, erunt decrementa virium æqualia (per propoſit. 1.) jam ſi ejuſdem mobilis decrementa virium ſint æqualia, etiam decrementa velocitatum ſunt æqualia: (ſunt enim vires ut quadrata velocitatum, æqualibus autem exiſtentibus quadratis etiam æqualia ſunt latera) itaque elementa velocitatum amiſſarum ſunt ut elementa ſpatiorum percurſorum, reſiduarum, ut adhuc percurren-

currendorum. Ergo velocitates ſunt ut ſpatia. Nempe ſi in *fig.* 37. velocitas initio ſit AE, ſpatium integrum in medio percurrendum ſit recta AB, ejus pars jam percurſa AM, adhuc percurrenda MB; velocitas reſidua MC (vel AF) amiſſa FE, erit ECB, recta. Tab.VIII. Fig. 37.

(3) Si ſpatia reſidua (MB vel LT) ſint ut numeri, tempora inſumta (ML vel BT) erunt ut logarithmi, nam ſi elementa ſpatii ſint progreſſionis Geometricæ, erunt ſpatia reſidua ejuſdem progreſſionis Geometricæ, ergo (per 2.) etiam velocitates reſiduæ, ergo incrementa temporis ſunt æqualia, ergo tempora ipſa progreſſionis Arithmeticæ.

(4) Mobile M nunquam abſolvit ſpatium percurrendum integrum (AB) etſi ſemper accedat ad limitem (B) patet enim BT eſſe aſymptoton lineæ logarithmicæ AL, ſcilicet ipſius AB logarithmus hic eſt o, ipſius o logarithmus eſt infinitus, interim in praxi motus fit tandem inſenſibilis, ut & diſtantia a B, præterea nullibi datur medium perfectè uniforme.

(5) Si mobile moveatur motu compoſito ex uniformi, & æqualiter à medio ſecundùm ſpatia retardato, ſeu ſi mobile (M) feratur in regula rigida (AB) ſecundùm Hypotheſin præſentem (uti reverâ ſic ſatis contingit ob frictionem, ſi globus in regula rigida horizontali recta moveatur) ipſa verò interim regula (AB) ſibi parallela manens, uniformiter mota, uno extremo (B) incedat in aliqua recta (BT) deſcribet lineam logarithmicam (AL). *Generaliter* enim, ſi mobile feratur motu compoſito ex uniformi, & alterius legis, deſcribet lineam ordinatis ſuis, & abſciſſis relationem inter tempora & ſpatia dictæ legis exprimentem, quod eſt *memorabile theorema*: habemus etiam hinc modum Phyſicum *conſtruendi Logarithmos*, quos Geometria communis exactè conſtruere non poteſt.

Artic. II.

Si motus ſit a gravitate acceleratus, & a medio æquabiliter ſecundùm loca retardatus.

(1) Eſt hoc loco *hypotheſis prima* eadem cum hypotheſi unica præcedenti, nempe decrementa virium (id eſt hoc loco velocitatum) facta à reſiſtentia abſoluta, ſunt proportionalia incrementis ſpatiorum.

(2) Acceſſiones velocitatum a gravitate ſunt proportionales incrementis temporis, eſtque *hypotheſis altera* ex natura motûs gravium.

(3) Dantur rectæ proportionales temporibus inſumtis, a quarum unaquaque ſi detrahatur recta æqualis reſpondenti ſpatio percurſo a puncto mobili, reſidua recta erit proportionalis velocitati acquiſitæ; nam velocitates impreſſæ ſunt proportionales temporibus (per 2.) amiſſæ ſpatiis percurſis (per 1 hic, ad modum propoſit. 2. articuli præcedentis) ergo reſiduæ acquiſitæ differentiis. (4)

(4) Si velocitatum acquiſitarum complementa ad maximam ſint ut numeri, tempora inſumta erunt ut logarithmi. Nempe *retenta figura priore* ſit AB velocitas maxima (quam mox patebit eſſe talem excluſivè) AM acquiſita, BM vel TL adhuc acquirenda, ſeu complementum acquiſitæ, BT & ML tempus impenſum. Ex prop. 1. & 2. reperietur temporum BT incrementis ſumtis æqualibus, velocitatum AM incrementa eſſe ipſis BM proportionalia. Ergo ſi BT logarithmi, erunt BM numeri. (5) Hinc patet (ad modum propoſit. 4. Articuli præcedentis) ad velocitatem maximam AB nunquam perveniri, ſeu eſſe talem excluſivè.

Artic. III.

Si grave projiciatur in medio reſiſtentiam habente abſolutam.

Hoc eſt ſi feratur motu compoſito, ex motibus duorum articulorum
Tab.VIII. præcedentium. *In figura* 38. ponatur grave in A poſitum, conans deſcen-
Fig. 38. dere in AG, & parallelis, projici ex A directione AMB, angulo quocunque MAG, & deſcribere lineam AP; ſit AB via maxima excluſiva articuli primi, compleantur parallelogramma MAGP, BAGK.

(1) Recta horizonti perpendicularis (BK) per (B) limitem penetrationis (ſeu per punctum ad quod mobile motu per ſe uniformi, in medio uniformi, & abſolutè reſiſtente, in recta AM progrediens, penetrare non poteſt) eſt lineæ projectionis aſymptotos, ſeu lineæ duæ, videlicet recta BK, & curva AP, utcunque continuatæ ſibi quidem ſemper accedunt, ſeſe tamen nunquam attingunt, quia mobile ad partes B in AB & parallelis eodem modo tendit motu compoſito, ac ſi ſecundùm ſolius articuli primi leges ſine gravitate ferretur, nunquam ergo pervenit ad B, vel aliquod ei æquivalens punctum in recta BK utcunque producta.

(2) Linea projectionis non eſt ex numero conicarum; non utique parabola, circulus, aut ellipſis, hæ enim carent aſymptotis. Non hyperbola, neque enim hic ut in hyperbola per punctum aliquod in recta utrinque indefinita BK ſumtum, duci poteſt adhuc alia linea aſymptotos.

(3) Datur certa quædam *linea ſimplex* (hoc eſt paraboloeides, aut hyperboloeides) cujus abſciſſæ, ſi ſint proportionales ſpatiis (BM) reſiduis ad limitem penetrationis (AB) projectioni præſcriptum, ordinatæ ſunt proportionales velocitatibus adhuc deficientibus ad acquirendum limitem velocitatis deſcenſui præſcriptum: *Lineam ſimplicem* hìc intelligo, cujus ordinatæ ſunt in ratione quacunque multiplicata, aut ſubmultiplicata abſciſſarum. Itaque ſenſus eſt, velocitates deſcenſui adhuc deficientes, eſſe in ratione ſpatiorum adhuc limiti penetrationis deficientium, ſecundùm certum aliquem numerum conſtantem multiplicata. Hoc ex eo demonſtratur,

tur, quòd ambo poſſunt intelligi progreſſionis Geometricæ, ſi tempora inſumta ſint progreſſionis Arithmeticæ per art. 1. prop. 3. & art. 2. prop. 4. & utrobique numeri maximi logarithmus eſt 0, minimi infinitus, per art. 1. prop. 4. & art. 2. prop. 5. Cùm numerus rationem multiplicans eſt rationalis, oritur aliqua linea paraboloeides, aut hyperboloeides Geometriæ communis. Porrò hìc numerus quibuſdam experimentis inveniri poteſt.

(4) Inveniri poteſt *linea projectionis* AP, ſeu relatio inter coordinatas AG ſpatium deſcenſus, & AM ſpatium progreſſionis per ſe uniformis. Nam art. 2. propoſ. 3. datur relatio ſimplex inter tempus inſumtum, ſpatium deſcenſu percurſum AG, & velocitatem deſcenſu acquiſitam in G. In hac relatione pro tempore ſubſtituatur AM, ope relationis inter ipſa datæ artic. 1. propoſ. 3. reſtat ergo relatio inter AG & AM, quæ etſi ſit tranſcendens, tamen nihil aliud ſupponit quàm logarithmos.

Artic. IV.

De Reſiſtentia Medii reſpectiva, ſi motus per ſe uniformis a medio uniformi retardatur proportione velocitatis.

Quemadmodum fit conſideratâ tantùm medii denſitate, nullâ habitâ ratione tenacitatis.

(1) Diminutiones velocitatum ſunt in ratione compoſita velocitatum præſentium, & incrementorum ſpatii. Quæ eſt *hypotheſis* caſus præſentis.

(2) Si velocitates reſiduæ (ut MB ſeu LT *fig.* 37.) ſint ut numeri, ſpatia percurſa (BT ſeu ML) ſunt ut logarithmi. Eodem modo demonſtratur ut art. 1. prop. 3. ſi pro ſpatiis illic poſitis, ponas velocitates, & pro temporibus ſpatia.

(3) Si tempora inſumta, certâ quantitate conſtanti aucta, ſint ut numeri; ſpatia percurſa ſunt ut logarithmi. Nam ſpatii elementis exiſtentibus æqualibus, temporis elementa ſunt reciprocè ut velocitates, hoc eſt creſcunt progreſſione Geometrica (per præced.) ergo (ex quadratura logarithmicæ) tempora conſtanti quantitate aucta etiam ſunt progreſſionis Geometricæ.

(4) Hinc etiam tempora conſtanti quantitate aucta ſunt reciprocè ut velocitates reſiduæ. Patet ex conſideratione præcedentis. Conſtans autem illa quantitas eſt tempus finitum quo percurreretur ſpatium infinitum, ſi prima velocitas ea proportione creſceret, qua nunc a reſiſtentia medii diminuitur. Et poteſt inveniri hæc quantitas duobus experimentis, ex collatis ſpatiis, & temporibus, imò unico experimento, in quo conſiderantur tempus, & velocitas.

Artic. V.

Si motus a gravitate acceleratus a medio uniformi retardetur proportione velocitatis.

(1) Eſt hoc loco *hypotheſis* 1. eadem cum hypotheſi unica articuli præcedentis.

(2) Et *hypotheſis* 2 eſt eadem cum hypotheſi 2. articuli ſecundi.

(3) Reſiſtentia eſt ad impreſſionem novam, à gravitate eodem temporis elemento factam (ſeu diminutio velocitatis ad acceſſionem) ut quadratum exceſſus velocitatis maximæ ſuper acquiſitam eſt ad quadratum maximæ. Nam ex prop. 1. (hìc) ſequitur reſiſtentias eſſe in compoſita ratione elementorum temporis, & quadratorum velocitatum; at impreſſiones novæ ſunt ut elementa temporis per prop. 2. & in caſu maximæ velocitatis diminutio, & acceſſio velocitatis ſunt æquales. Unde facilè concluditur propoſitum.

(4) Si rationes inter ſummam, & differentiam velocitatis maximæ, & minoris aſſumtæ, ſint ut numeri; tempora, quibus aſſumtæ velocitates ſunt acquiſitæ, erunt ut Logarithmi. Cùm enim incrementum velocitatis ſit differentia inter impreſſionem, & reſiſtentiam, hinc (ex præcedenti) ſtatim ſequitur impreſſionem eſſe ad incrementum velocitatis, ut quadratum velocitatis maximæ ad exceſſum hujus quadrati ſuper quadratum præſentis velocitatis aſſumtæ. Ex quo ſcimus per quadraturas ſummam impreſſionum inde ab initio, quæ eſt proportionalis inſumto tempori, eſſe ut Logarithmum, ſi numerus ſit qualem in propoſitione hac enunciavimus.

(5) Velocitas maxima eſt talis excluſivè, ſeu nunquam attingi poteſt, etſi ad eam intervallo inaſſignabili accedatur. Nam cùm ratio eſt æqualitatis, ſeu cùm velocitas aſſumta eſt incipiens, ſive infinitè parva, tempus (adeoque logar.) eſt o, & proinde cùm ſit ratio infinita, hoc eſt, cùm velocitas aſſumta eſt ipſamet maxima, logarithmus rationis eſt infinitus. Itaque ad eam velocitatem acquirendam infinito tempore opus foret. Inveniri autem poteſt maxima velocitas per duo experimenta, collatis temporibus, & velocitatibus, item per prop. 3.

Tab. VIII. Fig. 39. (6) Si velocitates acquiſitæ (AV *fig.* 39.) ſint ut ſinus (arcuum HK portionum quadrantis circularis HKB) erunt ſpatia percurſa (AS) ut Logarithmi ſinuum complementi (VK) poſito radium, ſeu ſinum totum (AB) eſſe ut velocitatem maximam. Nam ex hypotheſi 2 ſequitur incrementa ſpatii eſſe in ratione compoſita velocitatum acquiſitarum, & impreſſionum gravitatis, ſed impreſſiones ſunt ad incrementa velocitatis, ut enunciatum eſt in demonſtratione prop. 4. Hinc ſequitur incrementa

ſpatii

ſpatii eſſe in ratione compoſita incrementorum velocitatis, & velocitatum directa, & reciproca ratione exceſsûs quadrati maximæ velocitatis ſuper quadratum aſſumtæ. Unde ſcimus per quadraturas ſequi propoſitum. Patet hinc Logarithmum ſinûs totius eſſe o (cùm velocitas eſt o) at evaneſcentis ſinûs complementi (cùm velocitas eſt maxima) Logarithmum, ſeu ſpatium eſſe infinitum, unde rurſus patet velocitatem maximam nuſquam attingi.

(7) Si ſpatia percurſa (AS *fig.* 39.) ſint ut Logarithmi ſinuum (KV, arcuum BK) tempora inſumta ſunt ut logarithmi rationum, quæ ſunt inter ſinum verſum (BV) & (VD) complementum ejus ad (BD) diametrum, ſeu duplum ſinûs totius (AB) Patet ex collatis propoſitionibus 4 & 6.

Artic. VI.

Si grave projiciatur in medio uniformi reſiſtentiam habente reſpectivam.

Seu feratur motu compoſito ex motibus duorum articulorum præcedentium. Sit (*fig.* 39.) projectio in AM & parallelis, deſcenſus in AS & parallelis, angulo MAS quocumque; locus motûs compoſiti P habetur completo parallelogrammo MASP.

(1) Inveniri poteſt linea projectionis (ſeu relatio inter AS & AM). Ex ſpatio AS datur (per artic. 5. prop. 6.) AV velocitas deſcendendi in S, ſeu in P. Ex hac (per prop. 7.) datur tempus inſumtum. Ex hoc (per artic. 4. prop. 3.) datur ſpatium AM, ſeu SP. Ex datis igitur lineis abſciſſis AS, dantur ordinatæ SP; ac proinde lineæ puncta inveniri poſſunt.

(2) Inveniri poteſt lineæ tangens, ſeu ipſius mobilis in ea directio. In AM ſumatur MN, quæ ſit ad MP, ut velocitas in M, inventa per tempus inſumtum (artic. 4. prop. 4.) ad velocitatem in S inventam per idem tempus (artic. 5. prop. 4.) & juncta NP tanget curvam in puncto P. Et cùm eadem ſit velocitas deſcendendi in P, quæ in S, itemque velocitas perſequendi projectionis directionem in P, quæ in M, patet qualis illa ſit in puncto P; patet etiam qua vi mobile in ipſa linea projectionis feratur, velocitas enim in linea eſt ad velocitatem deſcenſûs, ut NP ad MP.

Poſſemus etiam in unum componere reſiſtentiam abſolutam ex articulis 1, 2, 3, & reſpectivam ex artic. 4, 5, 6, uti certè reverâ concurrunt in natura, ſed prolixitas hìc vitanda eſt. Multa ex his deduci poſſent praxi accommodata, ſed nobis nunc fundamenta Geometrica jeciſſe ſuffecerit, in quibus maxima conſiſtebat difficultas. Et fortaſſis attentè conſideranti vias quaſdam novas, vel certè ſatis antea impeditas aperuiſſe vi-

debimur. Omnia autem reſpondent *noſtræ Analyſi infinitorum* , hoc eſt *calculo ſummarum* & *differentiarum* (cujus elementa quædam in his Actis dedimus) communibus quoad licuit verbis hic expreſſo.

Occaſione eorum quæ de uſu pulveris pyrii mechanico in Lipſienſibus pariter Actis, ac Roterodamenſibus Nòvellis vidi, dicam primum celeberrimum *Thevenotium*, quòd mihi conſtet, de tali re cogitaſſe, ad Hydraulica negotia, unde & mihi aliqua porrò meditandi materia nata eſt, quam comprehendat *πτεριάνδρȣ κλεάνθης*. Quod obiter hic adjicere volui.

N°. XXIV.

N°. XXIV.

TENTAMEN DE MOTUUM CŒLESTIUM CAUSIS.

Ex Actis Erud. Lipſ. ann. 1689.

Conſtat veteres, præſertim qui *Ariſtotelis*, & *Ptolomæi* placita ſecuti ſunt, nondum agnoviſſe naturæ majeſtatem, quæ noſtro demum, & præcedenti ævo præſentius illuxit; ex quo *Copernicus* pulcherrimam Pythagoreorum Hypotheſin, quam ipſi fortaſſe magis ſuſpicione libaſſe, quam rectè conſtituiſſe videntur, e tenebris revocatam, ſumma ſimplicitate phænomenis ſatisfacere oſtendit. *Tycho* autem *Copernicum* in ſumma ſyſtematis (excepta Solis, terræque tranſpoſitione) ſecutus, ad obſervationes ſolito accuratiores animum adjecit, & orbium ſolidorum apparatum minimè decorum ex cœlo ſuſtulit. Etſi autem ex *Herculeis* laboribus ſuis non ſatis fructus perceperit, partim præjudiciis quibuſdam excluſus, partim morte præventus, divina tamen providentia factum eſt, ut obſervationes ejus, & molimina venerint in manus Viri incomparabilis *Johannis Kepleri* cui fata ſervaverant, ut primus publicaret mortalibus

Jura poli, rerumque fidem, legeſque Deorum.

Hic ergo invenit, quemlibet planetam primarium orbitam deſcribere ellipticam, in cujus altero focorum ſit Sol, ea lege motus, ut radiis e Sole ad planetam ductis, areæ ſemper abſcindantur temporibus proportionales. Idem deprehendit, plures planetas ejuſdem ſyſtematis habere tempora periodica in ſeſquiplicata ratione diſtantiarum mediarum a Sole, mirè profectò triumphaturus, ſi ſciviſſet (quod præclarè *Caſſinus* notavit) etiam *Jovis*, & *Saturni* ſatellites eaſdem leges ſervare, reſpectu ſuorum planetarum primariorum, quas iſti erga Solem. Sed tantarum tamque conſtantium veritatum cauſas dare nondum potuit, tum quòd Intelligentiis, aut ſympathiarum radiationibus inexplicatis haberet præpeditam mentem, tum quòd nondum illius tempore Geometria interior, & ſcientia motuum eo, quo nunc, profeciſſent. Aperuit tamen & rationibus indagandis aditum. Nam ipſi primum indicium debetur veræ cauſæ gravitatis, & hujus naturæ legis, a qua gravitas pendet, quod corpora rotata conantur a centro recedere per tangentem, & ideo ſi in aqua feſtucæ vel paleæ innatent, rotato vaſe aqua in vorticem acta, feſtucis denſior, atque ideo fortius quàm

quàm ipſæ, excuſſa a medio, feſtucas verſus centrum compellit; quemadmodum ipſe diſertè duobus, & ampliùs locis, in Epitome Aſtronomiæ expoſuit; quanquam adhuc ſubdubitabundus, & ſuas ipſe opes ignorans, nec ſatis conſcius quanta inde ſequerentur, tum in Phyſica, tum ſpeciatim in Aſtronomia. Sed his deinde egregiè uſus eſt *Carteſius*, etſi more ſuo autorem diſſimularit. Miratus autem ſæpe ſum, quòd *Carteſius* legum cœleſtium a *Keplero* inventarum rationes reddere ne aggreſſus eſt quidem, quantum conſtat; ſive quod non ſatis conciliare poſſet cum ſuis placitis, ſive quod felicitatem inventi ignoraret, nec putaret tam ſtudioſe a natura obſervari.

Porrò cùm minimè phyſicum videatur, imò nec admirandis Dei machinamentis dignum, *Intelligentias* peculiares itineris directrices aſſignare ſideribus, quaſi Deo deeſſent rationes eadem corporeis legibus perficiendi; & verò *orbes ſolidi* dudum ſint exploſi, *ſympathiæ* autem, & magnetiſmi, aliæque id genus abſtruſæ qualitates, aut non intelligantur, aut ubi intelliguntur, corporearum impreſſionum effectus apparituræ judicentur; nihil aliud ego quidem ſupereſſe judico, quàm ut cauſa motuum cœleſtium a motibus ætheris, ſive ut aſtronomicè loquar, ab *orbibus deferentibus* quidem, ſed *fluidis*, oriantur. Hæc ſententia vetuſtiſſima eſt, etſi neglecta: Nam *Leucippus Epicuro* prior eam adeo expreſſit, ut in ſyſtemate formando ipſum adhibuerit δίνης (*vorticis*) nomen, & audivimus, quomodo *Keplerus* motu aquæ in vorticem actæ gravitatem adumbraverit. Et ex itinerario *Monconiſii* diſcimus, jam tum *Torricellii* fuiſſe ſententiam (& ut ſuſpicor, etiam *Galilæi*, cujus iſte diſcipulus erat) totum ætherem cum planetis motu Solis circa ſuum centrum acti circumagi, ut aqua a baculo in medio vaſis quieſcentis circa ſuum axem rotato; & ut paleas, ſeu feſtucas aquæ innatantes, ſic aſtra, medio propiora, celerius circumire. Sed hæc generaliora non difficulter in mentem veniunt. Nobis verò propoſitum eſt, ipſas motuum leges diſtinctiùs explicare, quod longè altioris indaginis eſſe, res docebit. Et cum aliqua in eo genere nobis lux affulſerit, & inquiſitio commodè admodum, & naturaliter ſucceſſiſſe videatur, in eam ſpem erectus ſum, veris motuum cœleſtium cauſis a nobis appropinquatum eſſe.

(1) Ut ergo rem ipſam aggrediamur, ante omnia demonſtrari poteſt, ſecundùm naturæ leges *omnia corpora, quæ in fluido lineam curvam deſcribunt, ab ipſius fluidi motu agi.* Omnia enim curvam deſcribentia ab ea recedere conantur per rectam tangentem (ex natura motûs) oportet ergo eſſe quod coerceat. Nihil autem contiguum eſt, niſi fluidum (ex hypotheſi) & nullus conatus coercetur, niſi a contiguo & moto (ex natura corporis) fluidum ergo ipſum in motu eſſe neceſſe eſt.

(2) Hinc ſequitur, *planetas moveri a ſuo æthere*, ſeu habere orbes fluidos deferentes vel moventes. Omnium enim conſenſu lineas curvas deſcribunt,

ſcribunt, nec poſſibile eſt phænomena explicari, ſuppoſitis motibus rectilineis tantùm. Itaque (per præcedentem) moventur a fluido ambiente. Idem aliter demonſtrari poteſt, ex eo quod motus planetæ non eſt æquabilis; ſeu æqualibus temporibus æqualia ſpatia deſcribens. Unde etiam neceſſe eſt, ut a motu ambientis agatur.

(3) *Circulationem* voco *Harmonicam*, ſi velocitates circulandi, quæ ſunt in aliquo corpore, ſint radiis, ſeu diſtantiis a centro circulationis reciprocè proportionales, vel (quod idem) ſi ea proportione decreſcant velocitates circulandi circa centrum, in qua creſcunt diſtantiæ a centro; vel breviſſimè, ſi creſcant velocitates circulandi proportione viciniarum. Ita enim ſi radii ſeu diſtantiæ creſcant æquabiliter, ſeu arithmeticè, velocitates decreſcent harmonica progreſſione. Itaque non tantùm in arcubus circuli, ſed & in curva alia quacunque deſcribenda circulatio harmonica locum invenire poteſt. Ponamus mobile M ferri in curva quavis 3M 2M 1M (vel 1M 2M 3M) & æqualibus temporis elementis deſcribere elementa curvæ, 3M 2M, 2M 1M, intelligi poteſt motus compoſitus ex circulari circa centrum aliquod, ut ☉ (velut 3M 2T, 2M 1T,) & rectilineo velut 2T 2M, 1T 1M (ſumtis ☉ 2T æqu. ☉ 3M, & ☉ 1 T æqu. ☉ 2 M) qualis motus intelligi etiam poteſt, dum regula, ſeu recta rigida indefinita ☉ה, movetur circa centrum ☉, & interim mobile M movetur in recta ☉ ה. Nihil autem refert, quis ſit motus rectilineus, quo ad centrum acceditur, vel ab ipſo receditur (quem voco *motum paracentricum*) modo circulatio ipſius mobilis M, ut 3 M 2 T ſit ad circulationem aliam ejuſdem mobilis, 2M 1T, ut ☉ 1M ad ☉ 2 M, hoc eſt ſi circulationes æqualibus temporum elementis factæ ſint reciprocè ut radii. Cùm enim arcus iſti elementarium circulationum ſint in ratione compoſita temporum, & velocitatum, tempora autem elementaria aſſumantur æqualia, erunt circulationes ut velocitates, itaque & velocitates reciprocè ut radii erunt, adeoque circulatio dicetur harmonica.

Tab. IX. Fig. 40.

(4) *Si mobile feratur circulatione Harmonica* (quicumque ſit motus Paracentricus) *erunt areæ radiis ex centro circulationis ad mobile ductis abſciſſæ temporibus inſumtis proportionales, & viciſſim.* Cùm enim arcus Circulares Elementares, ut 1T 2M, 2T 3M, ſint incomparabiliter parvi, reſpectu radiorum ☉ 2M, ☉ 3M, erunt differentiæ inter arcus & ſinus eorum rectos (ut inter 1T 2M, & 1D 2M) ipſiſmet differentibus incomparabiles, ac proinde (*per analyſin noſtram infinitorum*) habentur ea pro nullis, & arcus, ac ſinus pro coincidentibus. Ergo 1 D 2M, ad 2 D 3 M, ut ☉ 2M ad ☉ 1 M, ſeu ☉ 1 M in 1 D 2 M æqu. ☉ 2 M in 2 D 3 M, ergo & æquantur horum dimidia triangula nempe 1 M 2 M ☉ & 2M 3M ☉, quæ cùm ſint elementa areæ A ☉ M A, itaque æqualibus ex hypotheſi ſumtis temporis elementis, etiam areæ elementa ſunt æqualia, & viciſſim, ac proinde areæ A ☉ M A ſunt temporibus, quibus percurſi ſunt arcus A M, proportionales.

(5)

(5) Aſſumſi inter demonſtrandum *quantitates incomparabiliter parvas*, verbi gratia differentiam duarum quantitatum communium ipſis quantitatibus incomparabilem. Sic enim talia, ni fallor, lucidiſſimè exponi poſſunt. Itaque ſi quis nolit adhibere *infinitè parvas*, poteſt aſſumere tam parvas quàm ſufficere judicat, ut ſint incomparabiles, & errorem nullius momenti, imo dato minorem, producant. Quemadmodum terra pro puncto, ſeu diameter terræ pro linea infinitè parva habetur, reſpectu cœli, ſic demonſtrari poteſt, ſi anguli latera habeant baſin ipſis incomparabiliter minorem, angulum comprehenſum fore recto incomparabiliter minorem, & differentiam laterum fore ipſis differentibus incomparabilem; item differentiam ſinûs totius, ſinûs complementi & ſecantis, fore differentibus incomparabilem, item differentiam chordæ, arcus, & tangentis. Unde cùm hæ ſint ipſæ infinitè parvæ, erunt differentiæ *infinities infinitè parvæ*, & ſinus verſus etiam erit infinities infinitè parvus, adeoque recto incomparabilis. Et infiniti ſunt gradus tam infinitorum, quàm infinitè parvorum. Et poſſunt adhiberi triangula communia *inaſſignabilibus* illis ſimilia; quæ in Tangentibus, Maximiſque, & Minimis, & explicanda curvedine linearum uſum habent maximum; item in omni pene translatione Geometriæ ad naturam, nam ſi motus exponatur per lineam communem, quam dato tempore mobile abſolvit, impetus, ſeu velocitas exponetur per lineam infinitè parvam, & ipſum elementum velocitatis, quale eſt gravitatis ſollicitatio, vel conatus centrifugus, per lineam infinities infinitè parvam. Atque hæc *lemmatum* loco annotanda duxi, pro *Methodo noſtra quantitatum incomparabilium*, & *analyſi infinitorum*, tanquam Doctrinæ hujus novæ *Elementa*.

(6) Ex his jam conſequens eſt, *planetas moveri circulatione Harmonica*, primarios circa Solem, ſatellites circa ſuum primarium, tanquam centrum. Radiis enim ex centro circulationis ductis areas deſcribunt temporibus proportionales (per obſervationes.) Ergo temporum elementis poſitis æqualibus eſt triang. 1 M 2 M ☉ æqu. triang. 2 M 3 M ☉, & proinde ☉ 1 M ad ☉ 2 M eſt ut 2 D 3 M ad 1 D 2 M, quod eſt circulationem harmonicam eſſe.

(7) Conſentaneum etiam eſt, Ætherem, ſeu *Orbem fluidum cujuſque planetæ moveri circulatione harmonica*; nam ſupra oſtenſum eſt, nullum corpus in fluido ſponte moveri linea curva, erit ergo & in æthere circulatio, eamque rationis eſt credere conſentientem circulationi planetæ, ita ut ſit etiam circulatio ætheris cujuſque planetæ harmonica, hoc eſt ſi orbis planetæ fluidus, in innumeros orbes circulares concentricos exiguæ craſſitudinis cogitatione dividatur, quilibet ſuam habebit propriam circulationem tanto velociorem proportione, quanto quiſque erit propior Soli. Sed hujus motûs in æthere alias exactius reddetur ratio.

(8) Itaque ponemus *planetam moveri motu duplici*, *ſeu compoſito ex*

circu-

circulatione harmonica, *orbis ſui fluidi deferentis*, *& motu paracentrico*, quaſi cujuſdam gravitatis, ſeu attractionis, hoc eſt impulſus *verſus Solem*, *ſeu planetam primarium.* Facit autem circulatio ætheris, ut planeta circuletur harmonicè, non velut motu proprio, ſed quaſi tranquilla natatione in fluido deferente, cujus motum ſequitur, unde nec impetum circulandi velociorem retinet, quem habuerat in orbe inferiore, ſeu propiore, ſed eum elangueſcentem, dum ſuperiores (majori velocitati quàm ſuæ reſiſtentes) trajicit, continuè deponit, & ſeſe orbi quem accedit, inſenſibiliter accommodat. Viciſſim dum a ſuperioribus ad inferiores tendit, impetum eorum accipit. Idque eo facilius fit, quia ubi ſemel conſenſit planetæ motus, cum præſentis orbis motu, poſtea a proximis parum differt.

(9) Explicata circulatione harmonica, veniendum eſt ad *Motum paracentricum planetarium*, *ortum ex impreſſione excuſſoria circulationis*, *& attractione ſolari* inter ſe compoſitis. Liceat autem appellare attractionem, licet revera ſit impulſus, utique enim Sol quadam ratione tanquam magnes concipi poteſt; ipſæ autem actiones magneticæ a fluidorum impulſibus haud dubiè derivantur. Unde etiam vocabimus *Sollicitationem Gravitatis*, concipiendo planetam tanquam grave tendens ad centrum, nempe Solem. Pendet autem ſpecies orbitæ a ſpeciali lege attractionis. Videamus igitur quæ lex attrahendi lineam ellipticam faciat, idque ut conſequamur, in Geometriæ adyta parumper ingrediamur neceſſe eſt.

(10) Cum omne mobile a linea curva quam deſcribit recedere conetur per Tangentem, licebit *conatum* hunc vocare *excuſſorium*, ut in motu fundæ, cui æqualis requiritur vis, quæ mobile coercet, ne evagetur. *Hunc conatum metiri licebit perpendiculari ex puncto ſequenti in tangentem puncti præcedentis inaſſignabiliter diſtantis.* Et cùm linea eſt circularis, hanc *vim* celeberrimus *Hugenius*, qui primus eam Geometricè tractavit, appellavit *centrifugam.* Omnis autem conatus excuſſorius eſt reſpectu velocitatis, ſeu impetus ex conatu repetito aliquandiutino concepti infinitè parvus, quemadmodum & ſollicitatio gravitatis, quæ homogeneæ cum ipſo eſt naturæ. Unde & eadem cauſa utriuſque confirmatur. Nec proinde mirum eſt, quod voluit *Galilæus*, percuſſionem eſſe infinitam comparatione gravitatis nudæ, ſeu, ut ego loquor, ſimplicis conatus, cujus *vim* ego *mortuam* vocare ſoleo, quæ agendo demum concipiens impetum repetitis impreſſionibus, viva redditur.

(11) *Conatus centrifugus*, ſeu conatus excuſſorius circulationis *exprimi poteſt per* PN *ſinum verſum anguli circulationis* 1 M☉N (vel quod ob differentiam radiorum inaſſignabilem eodem redit, per 1 D 1 T) nam ſinus verſus æquatur perpendiculari ex uno extremo arcus circuli puncto, in tangentem alterius ductæ, qua conatum excuſſorium expreſſimus in præcedenti. (poteſt etiam exprimi conatus centrifugus per PV, differentiam radii & ſecantis ejuſdem anguli, cujus differentiæ diſcrimen a ſinu

verſo eſt *infiniteſies*, *infinities*, *infinitè parvum*, adeoque nulliſſimum, reſpectu radii.) Hinc porro cùm ſinus verſus ſit in duplicata ratione chordæ, ſeu arcus inaſſignabilis, ſive velocitatis, ſequitur *conatus centrifugos mobilium æquabili motu æquales circulos deſcribentium eſſe in duplicata ratione velocitatum*, *inæquales deſcribentium eſſe in ratione compoſita ex quadrata velocitatum*, *& reciproca radiorum.*

(12) *Conatus centrifugi mobilis harmonicè circulantis ſunt in ratione radiorum reciproca triplicata.* Sunt enim (per præcedentem) in reciproca radiorum, & directa duplicata velocitatum, id eſt (quia velocitates circulationis harmonicæ ſunt reciprocè ut radii) duplicata reciproca radiorum; ex ſimplice autem reciproca, & duplicata reciproca fit reciproca triplicata. Pro calculo ſit θa planum conſtans æquale ſemper duplo triangulo elementari 2 M 3 M ⊙ ſeu rectangulo 2 D 3 M in ⊙ 2 M radium ſeu r, ergo 2 D 3 M erit $\theta a : r$ ſeu θa diviſ. per r, jam 2 D 2 T conatus centrifugus æqu. 2 D 3 M quadr. diviſ. per bis ⊙ 3 M. ergo æqu. $\theta\theta aa : 2 r^3$.

(13) Si *motus paracentricus* (receſſus a centro ∾ vel ad ipſum acceſſus) *ſit æquabilis*, & circulatio harmonica, *linea motus* ∾ MG *erit ſpiralis* ex centro ∾ incipiens, *cujus* ea eſt proprietas, ut ſegmenta ∾ GM ∾ ſint *proportionalia radiis*, id eſt hoc loco chordis ∾ G ex centro eductis, ſunt enim tam areæ, hoc eſt, ſegmenta, quàm (ob æquabilem receſſum) radii temporibus proportionales. Multæ ſunt aliæ notabiles hujus ſpiralis proprietates, nec difficilis conſtructio. Imo *generalis datur methodus* in circulatione Harmonica, ſi ex radiis dentur tempora, aut velocitates paracentrici motus, aut ſaltem elementa impetuum ſeu ſollicitationes gravitatis, conſtruendi lineas ſaltem ſuppoſitis quadraturis.

(14) *Sollicitatio paracentrica*, *ſeu gravitatis*, *vel levitatis*, exprimitur recta 3 M L ex puncto curvæ 3 M in puncti præcedentis inaſſignabiliter diſtantis 2 M tangentem 2 M L (productam in L) acta, radio præcedenti ⊙ 2 M (ex centro ⊙ in punctum præcedens 2 M ducto) parallela.

(15) *In omni circulatione harmonica elementum impetus paracentrici* (hoc eſt incrementum, aut decrementum velocitatis deſcendendi verſus centrum, vel aſcendendi a centro) *eſt differentia*, *vel ſumma ſollicitationis paracentricæ* (hoc eſt impreſſionis a gravitate, vel levitate, aut cauſa ſimili factæ) *& dupli conatus centrifugi* (ab ipſa circulatione harmonica orti.) Summa quidem, ſi levitas adſit; differentia, ſi gravitas: ubi prævalente gravitatis ſollicitatione creſcit deſcendendi, vel decreſcit aſcendendi velocitas, at prævalente duplo conatu centrifugo, contra. Ex 1 M & 3 M normales in ⊙ 2 M ſint 1 M N & 3 M 2 D; cùm ergo triangula 1 M 2 M ⊙ & 2 M 3 M ⊙ ſint æqualia oſtenſa ob circulationem harmonicam, erunt (ob baſin communem ⊙ 2 M) & altitudines 1 M N, & 3 M 2 D æquales. Jam ſumta 2 M G æquali L 3 M, jungatur 3 M G parallela ipſi 2 M L; igitur congrua erunt triangula 1 M N 2 M, & 3 M

2 D G,

2 D G, & erit 1 M 2 M æqu. G 3 M, & N 2 M æqu. G 2 D. Porro in recta ⊙ 2 M (ſi opus producta, quod ſemper ſubintelligo) ſumatur ⊙P æqu. ⊙ 1 M, & ⊙2T æqu. ⊙ 3 M, erit P 2 M differentia inter radios ⊙ 1 M, & ⊙ 2 M; & 2 T 2 M, differentia inter radios ⊙ 2 M & ⊙ 3 M. Jam P 2 M æqu. (N 2 M ſeu) G 2 D + NP, & 2 T 2 M æqu. 2 M G + G 2 D — 2 D 2 T, ergo P 2 M — 2 T 2 M (differentia differentiarum) erit NP + 2 D 2 T — 2 M G, hoc eſt (quia NP & 2 D 2 T ſinus verſi duorum angulorum, & radiorum incomparabiliter differentium coincidunt) bis 2 D 2 T — 2 M G. Jam differentia radiorum exprimit velocitatem paracentricam, differentia differentiarum exprimit elementum velocitatis paracentricæ. Eſt autem 2 D 2 T vel NP conatus centrifugus circulationis, quippe ſinus verſus (per 11) & 2 M G ſeu 3 M L eſt ſollicitatio gravitatis (per præcedentem). Itaque elementum velocitatis paracentricæ æquatur differentiæ inter duplum conatum centrifugum NP, ſeu 2 D 2 T, & ſimplicem ſollicitationem gravitatis G 2 M, aut (quod eodem modo concluditur) ſummæ ex duplo conatu centrifugo, & ſimplici ſollicitatione levitatis.

(16) Datis incrementis, aut decrementis velocitatis aſcendendi, aut deſcendendi, datur ſollicitatio gravitatis levitatisve, aut vice verſa. Patet ex præcedenti, nam conatus centrifugus ſemper dari cenſetur, cùm ſit in ratione triplicata reciproca radiorum (per 12.)

(17) Æqualibus temporum elementis incrementa angulorum circulationis harmonicæ, ſunt in ratione duplicata reciproca radiorum. Nam circulationes ſunt in ratione compoſita angulorum, & radiorum, & circulationes elementares, cùm ſint harmonicæ, ſunt in ratione reciproca radiorum, ergo anguli elementares ſunt in ratione radiorum reciproca duplicata. Tales ſunt fere motus apparentes diurni ex Sole ſpectati (dies enim hic ſufficienter exiguæ ſunt partes temporis, inprimis pro planetis remotioribus,) qui erunt circiter in ratione reciproca quadratorum diſtantiæ, ita ut in diſtantia dupla tantùm quarta pars anguli eodem temporis elemento abſolvatur, in tripla tantùm nona.

(18) *Si ellipſis deſcribatur circulatione mobilis harmonica circa focum tanquam circulationis centrum, erunt inter ſe hæc tria: circulatio* 2 T 3 M vel 2 D 3 M (hæc enim comparabiliter non differunt) *velocitas paracentrica* 2 D 2 M, *& velocitas ipſius mobilis* (ex ipſis compoſita) *in ipſa orbita elliptica* nempe 2 M 3 M, *reſpectivè ut hæc alia tria*; axis tranſverſus BE; media proportionalis inter differentiam, & ſummam diſtantiæ focorum inter ſe F ⊙, & differentiæ ⊙ φ diſtantiarum puncti orbitæ 3 M a focis; ac denique dupla media proportionalis inter ⊙ 3 M & F 3 M, diſtantias ejuſdem puncti a duobus focis. *Eadem* hæc ſuo modo *& in hyperbola* vera ſunt. In parabola quantitatibus quæ ibi infinitæ ſunt evaneſcentibus, fient circulatio, velocitas paracentrica, & velocitas ex ipſis compoſita,

quæ eſt in ipſa orbita reſpectivè, ut latus rectum; media proportionalis inter latus rectum, & exceſſum radii ſuper radium omnium minimum, (qui eſt quarta pars lateris recti) & denique dupla media proportionalis inter radium, & latus rectum. Horum veritas ex communibus conicorum elementis derivari poteſt, ſi ponatur rectam 3 M curvæ (vel ejus tangenti) perpendicularem in MR, Axi A ∽ occurrere in R, & in eam ex focis normales agi FQ, $\odot$ H; patet $\odot$ H, H 3 M, 3 M $\odot$; eſſe ipſis 2 M 2 D, 2 D 3 M, 3 M 2 M, hoc eſt velocitati paracentricæ, circulationi, & velocitati in ipſa orbita, proportionales. Sufficit igitur oſtendi latera trianguli 3 M H $\odot$ eſſe inter ſe, ut enuntiavimus. Quod facilius fiet, conſiderando triangula 3 M Q F, & 3 M H $\odot$ eſſe ſimilia, & præterea eſſe F 3 M ad $\odot$ 3 M, ut F R ad $\odot$ R, unde per analyſin communem propoſitum concludetur. Sequitur hinc, permutatis licet focis, ut alter pro altero centrum circulationis harmonicæ, attractioniſque fiat, eamdem quæ ante, manere rationem circulationis, & velocitatis paracentricæ, in quovis puncto.

(19) *Si mobile quod gravitatem habet*, vel ad centrum aliquod trahitur, qualem planetam reſpectu Solis ponimus, *feratur in ellipſi* (aut alia ſectione coni) *circulatione harmonica*, *ſitque in foco ellipſeos centrum tam attractionis*, *quàm circulationis*, *erunt attractiones*, *ſeu gravitatis ſollicitationes*, *ut quadrata circulationum directè*, *ſeu ut quadrata radiorum*, *ſive diſtantiarum a foco reciprocè.* Hoc ita invenimus, non ineleganti ſpecimine noſtri calculi differentialis, vel analyſeos infinitorum. A ∽ ſit q; $\odot$F, e; BE, b (hoc eſt $\sqrt{qq - ee}$) $\odot$ 2 M radius r; $\odot$ φ (ſeu $\odot$ 2 M — F 2 M) $2r - q$, ſeu per compendium p; & latus rectum WX ſit a, æqu. $bb:q$. Duplum elementum areæ, ſeu duplum triangulum 1 M 2 M $\odot$ quod ſemper æquale eſt, ſit θa, poſito a latere recto, & θ repræſentante elementum temporis ſemper æquale; & 2 D 3 M circulatio erit $\theta a : r$ (vid. jam ſuprà 12) porro differentia radiorum 2 D 2 M vocetur dr, & differentia differentiarum ddr. Per præcedentem autem eſt dr (ſeu 2 D 2 M) ad $\theta a : r$ (ſeu ad 2 D 3 M) ut $\sqrt{ee - pp}$ ad b. Ergo $brdr = \theta a \sqrt{ee - pp}$, quæ eſt *æquatio differentialis.* Hujus autem *æquatio differentio-differentialis* (*ſecundùm Leges calculi a nobis alias in Actis iſtis explicati*) eſt $bdrdr + brddr = -2pa\theta dr : \sqrt{ee - pp}$, quarum duarum æquationum ope tollendo dr, ut reſtet tantùm ddr, fiet $ddr = bbaa\theta\theta - 2aaqr\theta\theta : bbr^3$, unde habetur propoſitum. Nam ddr, velocitatis paracentricæ elementum, eſt differentia inter $bbaa\theta\theta : bbr^3$ hoc eſt $aa\theta\theta : r^3$ qui eſt duplus conatus centrifugus (per 12 ſupra) & inter $2aaqr\theta\theta : bbr^3$, hoc eſt (quia $bb : q = a$) $2a\theta\theta : rr$: oportet ergo (per 15) ut $2a\theta\theta : rr$ ſit ſollicitatio gravitatis; quæ ducta in conſtantem

a:2

a : 2 dat aaθθ : rr, quadratum circulationis. Sunt ergo ſollicitationes gravitatis ut quadrata circulationis directè, & proinde ut quadrata radiorum reciprocè. Eadem concluſio, & in *hyperbola* & *parabola* ſuccedit, maximè autem in *circulo*, qui eſt ſimpliciſſima ellipſis. Ratio autem diſcriminis inter has conicas ſectiones, & quando circuli & ellipſes præ aliis generentur, infra apparebit.

(20) *Planeta idem attrahitur a Sole diverſimode, & quidem in duplicata ratione viciniarum*; ita ut idem duplo vicinior quadruplo fortius, triplo vicinior noncuplo fortius ad deſcendendum verſus Solem nova quadam impreſſione perpetuo ſollicitetur. Patet ex præcedenti, poſito Planetam ellipſin deſcribere, ac circulari harmonicè, ac præterea continuò impelli verſus Solem. Video hanc propoſitionem jam tum innotuiſſe etiam viro celeberrimo *Iſaaco Newtono*, ut ex relatione Actorum apparet, licet inde non poſſim judicare, quomodo ad eam pervenerit.

(21) Patet etiam *ſollicitationem gravitatis in Planetam eſſe ad conatum Planetæ centrifugum* (ſeu excuſſorium ab ipſa circulatione harmonica eum rapiente in orbem, atque adeo excutere conante profectum) ut *diſtantia præſens a Sole ad quartam partem lateris recti ellipſeos planetariæ*, ſeu ut r ad a : 4, ac proinde rationes ipſæ gravitatis ad conatum centrifugum ſunt planetæ diſtantiis a Sole proportionales.

(22) *Velocitas planetæ circa Solem ubique major eſt velocitate paracentrica, hoc eſt accedendi ad Solem, vel ab eo recedendi.* Cùm enim ſit circulatio ad paracentricam ut b ad $\sqrt{ee - pp}$ (per 18, adde calculum ad 19.) erit major illa quàm hæc, ſi bb + pp major quàm ee, quod utique ſit, cùm bb major quàm ee, ſeu b axis tranſverſus, quàm e diſtantia focorum. Id verò in ellipſibus planetariis nobis notis ſemper contingit, quæ non uſque adeo a circulis differunt.

(23) In *Aphelio* A & *Perihelio* ☊ ſola eſt *circulatio* ſine acceſſu & receſſu, in Perihelio *maxima*, in Aphelio *minima*. *In media* autem planetæ *diſtantia* a Sole (quæ eſt in ipſis extremis axis tranſverſi, B & E velocitas acceſſus, receſſuſve eſt ad circulationem in ratione diſtantiæ inter focos, ad axem tranſverſum, ſeu e ad b. Ibi enim p evaneſcit.

(24) *Maxima* eſt *planetæ velocitas accedendi ad Solem, vel ab eo recedendi*, cum W ⊙ vel X ⊙, diſtantia planetæ à Sole, eſt æqualis dimidio ellipſeos lateri recto, tunc enim (per 19 vel 21) ſit ddr = o cum r = a: 2. Itaque ſi ex Sole tanquam centro, dimidio latere recto ⊙ W, tanquam radio, deſcribatur circulus, is ellipſin planetæ in duobus punctis maximæ paracentricæ velocitatis W & X ſecabit, quæ in uno ut W erit accedendi, in altero X recedendi. *Minima* ſive nulla eſt in Aphelio & Perihelio, ſive in ellipſis utroque vertice A & ☊.

(25) Semper in ellipſi, adeoque & *ſemper in planeta conatus centrifu-*

gus recedendi a Sole, ſeu conatus excuſſorius *circulationis harmonicæ*, *minor eſt* ſollicitatione gravitatis, ſeu *attractione* centrali *Solis.* Eſt enim (per 21) attractio ad conatum centrifugum ut diſtantia a Sole, ſeu foco, ad quartam partem lateris recti, ſemper autem in ellipſi diſtantia a foco major quarta lateris recti parte.

(26) *Impetus quos planeta attractione Solis continuata, durante itinere concepit, ſunt ut anguli circulationis*, ſeu quos radii ex Sole ad primum & poſtremum itineris punctum ducti comprehendunt; ſive ut motus apparens, ſeu iter ſpectatum ex Sole. Sic impetus impreſſus durante itinere A 1 M eſt ad impetum impreſſum durante itinere A 3 M, ut angulus A ⊙ 1 M ad angulum A ⊙ 3 M. Sunt enim angulorum incrementa ut impreſſiones gravitatis (per 17 & 19) ergo & ſummæ ſummis proportionales, nempe anguli circulatione abſoluti, ſummis impreſſionum, ſeu impetibus inde conceptis. Hinc in puncto W ubi normalis ordinata ex Sole ellipſi occurrit, impetus inde ab Aphelio A conceptus, eſt dimidia pars impetus concepti ab Aphelio ad Perihelium; eſt autem ibi ⊙ W diſtantia à Sole, ipſum dimidium latus rectum. Et impetus itinere quovis conceptus eſt ad conceptum ſemirevolutione, ut angulus circulationis ad duos rectos. Intelligo autem impetus a gravitate, vel attractione impreſſos per ſe ac ſolos, non detractis, nec computatis impetibus contrariis ab excuſſorio conatu impreſſis.

(27) Sed operæ pretium eſt diſtinctius ex cauſis aſſignatis *explicare totam Planetæ revolutionem*, *graduſque acceſſus & receſſus erga Solem.* Planeta igitur in maxima digreſſione A, ſeu Aphelio poſitus minorem quidem & conatum centrifugum circulationis excutientis, & attractorium gravitatis ſollicitantis experitur, quàm ſi Soli propior eſſet. Eſt tamen in ea diſtantia, nempe in vertice remotiore a Sole fortior gravitas, quàm duplus conatus centrifugus (per 21) quia ⊙ A diſtantia Aphelii, ſeu verticis remotioris a Sole, ſeu foco major eſt dimidio latere recto ⊙ W. Deſcendit itaque planeta verſus Solem itinere A M E W ∿, & continuè creſcit deſcendendi impetus, ut in gravibus acceleratis, quamdiu manet nova gravitatis ſollicitatio fortior duplo novo conatu centrifugo; tamdiu enim creſcit impreſſio accedendi, ſuper impreſſionem recedendi, adeoque abſolutè creſcit accedendi velocitas, donec in locum perveniatur, ubi æquantur duæ illæ novæ contrariæ impreſſiones, id eſt in locum W, ubi diſtantia a Sole ⊙ W æquatur dimidio lateri recto. Ibi ergo velocitas accedendi eſt maxima, & creſcere deſinit (per 24). Exinde autem etſi pergat planeta accedere ad Solem, uſque ad ∿, velocitas tamen accedendi rurſus decreſcit, prævalente conatu duplo centrifugo ſuper gravitatis impreſſionem; idque tamdiu continuatur, donec impreſſiones centrifugæ in unum collectæ, ab initio A, hucuſque, impreſſiones gravitatis, etiam ab initio huc uſque collectas, præciſe conſumunt, ſeu quando totus impetus

petus recedendi (conceptus ex ſingulis impreſſionibus centrifugis collectis) toti impetui accedendi (ex gravitatis impreſſionibus continuè repetitis concepto) tandem æquatur, ubi ceſſat omnis acceſſio, atque is locus ipſum eſt Perihelium ∿, in quo Planeta eſt Soli maximè vicinus. Poſtea autem continuato motu, cùm hactenus acceſſerit, nunc recedere incipit, tenditque ab ∿ per X verſus A. Nam duplus conatus centrifugus qui prævalere cœperat ſuper gravitatem, inde a W uſque ad ∿ adhuc pergit prævalere ab ∿ uſque ad X, ac proinde cum ab ∿ incipiat planeta quaſi de novo moveri, quippe prioribus impetibus contrariis mutuo ſublatis, prævalet etiam receſſus inde ab ∿, & recedendi velocitas continuè creſcit uſque ad X, ſed incrementum tamen ejus, ſeu nova impreſſio decreſcit, donec iſta nova impreſſio ad recedendum, ſeu duplus conatus centrifugus, novæ impreſſioni ad recedendum, ſeu gravitati iterum fit æqualis, nempe in X. Itaque in X eſt maxima recedendi velocitas. Et ex eo prævalet gravitas, ſeu nova impreſſio accedendi, licet adhuc ſatis diu prævaleat totus recedendi impetus, ſeu ſumma omnium impreſſionum recedendi inde ab ∿ acquiſitarum, ſuper totum impetum accedendi, inde ab ∿ denuo impreſſum. Sed cùm tamen hic magis creſcat quàm ille, poſt X, tandem ei fit æqualis in A, ubi mutuo deſtruuntur, & receſſus ceſſat, id eſt reditur ad Aphelium A. Atque ita omnibus impreſſionibus priſtinis contrariarum æqualium compenſatione conſumtis, res redit ad ſtatum primum; atque omnia de integro perpetuis luſibus repetuntur, donec longa dies perfecto temporis orbe, rerum conſtitutioni mutationem notabilem afferat.

(28) Habemus ergo *in motu Planetæ elliptico ſex puncta inprimis notabilia*: quatuor quidem obvia, A & ∿ aphelii, & perihelii. Itemque E & B mediæ diſtantiæ, (nam ☉ B vel ☉ E eſt dimidius axis major A ∿, adeoque medium arithmeticum inter ☉ A maximam, & ☉ ∿ minimam digreſſionem) & duo a nobis addita, W & X extrema lateris recti W X ad axem in foco ☉ ordinatim applicati, quæ ſunt puncta maximæ velocitatis, illud W recedendi, hoc X accedendi (per 24). Ubi etiam (per 26) impetus a continua gravitatis impreſſione conceptus ab A uſque ad W præciſe eſt dimidius ejus, qui toto deſcenſu ab A uſque ad ∿ concipitur; ſimiliter conceptus ab ∿ uſque ad X, dimidius ejus qui concipitur ab ∿ uſque ad A: & omnino impetus a gravitate concepti per A W, W ∿, ∿ X, X A ſunt æquales.

(29) Tempus jam eſt, ut tradamus *cauſas, quæ ſpeciem ellipſeos Planetariæ definiunt*. Datur focus ellipſeos ☉, qui eſt locus Solis. Dato jam loco A ubi Planetam Sol trahere incipit, velut maxima planetæ diſtantia, datur remotior ab hoc foco ellipſeos vertex. Data porro ratione gravitatis, ſeu virtutis, qua Sol planetam trahere incipit, ad conatum centrifugum, qua ibi circulatio planetam excutere, & a Sole repellere nititur, hinc

hinc datur & latus rectum ellipſeos principale W X, ſeu ordinatim applicata in foco ⊙. Nam ⊙ A data, eſt ad ⊙ W ſemilatus rectum, in ratione data attractionis Solaris ad duplum conatum centrifugum. Quod ſi jam quarta pars lateris recti detrahatur a maxima digreſſione data A ⊙, erit reſiduum ad A ⊙, ut A ⊙ ad A ♎: datur ergo A ♎ major axis ellipſeos, ſeu latus tranſverſum. Datis ergo punctis ⊙, A, W vel X datur & ♎, atque hinc porro & C centrum ellipſeos, & alter focus F, & axis tranſverſus BE, adeoque ellipſis. Nec minus dantur omnia, ſi pro A initio daretur ♎.

(30) Ex his ſimul patet, *quomodo ellipſis*, *vel* qui ſub ea continetur *circulus*, *non alia conica ſectio*, *a planetis deſcribatur.* Et *circulus* quidem oritur, cùm attractio gravitatis, & dupla vis centrifuga a circulatione orta ab initio attractionis ſunt æquales; ita enim æquales manebunt, nulla exiſtente cauſa acceſſus, aut receſſus, ſed cum initio (vel in ſtatu deſtructorum priorum impetuum contrariorum accedendi, recedendive, qui initio æquivalet, hoc eſt in Aphelio vel Perihelio) attractio, & duplus conatus centrifugus, ſunt inæquales, modò (per 25) conatus centrifugus ſimplex ſit minor attractione, deſcribitur *ellipſis*; & prævalente attractione, initium eſt Aphelium, ſin prævaleat duplus conatus centrifugus, eſt Perihelium. Si conatus centrifugus ſimplex attractioni ſit æqualis, *parabola*; ſi major, hyperbola orietur, cujus focus intra ipſam ſit Sol. Quod ſi Planeta non gravitate, ſed levitate eſſet præditus, nec traheretur, ſed repelleretur a Sole, *hyperbolæ oppoſita* oriretur, cujus nempe focus extra ipſam Sol eſſet.

Duo jam in hoc argumento potiſſimum præſtanda ſuperſunt, unum, ut explicemus quis motus ætheris planetas graves faciat, ſeu verſus Solem pellat, & quidem in duplicata ratione viciniarum; deinde quæ ſit cauſa comparationis motuum inter diverſos planetas ſyſtematis ejuſdem, ita ut tempora periodica ſint in ſeſquiplicata ratione mediarum diſtantiarum, ſeu quod eodem redit, axium majorum ellipticorum: id eſt, diſtinctius explicari debet motus vorticis Solaris, ſeu ætheris, Syſtema unumquodque conſtituentis. Sed hæc cùm altiùs repetenda ſint, brevitati hujus Schediaſmatis includi non poſſunt, & quid nobis conſentaneum viſum ſit, rectiùs ſeparatim exponetur.

N°. XXV.

N°. XXV.

DE LINEA ISOCHRONA,

In qua grave ſine acceleratione deſcendit, & de controverſia cum Dn. Abbate *De Conti*.

Ex Actis Erudit. Lipſ. ann. 1689.

CUm a me in his *Actis Martio* 1686. editis, (a) publicata eſſet demonſtratio contra *Carteſianos*, qua vera virium æſtimatio traditur, oſtenditurque non quantitatem motûs, ſed potentiæ, a quantitate motûs differentem ſervari; Vir quidam doctus in Gallia, Dn. Abbas *De Conti*, pro Carteſianis reſpondit, ſed, ut poſt apparuit, vi mei argumenti non ſatis perſpecta. Credidit enim, recepta quædam alia principia a me impugnari, quæ in *Novellis Reip. Litterar. menſ. Jun.* 1687. *p.* 579. enumerat, & negat *p.* 519. *ſeq.* ſe agnoſcere contradictionem, quam ego in illis invenire mihi videar: cùm tamen nunquam mihi de illis dubitare in mentem venerit, quemadmodum ipſum admonui *Novell. Reip. Lit. Septemb.* 1687. Idem ut eluderet objectionem meam, conjecerat ſe in diverticulum temporis, quod eo modo, quo conceptus a me erat ſtatus controverſiæ, planè eſt accidentale. Eadem enim manente altitudine, eadem vis acquiritur, aut impenditur a gravibus quocunque tempore indulto, quod pro inclinatione deſcensûs majore, minoreve augetur, aut minuitur. Ea occaſione, quo magis appareret, tempus, atque adeo diſtinctionem inter potentias iſochronas, vel aniſochronas, hoc loco nihil ad rem facere, & ut ex diſputatione noſtra aliquid incrementi ſcientia caperet, *problema* tale, à me inter ſcribendum ſolutum, & (ut videtur) non inelegans, ipſi propoſui in *dictis novellis Septembr.* 1687. » Invenire lineam iſochronam, in » qua grave deſcendat uniformiter, ſive æqualibus temporibus æqualiter » accedat ad horizontem, atque adeo ſine acceleratione, & æquali ſem» per velocitate deorſum feratur. « Sed Dn. Abbas *De Conti* nihil ultrà repoſuit, ſive quod problema attingere nollet, ſive quod agnita tandem mente mea, ſatisfactum ſibi judicaret. Sed ejus loco problema hoc ſua opera dignum judicavit vir celeberrimus *Chriſtianus Hugenius*, cujus ſolutio mea prorſus conſona extat in *Novellis Reip. Lit. Octobr.* 1687. ſed ſuppreſſa demonſtratione, & explicatione diſcriminis inter diverſas lineas ejuſdem,

(a) Vid. Num. XVI. & ſeqq.

ejuſdem, ut ait, generis, quas ſatisfacere notat. Hæc igitur ego ſupplere hoc loco volui, facturus citius, niſi aliquid hic a Dn. Abbatis induſtria expectaviſſem. *Problema*: Invenire lineam planam, in qua grave ſine acceleratione deſcendit. *Solutio*: ſit linea paraboloeides quadrato-cubica

Tab. IX. Fig. 41. quæcunque β N e (nempe ubi *ſolidum* ſub quadrato baſis NM & parametro a P æquale eſt cubo altitudinis β M) ita ſita, ut verticis β tangens β M ſit perpendicularis horizonti, in cujus lineæ puncto quocunque N ſi ponatur grave ea deſcendendi ulterius celeritate præditum, quam potuit acquirere deſcendendo ex horizonte A a, cujus elevatio a β ſupra verticem β ſit $\frac{4}{9}$ parametri curvæ, tunc idem grave deſcendet porrò uniformiter per lineam N e, utcunque continuatam, ut deſiderabatur.

Demonſtratio. Recta NT curvam β N e tangat in N, & ipſi β M occurrat in T. Utique (ex nota proprietate tangentium hujus curvæ) erit TM ad NM in ſubduplicata ratione a β ad β M. Ergo TM ad TN erit in ſubduplicata ratione a β ad a β + β M, ſeu ad a M. Jam ratio TM ad TN eadem eſt quæ velocitatis *per curvam* deſcendenti (ſeu horizonti porrò in curva appropinquandi) quam grave habet poſitum in N, ad velocitatem, qua idem ex N porrò, non per curvam, ſed *liberè* deſcenderet, ſi poſſet (ut conſtat ex natura motûs inclinati.) Sed velocitas hæc *libera* porro eſt ad conſtantem quamdam, in ſubduplicata ratione a M ad a β: ſunt enim (ut ex motu gravium conſtat) velocitates liberæ, in altitudinum (unde deſcendendo quæſitæ ſunt) a M, ſubduplicata ratione: ergo velocitas deſcendendi per curvam N e, quam grave habet in quocunque curvæ puncto N poſitum, eſt ad velocitatem conſtantem, in compoſita ſubduplicata ratione a β ad a M, & a M ad a β; quæ eſt ratio æqualitatis. Ipſamet igitur velocitas illa per curvam deſcendendi eſt conſtans, ſeu ubique in curva N e eadem. Quod præſtandum erat.

Conſectaria: (1) Grave celeritatem habens tanquam lapſum ab altitudine aliqua A a, deſcendere poteſt ex eodem puncto N per curvas iſochronas infinitas, ſed ejuſdem ſpeciei, ſeu ſola magnitudine parametri differentes, ut N e, N (e) NE quæ omnes ſunt paraboloeides quadrato-cubicæ, adeoque ſimiles inter ſe. Imò quælibet hujuſmodi paraboloeidum hic inſervit, modò ita collocetur, ut a β vel (a) (β) diſtantia verticis ab horizontali a (a), unde deſcendere incepit grave, ſit $\frac{4}{9}$ parametri curvæ β e vel (β) (e): nec refert an grave iſochrone deſcenſurum in curva N (e), pervenerit ad N ex a (a) per viam (a) (β) N, an per aliquam aliam, aut ſine deſcenſu ullo ob aliam cauſam eamdem celeritatem, atque directionem acquiſiverit. Ex infinitis tamen iſtis lineis iſochronis, in quibus grave ex N porrò ſine acceleratione deſcendere poteſt, ea celerrimum ipſi deſcenſum præbet, cujus vertex eſt ipſum punctum N, qualis eſt NE, quam recta AN horizonti perpendicularis tangit.

(2) Tempus deſcenſus per rectam a β, eſt ad tempus deſcenſus per

curvam

curvam βN, ut dimidia altitudo βM ad ipſam aβ: ac proinde ſi βM ſit dupla aβ, æqualia erunt tempora deſcenſuum per aβ & per βN. Quorum ratio manifeſta eſt: nam tempora deſcenſus uniformis ſunt inter ſe ut altitudines; & ex demonſtratis a *Galilæo*, tempus quo mobile percurrit altitudinem aβ motu accelerato, eſt duplum ejus, quo percurrit æqualem altitudinem βM (ut hoc loco fit, licèt per curvam βN) motu uniformi, qui celeritatem habet æqualem ultimæ per accelerationem acquiſitæ in β.

Hoc autem problema fateor me non Geometris primariis propoſuiſſe, qui interiorem quamdam Analyſin callent, ſed his potiùs, qui cum *erudito illo Gallo* ſentiunt; quem mea de *Carteſianis* pleriſque hodiernis (Magiſtri paraphraſtis potiùs, quàm æmulatoribus) querela ſuboffendiſſe videbatur. Tales enim, cum aliàs receptis inter *Carteſianos* dogmatibus, tum etiam analyſi inter ipſos pervulgatæ nimium tribuunt, adeo ut ſe ipſius ope quidvis in Matheſi (ſi modò velint, ſcilicet, calculandi laborem ſumere) præſtare poſſe arbitrentur: non ſine detrimento ſcientiarum; quæ falſa jam inventorum fiducia, negligentius excoluntur. His materiam exercendæ ſuæ Analyſeos præbere volueram, in hoc problemate, quod non prolixo calculo, ſed arte indiget.

Si quis tamen præreptam ſibi jam ſolutionem queratur, poterit *aliam iſochronam*, huic vicinam quærere, in qua non, ut hactenus, grave uniformiter recedat ab horizontali, (vel ad eam accedat,) ſed a certo puncto. Unde problema erit tale, *invenire lineam, in qua deſcendens grave recedat uniformiter a puncto dato, vel ad ipſum accedat.* Talis foret linea NQR, ſi ejus eſſet naturæ, ut ex puncto dato ſeu fixo A, ductis rectis quibuſcunque ad curvam, ut AN, AQ, AR, eſſet exceſſus AR ſuper AQ, ad exceſſum AQ ſuper AN, ut tempus quo deſcenditur per arcum QR, ad tempus quo deſcenditur per arcum NQ.

N°. XXVI.

DE CAUSA GRAVITATIS,

Et Defenſio Sententiæ Autoris de veris naturæ legibus contra Carteſianos.

Ex Actis Erud. Lipſ. ann. 1690.

CUm a me in his Actis demonſtratum eſſet, eamdem Motûs quantitatem non ſemper conſervari poſſe, ſed aliam conſtituendam naturæ legem; conatus eſt reſpondere D. Abbas *D. C.* ſed mente meâ non intellectâ, imputatiſque mihi opinionibus, a quibus eram alieniſſimus. De quo cùm fuiſſet admonitus, ſilendum putavit, ſive quòd agnoſceret ſibi ſatisfactum (quod tamen profiteri æquum fuiſſet) ſive, ut alias rationes taceam, quòd fortaſſe problema quoddam occaſione noſtræ controverſiæ a me propoſitum nollet attingere, quod poſtea prorſus ut a me factum erat, ſolvit celeberrimus *Hugenius*. Ego verò nuper demonſtrationem conſtructionis illius, atque ampliationem dedi in his Actis, & ne Dn. Abbas, vel alius ſolutionem ſibi præreptam quæri poſſet, problema nonnihil immutatum ita propoſui ad exercendam Carteſianorum analyſin: *in plano Lineam invenire, in qua deſcendens grave æqualiter æqualibus temporibus a puncto dato recedat, vel ad punctum datum accedat.* Interea alius eruditus Gallus (Cl. Dominus P.) Dno Abbati ſuccenturiatus Carteſianorum opinionem defendere aggreſſus eſt, *in Actis Erud.* A. 1689. p. 183. ſeqq. qui etſi ſtatum controverſiæ non ſatis attigiſſe videatur, volui tamen ejus quoque dubiis ſatisfacere, præſertim cùm alia non contemnenda attulerit, quæ illuſtrandi argumenti occaſionem præbent. Sic igitur ille: *Galilæum ſupponere*, quòd grave cadens æqualibus temporibus æquales acquirat velocitatis gradus. Hoc *Blondellum* libro de Bombis experimentis probare conatum, quaſi nulla ejus daretur *demonſtratio* a priori. Sed hanc *Hugenium* dediſſe, ponendo motum materiæ, quæ gravia movet, infinitæ eſſe celeritatis, præ velocitatibus gravium cadentium, quæ a nobis obſervari poſſunt, ac proinde grave ſive initio, cùm adhuc quieſcit, ſive poſtea cùm jam movetur, eodem modo, quoad quantitatem impreſſi motûs, ſeu augmentum celeritatis a motore affici, cum comparatione motoris ſemper pro quieſcente haberi poſſit. Quanta autem ſit motoris velocitas,

tas, ex *Hypotheſi Carteſiana* æſtimaſſe *Hugenium*, ponendo gravitatem oriri, dum materia quædam ſubtilis circa terram gyrata, & a centro recedens alia corpora versùs terram detrudat. Itaque experimento inquiſiviſſe, quanta vis centrifuga in parvi circuli gyro gravitati æquipolleret, atque inde collegiſſe, in magno circulo, qualis metitur ambitum telluris, materiam illam tanta velocitate moveri, ut millies ferè in una hora totum telluris ambitum percurrere poſſit. Atque hæc quidem pulchra ſunt, & digna *Hugenio*, ſed quæ Noſter de ſuo addit, non æquè admitti poſſunt. Putat ſcilicet hinc ſeſe tollere poſſe nonnullas difficultates graves, quæ doctis negotium faceſſiverunt. Nimirum Viri clariſſimi *Sturmius*, & *Bernoullius* in his *Actis* mutua συζητήσει, conſideratione dignum judicaverant, quî fieret ex hypotheſi Carteſiana, quòd gravia non potiùs ad axem, quàm centrum detruderentur. Hanc difficultatem Noſter ceſſare putat, ſi modò conſideretur, velocitatem materiæ gravitatem efficientis incomparabiliter eſſe majorem velocitate ipſius gyri telluris; ita enim differentiam velocitatis, quæ eſt in æquatore, vel in alio quocunque parallelo, nullius momenti eſſe comparatione velocitatis illius maximæ. Eadem (ſi ipſi credimus) facilitate *meo argumento* ſatisfieri contra Carteſianos prolato. Nempe quia infinita fit motoris gravium velocitas. Hinc proinde ac ſi grave quieſceret, ut ab initio, ſemper æqualibus temporibus tantundem ictus imprimi, adeoque vires eſſe ut tempora, non ut ſpatia aſcenſuum, vel deſcenſuum, quemadmodum ego quidem exiſtimaveram. Poſtremò cùm *Autor Novellarum Reipublicæ literariæ* eſſet veritus, ne ipſa materia *primi Elementi* vi centrifuga a Sole recederet, præ globulis *ſecundi* Elementi, atque ita diſpergeretur Sol, item ne vortex telluris diſpergeretur in verticem Solis, quippe majores longè circulos deſcribentem, adeoque minori (cæteris paribus) vi centrifuga præditum; Reſpondet introducendo quamdam *partium congruitatem*, vel incongruitatem, quæ retineat alioquin aufugituras. Hactenus ille.

Ad quæ, ſequentia repono: (1) *Galilæus* non *ſuppoſuit* tantùm in gravibus motum æqualibus temporibus æqualiter acceleratum, ſed etiam rationibus, atque experimentis confirmare niſus eſt, nec certè temerè in eam ſententiam devenit. (2) Confundit noſter objector *demonſtrationem* veritatis alicujus cum cauſæ redditione per quamdam hypotheſin, nec fortaſſe *Hugenii* conſilium ſatis percepit, cujus inſtitutum (quantum aſſequi licet) in ea, quam poſuimus ratiocinatione, non fuit demonſtrare, eam eſſe accelerationis gravium naturam, quam diximus; ſed poſito (ex phænomenis forſan) talem eſſe, explicare modum veriſimilem, quo poſſit oriri. (3) Abſolutam autem hujus veritatis demonſtrationem dabimus a priori in *dynamicis* noſtris, nulla hypotheſi adhibita, tantum ſupponendo ex vulgaribus phænomenis, grave in loco altiore, aut depreſſiore ejuſdem eſſe ponderis, quod in differentiis altitudinum minoribus, utique quoad ſen-

ſum, indubitabile eſt. (4) *Hypotheſis*, quam *Carteſianam* vocat, potiùs *Kepleriana* eſt, etſi a *Carteſio* magis exculta. Nam primus omnium *Keplerus* invenit gravitatis originem adumbrari poſſe, dum fluidum aliquod ex partibus ſolidioribus conſtans in gyrum actum, & a centro recedere tentans, minus ſolida innatantia ad centrum detrudit. Hac ejus cogitatione, quemadmodum & aliis pluribus, in rem ſuam uſus eſt *Carteſius*, autorem (pro more ſuo illaudabili) diſſimulans, quemadmodum & ex *Kepleri paralipomenis in Vitellionem* ſumſit explicationem æqualitatis anguli incidentiæ, & reflexionis, per compoſitionem duorum motuum, & a *Snellio* didicit vèram regulam refractionis. Et ſanè licèt vir ſummus fuerit *Carteſius*, his tamen artificiolis multum ſolidæ laudis amiſit apud judices intelligentes. (5) Etſi rectè aſſumatur, incomparabiliter majorem eſſe velocitatem materiæ gravitatem facientis, quàm ipſorum apud nos gravium, non tamen neceſſarium hoc eſt ad explicandam gravium accelerationem æquabilem per vim centrifugam, uti Objector exiſtimare videtur, forſan non percepta ſatis *Hugenii* mente. Quod ut appareat, fingamus tubum horizontalem TV longiſſimum, utrinque clauſum, plenum hydrargyro, Tab. IX. Fig. 42. in quo prope extremum V ſit in loco G, globus G vitreus, vel ex alia materia factus, quæ minus denſa, vel minus ſolida ſit hydrargyro, nec ab eo corrodatur. Si jam tubus hic cylindricus in eodem plano horizontali manens, rotetur circa alterum extremum T immotum, tunc Mercurius recedere tentans à centro, tendenſque versùs V, inde pellet globum, eumque coget tendere versùs T, ſine ullo aſcenſu. Imò etſi tubus nonnihil ad horizontem ſit inclinatus, ita ut extremum T ſit inferius quàm V, nihilominus vi circulationis ſufficienter rapidæ effici poterit, ut globus in hydrargyro alioqui nataturus deſcendat ab V verſus T, aptiſſima gravitatis repræſentatione. Cauſa autem, cur hæc vis centrifuga materiæ recedentis a centro alia minùs recedentia ad centrum pellat, diſtinctè ita explicari poteſt, quòd materia B, (*Mercurius*) recedens a centro T, ſeſe inſinuare conatur inter C (*Mercurium*) & corpus 2 G (globum) cumque *Mercurius* C non poſſit amplius propelli, obſtante operculo tubi V, repelletur corpus 2G verſus T ſeu ad 3 G. His jam poſitis, cùm continuè creſcat celeritas, qua globus G tendit versùs centrum T, contrà tubi circulantis celeritas versùs centrum decreſcat, fiet alicubi, velut in 2G, ut tubi circulantis, & globi recta ad centrum tendentis æqualis ſit velocitas. Nihilominùs tamen, ſi tanta fingatur tubi longitudo, ut punctum 2 G adhuc longè abſit a centro T, exempli causâ multis miliaribus, tunc globo tendente porrò a 2 G ad 3 G intervallo licet multorum paſſuum, non mutabitur notabiliter celeritas circulationis, nec diſcrimen erit notabile inter 2 G & 3 G, adeoque nec mutabitur notabiliter vis centrifuga, quæ globo inter 2 G, & 3 G continuè imprimitur; adeoque perinde erit, ac ſi globus in G eodem loco maneret, æqualibuſque temporibus

poribus æquales impreſſiones reciperet. Jam idem, quod in tubo finximus, in æthere contingit reverâ, ſi quidem ab ejus vi centrifuga oritur gravitas. Nam ob maximam a centro (nempe telluris) diſtantiam exiguum intervallum, quo grave apud nos inter cadendum centro accedit, nullum facere poteſt diſcrimen notabile, ac proinde vel hinc orietur æqualibus temporibus æqualis celeritatum impreſſio, etſi non eſſet tanta ætheris rapiditas. At ſi gravitatem non a vi centrifuga circulationis, ſed materia quadam, gravia venti inſtar versùs terram pellente petamus, tum demum ad explicanda proportionalia temporibus gravitatis incrementa, neceſſaria eſt illa celeritas venti incomparabiliter major eâ quàm gravia apud nos acquirunt.

(6) Etſi valde dudum inclinaverim ipſe ad gravitatem a vi centrifuga materiæ æthereæ circulantis repetendam, ſunt tamen aliqua quæ dubitationes graviſſimas injecere. Et ut cætera nunc taceam, neceſſe eſt ætherem hunc circa terram moveri non in æquatore, & parallelis, ſed in circulis magnis, quales ſunt meridiani (alioqui gravia non ad centrum, ſed axem terræ tenderent) ſed ita neceſſe eſt, ætherem illum versùs polos eſſe multo confertiorem; unde non apparet, quomodo gravia eodem modo in locis æquatori, & polo vicinis verſus centrum impellantur, quod tamen fieri, nec diſcrimen obſervari adeo notabile, phænomena docent. Huic difficultati ſi remedium haberetur, faciliùs credi poſſet excogitata a *Keplero* cauſa gravitatis. (7) Alia ejuſdem aſſignari poſſet cauſa non obnoxia huic difficultati, concipiendo diſploſionem materiæ cujuſdam ex globo telluris, aut alterius ſideris in omnes partes propulſæ, quæ radiationem quamdam producat, radiationi lucis analogam; ita enim habebimus receſſum a centro materiæ æthereæ, quæ corpora craſſiora eamdem (ut alibi explicabo) vim recedendi non habentia versùs centrum depellet, ſeu gravia reddet. (8) Cogitandum etiam relinquo, an quæ cauſa globum terræ, cùm fluidus eſſet, rotundarit; ſcilicet varius in omnem plagam tendens fluidi ambientis motus (qualis guttas olei in aqua format) qui a diverſæ naturæ partibus turbatur etiam partes telluris ad ipſam contrudat, dum interim ipſa tellus ſimiliter heterogenea, ut paulo antè diximus, expellit a ſe. (9) Miror quomodo clariſſimus Objector in animum induxerit ſuum, poſſe hypotheſi infinitæ celeritatis circulanti ætheri attributa, tolli difficultatem, quæ cùm alios, tum VV. Clariſſ. *Sturmium*, & *Bernoullium* exercuit. Nam non ideo ad axem potiùs quàm centrum telluris deprimi dicentur gravia, quia major celeritas gyri terreni ſub æquatore, quàm in parallelis, ſed quia ipſa materia ætherea in circulis minoribus æquatori parallelis gyrata, & à centris eorum recedere tentans, gravia ad centra cujuſque circuli, quæ non in centrum telluris, ſed alias axis puncta cadunt, pelleret. Non igitur de celeritatis, ſed directionis, differentia quæritur. Nec video quomodo in hac hypotheſi occurri malo

poſſit,

poſſit, niſi ætheri gravitatem immediatè producenti motum velut magneticum aſcribamus, non in æquatore, & parallelis, ſed in meridianis, ut jam olim a me annotatum eſt, tum in ſcheda edita, tum in literis ad R. P. *Kochanskium*, qui eadem movebat. (10) Materiam *primi Elementi* Carteſiani, *globuloſque ſecundi*, luminis autores non multum moror; fictitia enim ambo cenſeo, & pro demonſtrato habeo, nec primum, nec ſecundum Elementum in natura dari, nec lumen in eo, quem *Carteſius* deſcribit, conatu conſiſtere. Cæterum quæ cauſa guttas liquorum format, eadem & vorticem Solarem in mundo, terreſtremque in Solis vortice continet, explôſæque materiæ ſuos limites circumſcribit, ne dum a centro vorticis recedere tentat, diſpergatur. (11) Scilicet in omni fluido motus eſt varius in omnes plagas, qualem videmus in aqua baculo variè moto agitata; is autem interpoſitis partibus alterius texturæ, motuſque, nec ſatis perviis perturbatur, & obſtacula repellere ac diminuere tentat: minùs autem obſtare conſtat, quæ in figuras ejuſdem ſuperficiei capaciſſimas colliguntur. Porrò non *vortices* tantùm ſeu (nucleo demto) *bullæ*, ſed & omnes conſiſtentiæ, ſeu *cohæſiones* primigeniæ, atque ut ita dicam, ſtamina rerum, & baſes texturarum a cuique maſſæ propria, & conſpirante motûs ratione oriuntur, quibus conſtitutis primæ firmitatis cauſis, tum demum corporum (firmitatem jam hinc aliquam habentium) porrò major aut minor contactus, atque inde ob ambientium reſiſtentiam nata cohæſio, in rationes venire poteſt. Motus ſcilicet, vel, ſi mavis, vis motrix id unum eſt, quod materiam dividit, & *heterogeneam* reddit, unde *congruitas*, incongruitaſque cùm per ſe continua ſit atque uniformis, ac ne figuræ quidem, & partes in ea reales, ſeu actu determinatæ intelligi aliter poſſint. Itaque cohæſionis quoque principium eſt, ac proinde oritur *fluiditas* a vario motu, *firmitas* a conſpirante, ut jam olim explicuimus; vel potiùs nihil tam fluidum eſt, quin habeat firmitatis, nihil tam firmum, quin habeat fluiditatis gradum; ſed denominationes fiunt a prædominante ad ſenſum.

(12) Sed jam tandem ad ſententiæ meæ defenſionem veniendum eſt, qua fortaſſe non magnoperè indigere adversùs objectionem videri poſſit, quod in controverſia eſt aſſumentem, nec ratiocinationis meæ vim attingentem. Quia tamen Objectori tantum tribuo, ut quæ ipſum decepere, etiam alios fallere poſſe putem, vel potiùs quia agnoſco aliquid verbis meis ad ſummam claritatem defuiſſe, tentabo an ipſimet, tanquam æquo judici, ſatisfacere poſſim. Demonſtrabo igitur propoſitionem, quam negat, eaque occaſione rem omnem (ſpero) in clara luce collocabo, poſtremò erroris fontem detegam. Sed ante omnia logomachiæ excludenda occaſio eſt; erunt enim, qui ſibi permiſſum dicent *vim* definire per quantitatem motûs, & duplicata corporis dati celeritate, vim ejus duplicatam dicere; neque hanc ego libertatem cuiquam nego, quam mihimet concedi poſtulo.

Sed

Sed cùm controverſia nobis ſit realis, utrum ſcilicet motus conſervetur, an verò potiùs eadem quantitas virium eo ſenſu, prout a me accipitur, id eſt in ratione compoſita non ponderis, & celeritatis, ſed ponderis, & altitudinis, per quam corpus ab agente vim habente attolli poteſt, facilè de verbis tranſigemus. Itaque *vim inæqualem* habere hoc loco definiam, quorum unum ſi ſurrogare liceret in alterius locum, oriri poſſet motus perpetuus mechanicus; & ſurrogatum quidem habere dicetur *vim majorem*, alterum verò *minorem*; quod ſi ex ſurrogatione eorum tale abſurdum, quale eſt motus perpetuus, oriri nequeat, *vires* ipſorum dicemus *æquales*. Hac definitione poſitâ facilè tanquam corollarium concedet Cl. Objector, *eamdem vim in corporibus conſervari*, ſeu eamdem eſſe potentiam cauſæ plenæ, & effectûs integri, vel ſtatûs præcedentis, & ex eo nati ſequentis. Ne ſcilicet ſuccedat præcedenti, aliquid fortius, ex quo motus perpetuus mechanicus oriri poſſet. Quale virium lucrum impoſſibile eſſe non diffitebitur, opinor, ut idem proinde ſit in phyſicis & mechanicis reducere ad motum perpetuum mechanicum, & reducere ad abſurdum. Hoc autem eodem ſenſu neceſſe eſt quoque *vires eſſe in ratione compoſita ponderum & altitudinum*, ſeu quod idem eſt, ſummam productorum ex ponderibus in altitudines (ad quas pondera attolli ex datis poſſunt) ductis, non verò ſummam factorum ex ponderibus in celeritates, ut Carteſiani ſibi perſuaſerant, conſervari. Quod ita nunc demonſtrabo: ponamus (in exempli gratiam) globum A 4 librarum ex altitudine unius pedis 1 A E per lineam inclinatam 1 A 2 A deſcendere, donec in planum horizontale EF perveniat, ibique procurrat ex 2 A in 3 A, uno celeritatis gradu per deſcenſum quæſito. Porrò in eodem plano horizontali quieſcat alius globus B unius libræ, in loco 1 B. Ponamus jam porrò, omnem potentiam globi A transferri debere in globum B, ita ut A quieſcente in horizontis loco 3 A, ſolus deinde moveatur globus B. Quæritur quantum celeritatis accipere debeat globus B, ut tantundem virium accipiat, quantum globus A habuit. Carteſiani dicent, globum B quadruplo minorem ipſo A accepturum celeritatem 4 graduum, ſeu quadruplo majorem celeritate ipſius A. Tantumdem enim virium habere A, 4 librarum, celeritate ut 1. quantum B, unius libræ celeritate ut 4. Sed ego ex tali ſurrogatione oſtendam oriri poſſe motum perpetuum, ſeu abſurdum. Nam corpus B libræ 1, celeritatem habens ut 4, ope ejus, motu ſurſum directo, (ut ſi procurrendo ex 1 B in 2 B, incidat in lineam inclinatam 2 B 3 B) aſcendere poterit ad 3 B ſeu ad altitudinem perpendicularem F 3B, pedum 16: quia corpus A gradum celeritatis ut 1 acquiſierat deſcendendo ex altitudine perpendiculari pedis 1, adeoque rurſus aſcendere poſſet ad pedem 1. Ergo gradu celeritatis quadruplo aſcendi poteſt ad pedes 16. Sunt enim altitudines, ad quas vi celeritatum aſcendi poteſt, ut celeritatum quadrata. Sed jam hinc oriretur motus perpetuus, ſeu effectus po-

Tab. X. Fig. 43.

potentior causâ. Nam globus B unius libræ elevatus jam ad 16 pedes, a nobis porrò ſic adhiberi poterit, ut rurſus inde deſcendens in horizontem, ad 4 B, facili quadam machinatione, verbi gratiâ, ope ſtateræ rectilineæ inclinatæ, attollere poſſit globum A librarum 4 in horizontis loco 3 A exiſtentem, ad altitudinem perpendicularem prope 4 pedum. Sit enim ſtatera pertingens a 3 A ad 3 B, in fulcro, ſeu centro librationis C, diviſa in brachia longitudine inæqualia (licèt æqualia pondere) C 3 A, & C 3 B, ſic ut brachium C 3 B ſit paulo pluſquam quadruplum brachii C 3 A. Itaque globus B, incidens in extremum ſtateræ 3 B, globum A, alteri extremo 3 A ſuperſtantem vincet, attolletque; quia major eſt reciprocè ratio diſtantiarum a centro (nempe major quadrupla ex conſtructione) quàm ponderum (quæ ex hypotheſi eſt quadrupla) & proinde B deſcendendo uſque ad horizontem per altitudinem perpendicularem 3 B F, 16 pedum, ex 3 B in 4 B, attollet A ex 3 A in 4 A, ad altitudinem perpendicularem paulo minorem pedibus 4, defectu tam exiguo, quàm velis. In praxi ſufficit attolli A ad altitudinem perpendicularem pedum circiter 3, vel etiam adhuc minorem. Quod eſt abſurdum. Initio enim A erat tantùm elevatum ad pedem 1, ipſo B exiſtente in horizonte; nunc verò in ſtatu finali, B reſtituto ad horizontem, A non reſtitutum eſt ad pedem 1, quod ad ſummum fieri poterat remotis accidentalibus impedimentis, ſed aſcendit ad pedes plus quàm 3 & prope 4. Idque vi ipſius deſcenſus ſui ex unico illo pede, licèt per interpoſitum corpus B, quod tamen nullam novam vim contribuiſſe, ſed ſolam vim ipſius A habuiſſe ſuppoſuimus. Ita penè triplum virium lucrati ſumus, & ut ita dicam, ex nihilo eduximus: quæ quidem abſurda eſſe nemo intelligens diffitebitur. Nec jam motus perpetuus longè quærendus eſt. Facile enim eſt efficere, ut globus A ex loco 4 A, redeat ad primum locum 1 A, & priùs in itinere, (cùm lapſum habeat prope trium pedum) effectum aliquem mechanicum præſtet: alia pondera elevet, machinas circumagat, &c. Similiterque globus B, ſi locus 4 B tantillo altior ponatur horizonte, interim (dum A redit ad 1 A) redire decurrendo poterit ad locum 1 B; adeoque omnia redibunt ad ſtatum priorem, effectu tamen mechanico notabili per ſupererogationem peracto; idemque porrò repeti poterit luſus. Quæ utique ferri non poſſunt. Hinc ut obiter dicam, ex Methodo noſtra præſenti, inventores motûs perpetui in ſpeciem plauſibilis plerumque præbebunt occaſionem novorum theorematum, quibus fallacia detegetur, oſtendendo (quodam, ut ita dicam, *Algebræ Mechanicæ* genere) *æquationem* latentem *inter cauſam & effectum*, nulla arte violabilem. Et hujuſmodi Æquatio nobis quoque hoc loco profuit, ad veras translationis motuum leges inveniendas. Itaque dicendum eſt B (unius libræ) ſi deberet accipere potentiam ipſius A (quatuor librarum) ſeu ſi A, quod priùs ſolum movebatur, deberet redigi ad quietem, motu jam ſolùm exiſtente

in

in B quod prius quieverat; remoto omni alio agente, vel patiente, quod aliquam novam vim addat, vel partem prioris abſorbeat, tunc B non niſi duplum debere accipere celeritatem ejus, quam habuerat A. Itaque enim B non niſi ad 4 pedes aſcendere poterit, nec A (licet ſtateram adhibeas) reſtitui niſi ad unum, nec proinde tale orietur abſurdum, ut ſtatus poſterior, ſeu effectus fiat potior cauſa, ſeu ſtatu, ex quo fuit natus, ſed omnia præcisè compenſabuntur. Itaque eadem opera concluſimus contra Carteſianos, *non ſemper debere conſervari quantitatem motûs*. Cùm enim prius A exiſtente in motu, haberemus corpus ut 4 celeritate præditum ut 1; nunc poſt translationem habemus corpus 1 celeritate præditum ut 2; unde quantitas motûs in poſteriore rerum ſtatu fit tantùm dimidia prioris. Erunt alii caſus, ubi augebitur quantitas motûs. Idemque eſt in aliis plurimis translationibus virium, dum corpora in ſe invicem agunt, ut *quantitas motûs* differat a *quantitate virium* a nobis explicata (quam *quantitate effectus* æſtimari oſtendimus) adeoque ſervari nequeat. Et generaliter ſi ſit corpus A præditum initio celeritate e, corpus verò B celeritate y; at poſt actionem ſit corpus A præditum celeritate (e), corpus autem B celeritate (y). Et ſimiliter altitudines, ad quas corpora A & B aſcendere poterant, ante actionem ſint (reſpectivè) x & z, poſt actionem verò (x) & (z); aio debere eſſe $A\,x + B\,z = A\,(x) + B\,(z)$ ut eadem ſervetur potentia; unde utique ſequitur, non ſemper poſſe eſſe $A\,e + B\,y = A\,(e) + B\,(y)$, ſeu non poſſe eandem ſemper ſervari quantitatem motûs. Supereſt, ut *erroris fontem* paucis detegamus. Et quidem Clariſſ. Objector infinita ætheris motoris celeritate ne quidem opus habet, & libentiſſimè ipſi ſine probatione concedo, celeritates acquiſitas, vel perditas libero deſcenſu, vel aſcenſu, eſſe ut tempora. At ego VIRES MOTRICES, id eſt *eas quæ conſervandæ ſunt*, oſtendi non eſſe æſtimandas gradibus celeritatis. Pleroſque autem doctiſſimos alioqui Viros decepit præjudicium ex ſchola, quo concipiunt motum, & celeritatem (motûs gradum) tanquam realem quamdam, & abſolutam in rebus entitatem; & quemadmodum eadem ſalis quantitas per minorem aut majorem aquæ copiam diffunditur, qua ſimilitudine, & *Rohaultius* (quantum memini) utebatur. Unde mirum ipſis videtur, augeri vel minui poſſe quantitatem motûs ſine miraculo Dei creantis, vel annihilantis. Sed motus in reſpectu quodam conſiſtit, quin & cùm rigidè loquendo nunquam exiſtat, non magis quàm tempus, aliaque tota, quorum partes ſimul eſſe non poſſunt, eo minus mirum eſſe debet, quantitatem ejus eamdem non conſervari. Sed vis ipſa motrix, (ſeu ſtatus rerum, unde mutatio loci naſcitur) eſt abſolutum quiddam & ſubſiſtens, ejuſque adeo quantitatem a natura non curari. Unde etiam diſcimus *aliquid aliud in rebus eſſe, quàm extenſionem, & motum*, quod quanti momenti ſit, ſciunt intelligentes. Etſi autem prima ſpecie videatur, duplicata celeritate ejuſdem

corporis, duplicari & vim ejus, admitti tamen hoc non poteſt. At, inquies, ſi corpus A habeat gradum aliquem celeritatis, & eidem corpori rurſus ſuperveniat æqualis priori celeritatis gradus, utique id quod erat prius videtur perfectè duplicatum, ſeu repetitum: ſed reſpondeo negando, tum demum enim id, quod prius erat, erit exactè duplicatum, cùm corpori A celeritatem habenti ut 1, adjicietur aliud corpus B, æquale ipſi A, etiam celeritatem habens ut 1, quo facto fateor & vim duplicatam. Quomodo autem potentiæ multiplicatio obtineatur, corpore licèt non multiplicato, habetur methodo ſuprà explicata. Fuere etiam quibus errandi cauſa inde præbita eſt, quod putarunt in potentia æſtimanda non ſolius effectûs, qui producitur, hoc loco, habendam rationem, ſed & temporis, quo producitur. Itaque non debere potentiam æſtimari ſola ratione compoſita ponderis, & altitudinis, ad quam pondus per potentiam attolli poteſt. Et ſanè verum eſt, temporis rationem quoque habendam in illis effectibus producendis, ubi eadem potentia longiore tempore conceſſo majorem effectum producere poteſt. Uti fit cùm globus datam habens celeritatem, potentiam habet pondus ſuum transferendi in plano horizontali per datum ſpatium tempore dato; ſed hoc in effectibus, potentiisque, de quibus hic agitur, ſecus eſt, ubi vis agendo conſumitur, & quidquid vi præditum eſt, (ut arcus tenſus ad certum gradum, corpus habens certam velocitatem) ſi ſecundùm unum operandi modum totam ſuam actionem impendat in datum pondus elevandum ad certam altitudinem, nulla alia machinatione, vel artificio idem pondus faciet altiùs aſſurgere, quantocunque tempore conceſſo. Unde fruſtranea fit temporis conſideratio. Cùm enim pondus illud ex ea altitudine delabens poſſit illam ipſam vim (ut tenſionem dictam illius arcûs, velocitatem dictam illius corporis) præcisè reproducere; (abſtrahendo animum ab impedimentis accidentalibus) utique pondus altiùs ſublatum poſt tempus quantumcumque, mox relabendo non tantùm vim dictam primam reproducere poſſet, ſed & aliquid præterea efficere, atque ita daretur modus per ſufficientem temporis longitudinem perveniendi ad motum perpetuum mechanicum. Quod eſt abſurdum.

N°. XXVII.

N°. XXVII.

AD EA,

QUÆ VIR CLARISSIMUS J. BERNOULLIUS

Menſe Majo anni 1690. in Actis Erud. Lipſ. publicavit,

RESPONSIO.

Ex Actis Erudit. anni 1690.

DUo dedit Vir Cl., unum pro ſolutione problematis olim a ſe propoſiti, alterum occaſione problematis mei, ſuo olim in Diario Eruditorum, ut video, propoſito ſatisfacit. Mei verò, cujus ſolutionem celeberrimus *Hugenius*, ſynthefin ego publicaveramus, analyſin profert ſecundùm leges calculi novi a me in his Actis prolati, quem voco differentialem, vel incrementalem. Et quidem Analyſin illam mei problematis eruere utique non erat cujuſvis, præſertim cùm artificium talis calculi adhuc ſit paucis cognitum, nec quiſquam mihi ſit notus, qui meliùs quàm V. Cl. mentem meam penetraverit. Propoſuit præterea mihi ſolvendum problema aliud, de quo mox dicam, ubi priùs vicem reddens, fundamentum ſolutionis ab ipſo datæ circa problema proprium in dicto Diario propoſitum, expoſuero.

Sic igitur ille: duo aleatores ludunt una teſſera, ea conditione, ut qui primus aſſignatum in ea punctorum numerum jecerit, vincat. A primo inſtituit unum jactum, & B unum; dein A duos jactus, conſequenter & B duos; hinc A tres, & B tres &c. *Vel*: A inſtituit unum jactum, dein B duos, hinc A tres, poſtea B quatuor, &c. quouſque alteruter eorum vincat. Quæritur ratio ſortium. Rem ſic exhibeo.

Sit 5 ; 6 $= n$ erit 1 : 6 $= 1 - n$.

In caſu priore,

1	n	n^2	n^3	n^4	n^5	n^6	n^7	n^8	n^9	n^{10}	n^{11}	&c.
A	B	A	A	B	B	A	A	A	B	B	B	&c.

Sors ipſius A,

$1 + n^2 + n^3 + n^6 + n^7 + n^8 + n^{12} + n^{13} + n^{14} + n^{15}$ &c. mult. per $\overline{1 - n}$.

 unde

unde facta actu ipſo multiplicatione, prodibit

$1 - n^1 + n^2 - n^4 + n^6 - n^9 + n^{12} - n^{16}$ &c.

At Sors ipſius B,

$n + n^4 + n^5 + n^9 + n^{10} + n^{11} + n^{16} + n^{17} + n^{18} + n^{19}$ &c; mult. per $\overline{1 - n}$

unde facta actu ipſo multiplicatione, prodibit

$n^1 - n^2 + n^4 - n^6 + n^9 - n^{12} + n^{16}$ &c.

In caſu poſteriore:

$1 \; n \; n^2 \; n^3 \; n^4 \; n^5 \; n^6 \; n^7 \; n^8 \; n^9 \; n^{10}$ &c.
A B B A A A B B B B A &c.

Sors ipſius A,

$1 + n^3 + n^4 + n^5 + n^{10} + n^{11} + n^{12} + n^{13} + n^{14}$ &c. mult. per $\overline{1 - n}$

ſeu facta multiplicatione,

$1 - n^1 + n^3 - n^6 + n^{10} - n^{15}$ &c.

At Sors ipſius B

$n + n^2 + n^6 + n^7 + n^8 + n^9 + n^{15} + n^{17} + n^{18} + n^{19} + n^{20}$ &c. mult. per $\overline{1 - n}$

ſeu facta multiplicatione,

$n^1 - n^3 + n^6 - n^{10} + n^{15} - n^{21}$ &c.

Et in utroque caſu $A + B = 1$, poſito unitatem eſſe totum jus in præmium ludi. Eademque Methodus ſuccedit in caſibus aliis ſimilibus, etiamſi plures eſſent luſores, & teſſeræ, faciliſque hinc ſolutio in numeris quantumlibet exactis habetur. Perplacet autem problema, quod cùm ſimplex admodum videatur, ad ſeries tamen non ſatis adhuc examinatas ducit.

Problema aliud mihi propoſuit his verbis. *Analyſin Autoris calculo differentiali inſtitutam nunc pando eum in finem, ut ad par officii genus publico præſtandum, tentandamque ſua methodo problematis deinceps proponendi ſolutionem invitem.* Ipſum autem problema huc redit: *Invenire lineam, in quam ſe funis duabus extremitatibus ſuſpenſus proprio pondere curvat.* Supponitur autem, funem manere ejuſdem longitudinis, ut catena, non verò extendi, aut contrahi ut filum. Propoſitum hoc problema inde a *Galilæi* temporibus celebre, nondum, quod ſciam, ſolutionem accepit. Itaque ab onere impoſito jure me poſſem excuſare, præſertim aliis rebus diſtractiſſimus. Fecit tamen humanitas clariſſimi Viri, ut primæ ejus compellationi deeſſe noluerim. Aggreſſus itaque ſum, quod hactenus ne tentaveram quidem, & occluſos aditus clave mea feliciter reſeravi.

Paulo autem implicatius eſt hoc problema illo priore meo, & ſingularem quemdam Methodi noſtræ uſum oſtendet; itaque operæ pretium putavi, ante publicationem ſolutionis meæ dare ſpatium aliis quoque exer-

cendæ

cendæ artis. Hoc enim velut lapide lydio cognoſcemus optimas Methodos, quod plurimum refert ad ſcientiæ perfectionem: præſertim cùm hic non prolixo calculo, ſed artificio tantùm ſit opus. Inprimis autem Nobiliſſimus *D. T.* qui præclara in hoc genere ſpondet (vid. Act. Feb. hujus anni p. 68. 69.) rogandus eſt, ut ſuæ quoque Methodi vires hic experiri velit. Quod ſi *ante anni exitum* nemo ſolutionem a ſe repertam eſſe ſignificabit, ego meam, Deo volente, dabo. Similiter non inutile erit ad profectum ſcientiæ tentari problema a me propoſitum in locum ejus, quod ſolverat *Hugenius*, ut ſcilicet quæratur *linea*, *quam percurrens grave uniformiter recedat a dato puncto*, *vel accedat ad datum punctum*. Hujuſmodi problemata cùm non ſint in poteſtate Algebræ, vel ſpecioſæ vulgo cognitæ, proderunt ad excitandos eos, qui nimium tribuentes iis, quæ didicere, quaſi nihil magni momenti ampliùs quærendum in hoc genere reſtaret, non ſine detrimento reipublicæ literariæ ab illa diligentia remittunt, quæ ad ſcientiam augendam neceſſaria eſt.

N°. XXVIII.

ADDITIO AD SCHEDIASMA DE MEDII

Reſiſtentia, (a) publicatum in Actis anni 1689.

Ex Actis Erudit. Lipſ. ann. 1691.

POſtquam Meditationes quaſdam de Medii reſiſtentia in his Actis publicavi, venere in manus meas, quæ Viri in Mathematica naturæ cognitione præcellentiſſimi *Hugenius* & *Newtonus* in noviſſimis operibus de eodem argumento ſunt commentati. Animadverti autem eos reſpectivam tantùm (quam voco) reſiſtentiam attigiſſe, qualem ſcilicet ſentit corpus in liquido tenacitate notabili carente, velut in aëre; non verò abſolutam, quæ oritur a tenacitate medii, aut aſperitate ſuperficiei contactus attritum efficiente, inter quas multum intereſſe jam tum oſtendi; cùm reſpectiva habeat reſpectum ad celeritatem mobilis, eaque aucta creſcat, abſoluta non item. Circa reſpectivam video nos iiſdem fundamentis inædificaſſe, etſi prima fronte aliud videri poſſit. Ipſi enim ſtatuunt reſiſtentias in duplicata ratione velocitatum; ego verò abſolutè loquendo reſiſtentias (quas decrementis velocitatis a medii denſitate ortis exiſtimo) eſſe dixi in ratione compoſita velocitatum, & elementorum ſpatii, quæ ſcilicet velocitatibus

(a) Vid. N°. XXIII.

tibus reſpondentibus decurri inchoantur, unde jam elementis temporis ſumtis æqualibus (quo caſu elementa ſpatii decurrenda velocitatibus proportionalia ſunt) utique reſiſtentiæ erunt in duplicata ratione velocitatum; quod etiam annotaveram ſub Art. 5. prop. 3. Nec diſſentit concluſio circa relationem inter tempora, & velocitates in gravi per medium deſcendente. Hanc enim ad ſectorem hyperbolicum reduxit *Newtonus*, ad ſeriem infinitam *Hugenius*, quam invenit pendere a quadratura hyperbolæ, nos ad logarithmos artic. 5. prop. 4. tanquam perfectiſſimum talia exprimendi modum præbentes. Nempe ſit velocitas *maxima* a, præſens b, tempus t fiet $= \int, dv. aa : \overline{aa} - \overline{vv}$ quo poſito, t ſunt ut Logarithmi rationum $a + v$ ad $a - v$, fit etiam $t = \frac{1}{1} v + \frac{1}{3} v^3 + \frac{1}{5} v^5 + \frac{1}{7} v^7$ &c. poſita a unitate. Circa compoſitionem motus in medio reſiſtente rectiſſimè monuit celeberrimus *Hugenius*, eam non ita ſimpliciter locum habere, ut in motu libero, itaque ea quam expoſui Articulo 3 & 6 ita accipienda eſt verbi gratiâ, ac ſi corpus aliquod moveatur in medio ſecundùm unam legem motûs compoſiti, & huic ipſi corpori (veluti navi) ſit incluſum medium ejuſdem cum priori naturæ in quo iterum aliud corpus feratur, cujus jam motus ex communi navis motu, & ipſius proprio, velut projectionem faciet, ita ſe habentem, ut deſcripſimus.

N°. XXIX.

N°. XXIX.

QUADRATURA ARITHMETICA

Communis Sectionum Conicarum, quæ centrum habent, indeque ducta Trigonometria Canonica ad quantamcumque in numeris exactitudinem a Tabularum neceſſitate liberata: cum uſu ſpeciali ad lineam Rhomborum nauticam, aptatumque illi planiſphærium.

Ex Actis Erud. Lipſ. ann. 1691.

JAm anno 1675 compoſitum habebam Opuſculum Quadraturæ Arithmeticæ amicis ab illo tempore lectum, ſed quod materia ſub manibus creſcente limare ad editionem non vacavit, poſtquàm aliæ occupationes ſupervenere: præſertim cùm nunc prolixius exponere vulgari more, quæ Analyſis noſtra nova paucis exhibet, non ſatis pretium operæ videatur. Interim inſignes quidam Mathematici, quibus veritas primariæ noſtræ propoſitionis dudum in his Actis publicatæ innotuit, pro humanitate ſua noſtri qualiſcumque inventi candidè meminere. Quos inter Ill. *Hugenius* etiam analogum aliquid in Hyperbola eleganter adjecit, a noſtri olim ſchediaſmatis analogia diverſum. Ut enim nos dederamus ſeriem $\frac{1}{1}t - \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{5}t^5$ &c. per circulum; ita ipſe $\frac{1}{1}t + \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{5}t^5$ &c. per Hyperbolam primariam exhiberi notavit, de quo adde dicta ad ſchediaſma hic præcedens. Et ſanè etiam in Opuſculo noſtro inedito, nec ipſi viſo, inter alias propoſitiones una continebatur ſatis memorabilis ob generalitatem, ambaſque illas, & plura complexa: *Sectorem, curva conica a vertice incipiente, & radiis ex centro eductis, comprehenſum, arithmeticè quadrare.* AT, portio rectæ in vertice tangentis, comprehenſa inter verticem A, & T occurſum tangentis alterius extremi vocetur t, & CB ſemiaxis conjugatus (ſeu recta, quæ poteſt rectangulum ſub dimidiis lateribus recto, & transverſo) ſit unitas, erit ſector CAFEC æqualis rectangulo comprehenſo ſub AC ſemilatere tranſverſo, & recta, cujus longitudo ſit $\frac{1}{1}t + \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{5}t^5 + \frac{1}{7}t^7$. Ita exprimitur non ſolùm area ſectoris circularis, aut ſectoris Hyperbolæ primariæ æquilateræ cùm angulus Aſymptotarum eſt Tab. XI. Fig. 44.

rectus, ſed & alterius ſectoris Elliptici, aut Hyperbolici cujuſcumque. Cæterum ex ſeriebus infinitis a me, aliiſque, ut *Mercatore*, *Newtono*, *Gregorio* exhibitis, ſequitur Trigonometriæ Canonicæ ſine Tabulis praxis quantum libet exacta. Neque enim ſemper Tabulas per maria, & terras circumferre in poteſtate eſt. Nempe ſit radius unitas, arcus a tangens t, ſinus rectus $ſ$, ſinus verſus v, logarithmus l, numerus $1+n$ (logarithmo ipſius unitatis exiſtente o), fiet

(1)
$$a=\frac{1}{1}t-\frac{1}{3}t^3+\frac{1}{5}t^5-\frac{1}{7}t^7+\frac{1}{9}t^9 \text{ \&c.}$$

(2)
$$ſ=a-\frac{a^3}{1.2.3.}+\frac{a^5}{1.2.3.4.5.}-\frac{a^7}{1.2.3.4.5.6.7.} \text{ \&c.}$$
id eſt, $a-\frac{1}{6}a^3+\frac{1}{120}a^5$ &c.

(3)
$$v=\frac{a^2}{1.2.}-\frac{a^4}{1.2.3.4.}+\frac{a^6}{1.2.3.4.5.6.}-\frac{a^8}{1.2.3.4.5.6.7.8.} \text{ \&c.}$$

(4)
$$l=\frac{1}{1}n-\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{3}n^3-\frac{1}{4}n^4+\frac{1}{5}n^5 \text{ \&c.}$$

(5)
$$n=\frac{l}{1}+\frac{l^2}{1.2.}+\frac{l^3}{1.2.3.}+\frac{l^4}{1.2.3.4.}+\frac{l^5}{1.2.3.4.5.} \text{ \&c.}$$

Semper autem quantitas, cujus potentiæ in ſerie infinita adhibentur, debet eſſe minor unitate, ut in progreſſu fiant quantumvis parvæ. Hujuſmodi ſeries dari poſſunt plures, & efficere etiam per ſeries licet, ut ex arcu dentur ſinus, & tangentes artificiales, ſeu logarithmici (non ſuppoſitis naturalibus) & viciſſim arcus ex ipſis: Sed placuit eas tantùm adſcribere ſeries, quæ tam ſimplicis ſunt compoſitionis, ut facillimè memoria retineri, & ubivis defectum librorum ac tabularum ſupplere poſſint: Itaque unam tantùm ob ſuam ſimplicitatem, & quia hujus ſchediaſmatis occaſionem præbuit, addo, ſi ſinus complementi ſint c, logarithmos ſinuum rectorum, vel potiùs (quod eodem redit) reciprocorum ab his ſinubus, fore (6) $=$ ut $\frac{1}{2}c^2+\frac{1}{4}c^4+\frac{1}{6}c^6+\frac{1}{8}c^8$ &c. Quemadmodum ſequitur ex his quæ innuimus in ſchediaſmate de Reſiſtentia Med. *Act. Januarii* 1689, *pag.* 4. *artic.* 2, *prop.* 6. Unde rurſus patet, etiam pendere a quadratura Hyperbolæ. Nec abludunt quæ dederat *Nic. Mercator*, unde ad meum Circuli Tetragoniſmum ſecundo menſe primi anni horum Actorum editam, duxeram Analogiam cum Hyperbola non inelegantem. Inveneram ſcilicet circulum eſſe ad quadratum circumſcriptum ut $\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}$ &c. ad

ad unitatem; ſeu circulum eſſe ad quadratum inſcriptum ut $\frac{1}{4-1} + \frac{1}{36-1} + \frac{1}{100-1}$ &c. ad $\frac{1}{4}$; ubi numeri 4, 36, 100, &c. ſunt quadrati a paribus quaternario differentibus 2, 6, 10, &c. Similiter ex ſupradictis, cùm Numerus, cujus logarithmus quæritur, $1 + x$ eſt 2, tunc x eſt 1, adeoque $\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$ &c. eſt Logarithmus Hyperbolicus binarii. Eadem ſeries facit $\frac{4}{9-1} + \frac{4}{49-1} + \frac{4}{121-1}$ &c. (nam $\frac{4}{9-1}$ eſt æq. $\frac{1}{1} - \frac{1}{2}$, & $\frac{4}{49-1}$ eſt æq. $\frac{1}{3} - \frac{1}{4}$, & ita porrò) ergo Logarithmus Hyperbolicus binarii eſt ad unitatem, ut $\frac{1}{9-1} + \frac{1}{49-1}$ &c. eſt ad $\frac{1}{4}$. Ubi Numeri 9, 49, 121, &c. ſunt quadrati a 3, 7, 11, &c. qui ſunt impares unitate excedentes ſuprà dictos pares quaternario differentes; unde origo patet analogiæ olim a nobis exhibitæ in his Actis, ut dictum eſt. Eſſe autem $\frac{1}{2}cc + \frac{1}{4}c^4 + \frac{1}{6}c^6$ &c. log. de 1: $\sqrt{1 - cc}$ ſic demonſtratur: log. de $1 + c$, $= \frac{1}{1}c - \frac{1}{2}cc + \frac{1}{3}c^3$ &c. & log. de $1 - c = -\frac{1}{1}c - \frac{1}{2}cc - \frac{1}{3}c^3$ &c. Utrumque per æq. 4. Ergo log. $\overline{1 + c}$ + log. $\overline{1 - c}$ id eſt log. $\overline{1 - cc}$ $= -\frac{2}{2}cc - \frac{2}{4}c^4 - \frac{2}{6}c^6$ &c. & proinde $\frac{1}{2}$ log. $\overline{1 - cc}$, id eſt log. $\sqrt{1 - cc}$ $= -\frac{1}{2}c^2 - \frac{1}{4}c^4 - \frac{1}{6}c^6$ &c.

Sed quo magis horum uſus appareat, oſtendere operæ pretium erit, eumdem calculum prodeſſe ad lineam Rhombicam in ſuperficie ſphærica a navigantibus deſcriptam rectè æſtimandam, atque in plano projiciendam, quæ vulgo parum accuratè tractantur, rem uſu ampliſſimam paucis explicemus. Sit Polus P, Æquator Aqq, Meridiani PA, PQ, &c. Tab. XI. Fig. 45.
Linea Rhombica, A 1 l 2 l 3 l &c. quæ deſcribitur quamdiu eadem plaga, ſeu venti rhombus tenetur. Per puncta l, l ducantur paralleli H l, nempe 1 H 1 l, 2 H 1 d 2 l, 3 H 2 d 3 l, &c. Quòd ſi jam punctorum q, q intervalla ſint incomparabiliter parva, portiones arcuum quippe inaſſignabiles erunt pro rectis, & triangula 1 l 1 d 2 l, 2 l 2 d 3 l &c. erunt ſimilia, ob angulum lineæ Rhombicæ ſemper eumdem ad loci meridianum. Ergo 1 l 2 l *quantitas Rhombicæ percurſæ, ſeu itineris in eodem rhombo, eſt ad* 1 H 3 H, *differentiam latitudinis extremorum, ut ſinus totus ad anguli rhombici ſinum.* Itaque ex dato angulo rhombico, & differentia latitudinum, datur quantitas itineris, vel contrà. Huc uſque res pervulgata eſt, ſed ut ex iiſdem differentia longitudinum calculo æſtimetur, negotium eſt Geometriæ tranſcendentis, quam pauci rectè tractaverunt. Id ergo ſupplere noſtræ methodi eſt. Radius, ſeu ſinus totus ſit unitas, & tangens anguli rhombici conſtantis ſit b: patet eſſe 1 d 2 l ad 1 l 2 l ſeu ad 1 H 2 H,

 vel

Tab. XI. vel $2\,d\,3\,l$ ad $2\,l\,2\,d$ ſeu ad $2\,H\,3\,H$ ut b ad 1. Sed $2\,q\,3\,q$ eſt ad $2\,d\,3\,l$,
Fig. 46. ut A C (ſinus totus ſeu ſphæræ radius) ad $3\,H\,M$, ſinum anguli $3\,HCP$ cujus arcus $3\,HP$ eſt latitudinis $A\,3\,H$ complementum, ſeu $2\,q\,3\,q$ ad $2\,d\,3\,l$, ut $C\,3\,H$ ad $3\,H\,M$, ſeu ut C E ſecans anguli latitudinis ad AC ſinum totum. Latitudo, ſeu arcus meridiani AH ſit h, & $2\,H\,3\,H$ erit dh. Jam CE ſecans ſit n, & $2\,d\,3\,l$ erit $b\,dh$, & $2\,q\,3\,q$ erit $b\,n\,dh$, & portio tota æquatoris $A\,3\,q$ erit $b\int n\,dh$, & $\int n\,dh$ eſt area ſecantium arcui applicatorum. Jam angulo CEN recto educta EN ipſi CA occurrat in N, ſumtaque $3\,HQ$, particula ipſius $3\,HM$ & normaliter ex Q educta ad circulum QF ob triangula ſimilia, nempe ordinarium NEC, & characteriſticum inaſſignabile $3\,HQF$ erit rectangulum CE in $3\,HF$, ſeu $n\,dh$ æquale rectangulo CN in QF. Si jam CM ſinus latitudinis ſit e, QF erit $\overline{de}$, & CN vel MV (ſumta in $M\,3\,H$ continuata) reperietur eſſe $1 : \overline{1 - ee}$ ductaque linea per AVV, erit $\int n\,dh$ ſeu area ACMVA æq. $\int, de : \overline{1-ee}$; & $b.\int, de : \overline{1-ee}$, ſeu $\frac{b.\,e}{1} + \frac{b.\,e^3}{3} + \frac{b.\,e^5}{5}$ &c. erit $A3q$, arcus æquatoris inter A (initium lineæ rhombicæ $A\,3\,l$ in æquatore) & meridianum $P\,3\,l\,3\,q$ ad quem pervenit, interceptus: poſito e eſſe ſinum latitudinis extremi $3\,l$; & b eſſe numerum qui ſit ad unitatem, ut tangens Conſtantis anguli Rhombicæ cum meridiano eſt ad ſinum totum. Unde ſi quæratur $1\,q\,3\,q$, differentia longitudinis duorum rhombicæ lineæ $1\,l\,2\,l\,3\,l$ punctorum $1\,l$ & $3\,l$, ex data, $1\,H\,3\,H$, differentia latitudinis eorumdem; oportet tantùm invenire $A\,1\,q$, & $A\,3\,q$, etitque differentia $1\,q\,3\,q$; adeoque ſi ſinus latitudinis puncti $3\,l$ ſit e, & puncti $1\,l$ ſit (e) tantum opus $\frac{e-(e)}{1} + \frac{e^3-(e)^3}{3} + \frac{e^5-(e)^5}{5}$ &c. multiplicare per b tangentem anguli Rhombici ad meridianum, poſito ſinum totum eſſe unitatem: & productum erit differentia longitudinis quæſita. Denique ex ſuperioribus re ad logarithmos redacta ad modum *artic.* 5, *prop.* 4. *noſtri ſchediaſmatis de Reſiſtentia Medii*, erunt differentiæ longitudinum, punctorum $3\,l$ & $1\,l$, ut logarithmi rationis $\overline{1+e} : \overline{1-e}$ ad $\overline{1+(e)} : \overline{1-(e)}$ Poſito radium ſphæræ eſſe unitatem, & ſinus latitudinum dictorum punctorum reſpectivè eſſe e, & (e). Ex his jam canones practicos facilè ducet peritus. Veluti ſi data differentia longitudinis, & latitudinis locorum quæras rhombum, ſeu angulum rhombicæ lineæ ab uno ad alium ducentis: Nam *tangens anguli, quem Rhombus quæſitus facit ad meridianum, & ad ſinum totum, ut arcus differentiæ longitudinum eſt ad logarithmum hyperbolicum dictæ rationis*, ſeu ad $\frac{e}{1} + \frac{e^3}{3} + \frac{e^5}{5}$ &c. Quòd ſi meridiani in planiſphærio projiciantur rectis parallelis, quod cautionibus debitis adhibitis plerumque commodè ſatis

tis

tis fieri poteſt ſalva exactitudine, tunc etiam lineæ Rhombicæ erunt rectæ. Si jam gradus longitudinis, horumque partes projiciamus æqualibus intervallis, oportet gradus latitudinis aſſumi inæquales; & ſic quidem, ad mappam Geometricè conſtruendam, ut ducta ad libitum recta omnes meridianos, obliquè ſecante, latitudines punctorum interſectionis habeant, ut ex dictis patet, numeros, qualis eſt $\overline{1+e} : \overline{1-e}$ geometrica progreſſione incedentes; id enim ſi una recta præſtet, præſtabunt omnes. Unde comparando cum numeris ſcalæ latitudinis facillimum erit in ipſa mappa menſurare ex vero rectam quamvis in ea ducibilem, ſeu quantitatem Rhombicæ datæ. His mappis ſi alias jungas, ubi ſphæricæ ſuperficiei partes projiciuntur ex centro in plana tangentia, omneſque arcus circulorum magnorum, adeoque viæ breviſſimæ exhibentur rectis, pleraque in praxi probe ſatis præſtari poſſunt.

Nº. XXX.

DE LINEA IN QUAM FLEXILE

Se pondere proprio curvat, ejuſque uſu inſigni ad inveniendas quotcumque medias proportionales, & logarithmos.

Ex Actis Erudit. Lipſ. ann. 1691.

PRoblema *Lineæ Catenariæ vel Funicularis* duplicem uſum habet, unum, ut augeatur ars inveniendi, ſeu Analyſis, quæ hactenus ad talia non ſatis pertingebat, alterum ut praxis conſtruendi promoveatur. Reperi enim hanc lineam ut facillimam factu, ita utiliſſimam effectu eſſe, nec ulli Tranſcendentium ſecundam. Nam ſuſpenſione fili, vel potiùs *catenulæ* (quæ extenſionem non mutat) nullo negotio parari, & deſcribi poteſt, *phyſico* quodam *conſtructionis genere*. Et ope ejus ubi ſemel deſcripta eſt, exhiberi poſſunt quotcumque mediæ proportionales, & Logarithmi, & Quadratura Hyperbolæ. Primus *Galilæus* de ea cogitavit, ſed naturam ejus aſſecutus non eſt: neque enim Parabola eſt, ut ipſe erat ſuſpicatus. *Joachimus Jungius*, eximius noſtri ſæculi Philoſophus, & Mathematicus, qui multa ante *Carteſium* præclara cogitata habuerat circa ſcientiarum emendationem, calculis initis, & experimentis factis parabo-

lam excluſit, veram lineam non ſubſtituit. Ex eo tempore a multis tentata quæſtio eſt, a nemine ſoluta, donec nuper mihi ab eruditiſſimo Mathematico præbita ejus tractandæ occaſio eſt. Nam Cl. *Bernoullius*, cùm meam quamdam Analyſin infinitorum, calculo differentiali, me ſuadente introducto, expreſſam, feliciter applicuiſſet ad quædam problemata, a me publicè petivit Actorum anni ſuperioris menſe Majo p. 218, ſeq. ut tentarem, an noſtrum calculi genus etiam ad hujuſmodi problemata, quale eſt lineæ catenariæ inventio, porrigeretur. Re in gratiam ejus tentata, non tantum ſucceſſum habui, primuſque, ni fallor, illuſtre hoc problema ſolvi, ſed & lineam egregios uſus habere deprehendi, quæ res fecit, ut exemplo *Blaſii Paſchalii* aliorumque ad eamdem inquiſitionem invitaverim Mathematicos certo tempore præſtituto, experiundarum Methodorum cauſa, ut appareret, quid illi daturi eſſent, qui fortaſſe alias adhiberent ab ea qua *Bernoullius* mecum utitur. Tempore nondum elapſo, duo tantùm ſignificarunt rem ſe conſecutos, *Chriſtianus Hugenius*, cujus magna in rem literariam merita nemo ignorat; & ipſe cum fratre ingenioſo juvene, & pereruditο *Bernoullius*, qui his, quæ dedit, effecit, ut præclara quæque porrò ab iis ſperemus. Eum igitur reapſe expertum puto, quod ſignificaveram, huc quoque porrigi noſtram calculandi rationem, & quæ antea difficillima habebantur jam aditum admittere. Sed placet exponere, quæ a me ſunt inventa; quid alii præſtiterint, collatio oſtendet.

Linea ſic conſtruitur Geometricè, ſine auxilio fili, aut catenæ, & ſine ſuppoſitione quadraturarum, eo conſtructionis genere, quo pro Tranſcendentibus nullum perfectius, & magis Analyſi conſentaneum mea ſententia haberi poteſt. Sint duæ quæcumque lineæ rectæ, determinatam quamdam, & invariabilem inter ſe habentes rationem, eam ſcilicet quam א & ב, hic expoſitæ, qua ratione ſemel cognita cætera omnia per Geometriam ordinariam procedunt. Sit recta indefinita ⊙ N horizonti parallela, eique perpendicularis ⊙ A, æqualis ipſi ⊙ 3 N, & ſuper 3 N verticalis 3 N 3 ξ,
Tab. XII. quæ ſit ad ⊙ A, ut א ad ב. Inter ⊙ A & 3 N 3 ξ quæratur media pro-
Fig. 47. portionalis 1 N 1 ξ; & inter 1 N 1 ξ & 3 N 3 ξ, itemque inter 1 N 1 ξ & ⊙ A quæratur rurſus media proportionalis, & ita porrò quærendo medias, & inventis tertias proportionales, deſcribatur, continueturque linea ξξ A (ξ) (ξ) quæ erit talis naturæ, ut ipſis intervallis verbi gr. 3 N 1 N, 1 N ⊙, ⊙, (N), 1 (N) 3 (N), &c. ſumtis æqualibus, ſint ordinatæ 3 N 3 ξ, 1 N 1 ξ, ⊙ A, 1 (N) 1 (ξ), 3 (N) 3 (ξ) in continua progreſſione Geometrica, qualem lineam *Logarithmicam* appellare ſoleo. Jam ſumtis ⊙ N, ⊙ (N) æqualibus, ſuper N vel (N) erigatur NC vel (N) (C) æqualis dimidiæ ſummæ ipſarum N ξ, (N) (ξ), & C vel (C) erit *punctum lineæ catenariæ* F C A (C) L, cujus ita puncta quotcunque aſſignari Geometricè poſſunt.

Contrà

Contrà ſi linea catenaria phyſicè conſtruatur ope fili, vel catenæ pendentis, ejus ope exhiberi poſſunt quotcumque mediæ proportionales, & Logarithmi inveniri datorum numerorum, vel numeri datorum Logarithmorum. Sic ſi quæratur Logarithmus numeri ⊙ ω, poſito ipſius ⊙ A, (tamquam Unitatis, quam & *parametrum* vocabo) Logarithmum eſſe nihilo æqualem. Seu, quod eodem redit, ſi quæratur Logarithmus rationis inter ⊙ A & ⊙ ω, ſumatur ipſis ⊙ ω & ⊙ A tertia proportionalis ⊙ ψ, & ipſarum ⊙ ω & ⊙ ψ ſummæ dimidiæ ⊙ B, tamquam abſciſſæ, reſpondens Lineæ Catenariæ ordinata B C vel ⊙ N, erit *Logarithmus quæſitus Numeri dati.* Contrà, dato Logarithmo ⊙ N inde ductæ ad curvam catenariam verticalis N C duplam, oportet ſecare in duas partes tales, ut media proportionalis inter ſegmenta ſit æqualis datæ (unitati) ⊙ A, (quod facillimum eſt) & duo ſegmenta erunt *reſpondentes dato Logarithmo Numeri quæſiti*, unus major, alter minor unitate. Aliter: inventa, ut dictum eſt, N C ſeu ⊙ R (ſumto ita puncto R in horizontali AR, ut habeamus ⊙ R æqualem ⊙ B vel N C) erunt ſumma, ac differentia rectarum ⊙ R & A R duo reſpondentes Logarithmo dato numeri, unus major, alter minor unitate. Nam differentia ipſarum ⊙ R & AR eſt N ξ, & ſumma earum eſt (N) (ξ); ut viciſſim ⊙ R eſt ſemiſumma, & AR ſemidifferentia ipſarum (N) (ξ) & N ξ.

Sequuntur *ſolutiones Problematum primariorum*, quæ circa lineas proponi ſolent. *Tangentem ducere ad punctum lineæ datum* C; in AR horizontali per verticem A ſumatur R, ut fiat ⊙ R æqualis ⊙ B datæ, & ipſi ⊙ R ducta antiparallela C T (occurrens axi A ⊙ in T) erit tangens quæſita. *Antiparallelas* compendii cauſa hic voco ipſas ⊙ R & T C, ſi ad parallelas A R & B C faciant non quidem eoſdem angulos, ſed tamen complemento ſibi exiſtentes ad rectum, A R ⊙ & B C T. Et Triangula rectangula ⊙ A R, & C B T, ſunt ſimilia.

Rectam invenire arcui catenæ æqualem. Centro ⊙ radio ⊙ B deſcribendo Circulum, qui horizontalem per A ſecet in R, erit A R æqualis arcui dato AC. Patet etiam ex dictis fore ψω æqualem catenæ CA (C). Si catena C A (C) æqualis eſſet duplæ parametro, ſeu ſi AC vel AR æqualis ⊙ A, foret catenæ in C inclinatio ad horizontem, ſeu angulus BCT, 45 graduum; adeoque angulus CT (C) rectus.

Quadrare ſpatium linea catenaria & recta, vel rectis comprehenſum. Scilicet invento puncto R, ut antè, erit rectangulum ⊙ A R æquale Quadrilineo A ⊙ N C A. Unde alias quaſvis portiones quadrare in proclivi eſt. Patet etiam, arcus eſſe areis quadrilineis proportionales.

Invenire centrum gravitatis catenæ, aut partis ejus cujuſcumque. Arcui AC vel AR, ordinatæ BC, parametro ⊙ A inventa quarta proportionalis ⊙ θ, addatur abſciſſæ ⊙ B, & ſummæ dimidia ⊙ G, dabit G centrum gravitatis catenæ C A (C). Porrò Tangens C T, ſecet horizontalem per

A,

A, in E, compleatur rectangulum GAEP, erit P centrum gravitatis arcûs AC. Cujuscunque arcûs alterius ut C 1 C diſtantia centri gr. ab axe, eſt AM, poſito πM eſſe perpendicularem in horizontem verticis, demiſſam ex π concurſu tangentium Cπ, 1 Cπ. Quanquam & centrum ejus ex centris arcuum AC, A 1 C, facile habeatur. Hinc & habetur BG, maximus deſcenſus poſſibilis centri funiculi, ſeu catenæ, aut lineæ flexilis non extendibilis cujuſcumque, duabus extremitatibus C & (C) ſuſpenſæ, longitudinem habentis datam 4ω; quamcumque enim figuram aliam aſſumat, minùs deſcendet centrum grav. quàm ſi in noſtram CA (C) curvetur.

Invenire centrum gravitatis figuræ, linea catenaria, & recta, vel rectis comprehenſæ. Sumatur ⊙β dimidia ipſius ⊙G, & compleatur rectangulum βAEQ, erit Q centrum gravitatis quadrilinei A⊙NCA. Unde & cujuſcumque alterius ſpatii linea catenaria, & recta, vel rectis terminati centrum facilè habetur. Hinc porrò ſequitur illud memorabile, non tantùm quadrilinea ut A⊙NCA arcubus AC proportionalia eſſe, ut jam notavimus, ſed & amborum centrorum gravitatis diſtantias ab horizontali per ⊙, nempe ⊙G & ⊙β eſſe proportionales, cùm illa ſit ſemper hujus dupla, & diſtantias ab axe ⊙B nempe PG, Qβ adeo eſſe proportionales, ut ſint planè æquales.

Invenire contenta & ſuperficies ſolidorum, rotatione figurarum linea catenaria, & recta, vel rectis comprehenſarum, circa rectam immotam quamcunque genitorum. Habetur ex duobus problematibus præcedentibus, ut notum eſt. Sic ſi catena CA (C) rotetur circa axem AB, generata ſuperficies æquabitur circulo, cujus radius poſſit duplum rectangulum EAR. Nec minùs aliæ ſuperficies, vel etiam ſolida dicto modo genita menſurari poſſunt.

Multa Theoremata, ac Problemata prætereo, quæ vel in his continentur, quæ diximus, vel non magno negotio inde derivantur, cùm brevitati conſulere viſum ſit. Sic ſumtis duobus catenæ punctis, ut C & 1C, quorum tangentes ſibi occurrant in π, ex punctis 1 C, π, C, in ipſam AEE horizontalem verticis demittantur perpendiculares 1 C 1 J, πM, CJ: fiet 1 J J in AC minus 1 CC in 1 JM æquale 1 B B in ⊙A. Poſſunt & ſeries infinitæ utiliter adhiberi. Sic ſi parameter ⊙A ſit unitas, & arcus AC, vel recta AR, dicatur a, & ordinata BC vocetur y, fiet $y = \frac{1}{1} a - \frac{1}{6} a^3 + \frac{3}{40} a^5 - \frac{5}{112} a^7$, &c. quæ ſeries facili regula continuari poteſt. Datis quoque lineam determinantibus, haberi poſſunt reliqua ex dictis. Sic dato vertice A, & alio puncto C, & AR longitudine catenæ interceptæ AC, haberi poteſt lineæ parameter A⊙, vel punctum ⊙: quoniam enim datur & B, jungatur BR, & ex R educatur recta Rμ, ita ut angulus BRμ ſit æqualis angulo RBA, & ipſa Rμ (producta) occurret Axi BA (producto) in puncto ⊙ quæſito.

Atque

Atque his quidem potiſſima contineri arbitror, unde cætera circa hanc lineam, ubi opus, facilè duci poterunt. Demonſtrationes adjicere ſuperſedeo, prolixitatis vitandæ gratiâ, præſertim cùm novæ noſtræ Analyſeos calculos in his Actis explicatos intelligenti ſponte naſcantur.

N°. XXXI.

DE SOLUTIONIBUS PROBLEMATIS

Catenarii vel Funicularis in Actis Junii A. 1691, aliiſque à Dn. J. Bernoullio propoſitis.

Ex Actis Erud. Lipſ. hujuſce anni.

VAlde delectatus ſum lectis tribus Problematis a *Galilæo* propoſiti, a D. *Bernoullio* renovati, ſolutionibus inter ſe conſentientibus, quod indicium eſt veritatis, apud eos valiturum, qui talia accuratè non examinant. Etſi autem omnia conferre non vacaverit, in ſumma tamen rei manifeſta eſt concordia. Legem tangentium, & extenſionem curvæ catenariæ in rectam invenimus omnes, & cum curvedinis menſuram olim in *Actis Junii A.* 1686. *p.* 489, (introducto novo contactûs genere, quem oſculum appellare placuit) explicuerim per radium circuli curvam oſculantis, ſeu ex omnibus circulis tangentibus maximè ad curvam accedentis, eumdemque adeo quem ipſa curva ad rectam facientis angulum contactûs, placuit celeberrimo *Hugenio* (animadvertenti centra horum circulorum ſemper incidere in lineas a ſe primùm inventas, quarum evolutione deſcribuntur datæ) ſpeculationem huc applicare, & inveſtigare radium curvitatis, vel circulum oſculatorem curvæ catenariæ, ſive ejus curvam evolutione generantem, quam & dedit ſolutio *Bernoulliana.* In *Hugeniana* autem, diſtantia quoque habetur centri gravitatis catenariæ ab axe. In *Bernoulliana*, & mea, ejuſdem diſtantia tam ab axe quàm & a baſi, aut alia recta, adeoque puncti determinatio, item quadratura figuræ catenariæ. Quibus ego in mea centrum gravitatis etiam hujus figuræ, ſeu areæ adjeci. Conſtructionem lineæ Dn. *Hugenius* exhibet ex ſuppoſita quadratura curvæ qualis eſt $xxyy = a^4 - aayy$, Dn. *Joh. Bernoullius*, & ego reduximus ad quadraturam hyperbolæ; illo perbene adhibente etiam extenſionem curvæ parabolicæ in rectam, me denique rem omnem reducente ad logarithmos; eaque ratione obtinente *perfectiſſimum in Tranſcendentibus exprimendi pari-*

 ter,

ter, *& conſtruendi genus.* Sic enim unica tantùm ſemel ſuppoſita, vel habita ratione conſtante, de reliquo infinita puncta vera exhiberi poſſunt per communem Geometriam ſine interventu ulteriore quadraturarum, aut extenſionum in rectas. Lineæ Catenariæ mirum & elegantem cum Logarithmis conſenſum, ex mea conſtructione animadvertere fortaſſe non injucundum videbitur. Cæterum a Dn. *Hugenio* (egregii ex Tab. Sinuum compendii nobis ſpem faciente) obſervatum eſt, rem etiam reduci ad ſummam ſecantium arcuum, per minima æqualiter creſcentium. Idem & a me notatum fuerat, & cùm in mentem veniſſet, ab iiſdem pendere & lineæ rhombicæ, ſeu loxodromicæ determinationem in uſum nautarum, quam jam multis abhinc annis etiam ex logarithmis definiiſſe recordabar, excuſſi veteres ſchedas, & in *proximè præcedente Aprili p.* 181. *Actorum Erud. hujus anni* rem tandem publicè exhibui. Contigit autem, ut Clariſſimus Baſileenſium Profeſſor Dn. *Jacob Bernoullius* Problematis Catenarii renovator, fraternæ ſolutioni, in *Junio nupero p.* 282, ſubjiceret etiam loxodromiarum conſiderationem, ubi multa detexit egregia; dedit etiam conſtructionem loxodromiæ ex ſuppoſita quadratura lineæ, cujus abſciſſa, & ordinata ſint z & x, æquatio verò differentialis ad calculi mei ritum, ſit $dx = trrdz : z\sqrt{rr - zz}$. Ubi verò videbit, quomodo res a me reducta ſit ad quadraturam hyperbolæ, aut logarithmos, agnoſcet credo, nunc colophonem quodammodo impoſitum eſſe huic diſquiſitioni, tantumque ſupereſſe, ut ad uſum practicum, captumque popularem magis adaptetur. Ubi tamen annotare debeo, quædam in dicta mea lineæ rhombicæ conſtructione, Aprili nupero publicata, eſſe corrigenda. Nam pag. 181, lin. 12, pro $1\,l\,2\,l$, ponatur $1\,l\,3\,l$, & lin. 25. pro $1\,d\,3\,l$ ponatur $2\,d\,3\,l$, & pag. 182, linea 20, pro *ſeu ad* $\frac{e}{1} + \frac{e^3}{3} + \frac{e^5}{5}$ &c. ponatur *ſeu ad* $\frac{e - (e)}{1} + \frac{e^3 - (e)^3}{3} + \frac{e^5 - (e)^5}{5}$ &c. Quod utique debuiſſe poni, ex præcedentibus apparet. Elegans eſt, quod Dominus *Bernoullius* habet, *Januarii nuperi p.* 16, de curvæ partibus quibuſdam diſſimilaribus inter ſe æqualibus. Porrò *Junii p.* 283. lineam finitæ magnitudinis, infinitos licet gyros facientem, non puto eſſe interminatam; cùm finitæ ſit æqualis, & motu æquabili finito tempore percurri poſſit. Hæreo etiam circa id, quod ab eodem dictum eſt *menſe Januario proximo p.* 21. nullius curvæ Geometricæ in ſe redeuntis rectificationem (generalem) eſſe poſſibilem. Scio alium virum clariſſimum ſimili argumento probare inſtituiſſe, nullius areæ curvæ Geometricæ in ſe redeuntis quadraturam indefinitam eſſe poſſibilem; viſum tamen eſt Dn. *Hugenio* non minùs quàm mihi, rem non eſſe confectam. Et, ni fallor, dantur inſtantiæ, quibus tamen hujuſmodi argu-

argumenta applicari poſſunt. Hæc veritatis amore, non contradicendi ſtudio, a me notata, ſpero non diſplicitura, cùm aliis egregiè dictis nihil detrahant. Ego certè eo ſum animo, ut viros præclarè de literis meritos, ac merituros, lubentiſſimè, nec ſine voluptate prædicem, hanc eorum laboribus honeſtiſſimam mercedem deberi judicans, quæ & in futurum incitamento, & ipſis, & aliis eſſe poteſt. Negare non poſſum, mirificè mihi placuiſſe, quæ Celeb. *Bernoullius* cum ingenioſiſſimo juvene *fratre* ſuo fundamentis calculi novi a me jactis inædificavit, idque eo magis, quod excepto acutiſſimo Scoto *Joh. Craigio* nondum mihi occurrerat, qui eo fuiſſet uſus, ipſorum autem præclaris inventis rem, quam ſummæ utilitatis eſſe judico, & ab ipſis agnoſci video, ſpero latiùs propagatum iri in uſum rei literariæ. Nec dubium eſt, quin ea ratione Analyſis Mathematica perfectioni propiùs admoveatur, & Tranſcendentia hactenus excluſa ei ſubjiciantur. Egregiè à Dn. *Bernoullio* annotatum eſt, in omni puncto flexus contrarii rationem inter t & y, vel dx & dy, eſſe omnium poſſibilium maximam, vel minimam. Et omnino non dubito, ipſos aliqua detecturos, ad quæ pervenire mihi ipſi difficile eſſet futurum: ſuperſunt enim, in quibus nondum ipſe optata brevitate rem conficere poſſum. Et quemadmodum mihi, qui in has meditationes occaſione *Paſchalianorum*, & *Hugenianorum* ſcriptorum potiſſimùm incidi, ad ea pervenire progrediendo licuit, quæ ex illis non facilè deducentur, & quæ antea vix ſperabantur: ita credo, mea qualiacunque aliis adhuc abſtruſioribus occaſionem præbitura. Et ſanè gratulor clariſſimo B. affinia problemati catenario danti, & daturo, ſi nempe catena ſit inæqualis craſſitiei, ſi funis ſit extendibilis, ſi pro fune gravi adhibeatur lamina elaſtica, ac denique de figura veli; de quibus vellem mihi cum eo conferre nunc liceret, ſed diverſiſſimi generis laboribus diſtractiſſimus ægrè nuper a me obtinere potui, ut repertam jam ante annum ſolutionem propoſiti ab ipſo Problematis tandem elaborarem, & in ordinem redigerem, quæ etiam moræ cauſa fuit. Cæterum quia ipſe *p.* 290. conjicere voluit, qua occaſione, aut quorum ante me ſcriptorum auxiliis potiſſimum ad has meditationes devenerim, placet id quoque candidè aperire. Eram ego hoſpes planè in interiore Geometria, cùm Lutetiæ Pariſiorum A. 1672. *Chriſtiani Hugenii* notitiam nactus ſum, cui certè viro, poſt *Galilæum*, & *Carteſium*, & has literas publicè, & me in ipſis privatim plurimum debere agnoſco. Hujus cùm legerem librum de *Horologio Oſcillatorio*, adjungeremque *Dettonvillæi* (id eſt *Paſchalii*) Epiſtolas, & *Gregorii a S. Vincentio* opus, ſubitò lucem hauſi, & mihi, & aliis quoque, qui me in his novum norant inexpectatam, quod mox ſpeciminibus datis oſtendi. Ita mihi ſeſe aperuit ingens numerus theorematum, quæ corollaria tantùm erant methodi novæ, quorum partem deinde apud *Jac. Gregorium*, & *Iſaacum Barrovium*, alioſque deprehendi. Sed animadverti, fontes non ſatis adhuc patuiſſe, & reſtare in-

terius aliquid, quo pars illa Geometriæ ſublimior tandem aliquando ad analyſin revocari poſſet, cujus antea incapax habebatur. Ejus elementa aliquot abhinc annis publicavi, conſulens potius utilitati publicæ, quàm gloriæ meæ, cui fortaſſe magis velificari potuiſſem methodo ſuppreſſa. Sed mihi jucundius eſt, ex ſparſis a me ſeminibus natos in aliorum quoque hortis fructus videre. Nam nec mihi ipſi integrum erat hæc ſatis excolere, nec deerant alia, in quibus aditus novos aperirem, quod ego ſemper palmarium judicavi, ac methodos potiùs, quàm ſpecialia licet vulgo plauſibiliora æſtimavi. Poſtremo unum adjiciam, etſi ab hoc loco alienum, optare me, ut D. *Bernoullius* expendere dignetur, quæ circa æſtimationem virium D. *Papino* altera vice repono, præſertim in fine, ubi detexiſſe videor fontem erroris popularis. Optimè urget *Julio nupero p.*321. nihil virium deperdi, quod non alicubi impendatur; ſed differunt vires, & quantitas motûs: Et præterquàm quòd quanto firmior obex, eo minùs potentiæ in ipſo perditur, certiſſimum eſt, obſtacula in data quavis ratione diminui poſſe, & obſtacula attritûs, ſeu frictionis non eſſe proportionalia celeritati (ut monui in *ſchediaſmate de reſiſtentia*) eſſe quidem reſiſtentiam medii, ſed nihil prohibet fingi oſcillationes in loco aere exhauſto, aut medio quantævis tenuitatis; poſtremo abſtrahendus eſt animus a circumſtantiis variabilibus, ad ipſam per ſe rei naturam indagandam.

N°. XXXII.

Nº. XXXII.

DE LEGIBUS NATURÆ,

Et vera æſtimatione virium motricium contra Carteſianos Reſponſio ad rationes a Dn. *Papino* menſe Januarii anni 1691. in Actis Erudit. propoſitas.

Ex Actis Erud. hujuſce anni.

CUm varia impedimenta promtiùs reſponſuro obſtiterint, facilè à Clariſſimi Antagoniſtæ humanitate veniam ſpero. Ut brevitati, qua licet, conſulatur, diſquiſitionem de cauſa gravitatis cum ipſo nunc ſepono. Primaria de virium æſtimatione quæſtio eſt, quas ſcilicet ſemper eaſdem natura conſervat. Plerique vim æſtimant producto ex mole in velocitatem, ſeu quantitate motûs, unde & *Carteſiani* volunt, eamdem in natura motûs quantitatem conſervari. Ego contrà oſtendi in *Actis Erudit. Mart.* 1686. *pag.* 161, cùm conceſſum ſit a pleriſque, potiſſimùm ab ipſis *Carteſianis*, ejuſdem potentiæ eſſe elevare unam libram ad quatuor pedes, aut quatuor libras ad unum pedem; non poſſe vim æſtimari per quantitatem motûs, nec corpus librarum 4 velocitatem habens gradûs unius tantum valere, quantum corpus libræ unius velocitatem habens graduum quatuor; quoniam ſi illud unam libram poſſit elevare ad pedes 4, hoc eamdem poſſit elevare ad pedes 16. Huic meo argumento quidam reſpondere conati, ſeſe ita implicuerunt, ut non ſatis rem percepiſſe videantur, dum conceſſerunt æſtimationem potentiæ in ratione molis & altitudinis, ad quam moles, vel pondus attolli poteſt. Sed Dn. *P.* rectè vidit, hac admiſſa, æſtimationem in ratione molis, & velocitatis ſtare non poſſe; itaque de hac perſuaſus, illam negat *Act. Erudit. April.* 1689, *p.* 183, & argumentum quoddam ſuum pro velocitate in pari mole viribus proportionali affert. Ego reſpondens *Act. Erud. Maji* 1690, *p.* 228, & rem altiùs repetens, docui ex contraria ſententia ſequi inæqualitatem cauſæ, & effectûs, imò motum perpetuum, quæ abſurda videantur. *Virium* enim *inæqualium* ea eſſe definivi, quorum ſi unum aliquod in alterius locum ſubſtitui ſupponatur, naſcatur motus perpetuus, ſeu effectus *potior* cauſa, & ſubſtitutum tum eſſe *potentiæ majoris*, id cui ſubſtituitur, *minoris.* Oſtendi autem machinatione quadam adhibita, ſi globus quadrilibris velocitatem

habens ut 1 totam ſuam vim transferre ſupponatur in globum unilibrem; iſque proinde ſecundùm vulgarem ſententiam debeat recipere velocitatem ut 4, oriturum eſſe effectum potiorem cauſa, ſeu motum perpetuum mechanicum. *Potiùs* autem hic voco, in quo, vel in cujus effectu continetur alterum (*inferius*) aut ejus effectus, & adhuc aliquid præterea; ſeu *potius* & *inferius* vel *majus* & *minus* hoc loco ſunt, cùm contenta (formalia vel virtualia) hujus in illius contentis inſunt, & aliquid præterea. Ita potius eſt, quod attollere poteſt libram ad 16 pedes, quàm quod ad 4; nam illud etiam libram attollit ad 4 pedes, & præterea adhuc ad 12 pedes.

Clariſſimus *P.* menſe *Januario Actorum hujus anni* partim ad meum argumentum reſpondet, partim ad ſuum quod nectit, accuratam reſponſionem jure ſuo poſtulat. Sequar præeuntem eo libentiùs, quòd & perſpicaciam ejus, & candorem animadverto. Interim ad argumenti mei partem tantùm reſpondere videtur. Concedit candidè, motum perpetuum ex vulgari ſententia ſecuturum eſſe, ſi globi 4 librarum, velocitatis ut 1, tota vis transferri poſſit in globum unius libræ, ſed hoc fieri poſſe negat. Ego (inquit *p. 9. Act. Erud. hujus anni*) *& motum perpetuum abſurdum eſſe fateor, & demonſtrationem ex ſuppoſita translatione eſſe legitimam.* Et mox, *ſi mihi indicet rationem aliquam, qua tota vis motrix ſine miraculo ex corpore majori transferri queat in minus, & quieſcens, ego vel motum perpetuum, vel victas manus dabo.* De ratione hoc efficiendi poſtea, nunc dicam ad vim mei argumenti, ea non omnino eſſe opus. Mihi enim ſatis fuit oſtendere, 4. lib. veloc. 1, & 1 lib. veloc. 4 non poſſe eſſe virium æqualium; cùm ſi *ſupponimus* unum in alterius locum ſubſtitui, ſequatur motus perpetuus. Non igitur opus habeo, ut oſtendam modum *actu* efficiendi hanc ſubſtitutionem. Si quis autem neget meam hanc virium æqualium, & inæqualium definitionem (quam tamen Dn. *P.* admittere viſus eſt) ego, ne de nomine litigemus, id tantùm quæram, an non reapſe natura eam obſervet, ſeu an non caveat, ut nunquam ea ſibi ſubſtituat *actu*, quorum ſaltem alterutro alteri ſubrogato motus perpetuus oriri poſſit. Certum eſt experimenta prorſus favere, nec ullum exemplum in contrarium extare. Hoc conceſſo, non habeo opus, ut tota vis corporis majoris actu transferatur in corpus minus; ſufficit mihi exempli cauſâ (quod concedere videtur Dn. *P.*) totam vim minoris in majus transferri poſſe. Itaque ſi tota vis 1 libr. veloc. 4 transferatur in corpus librarum 4, & hoc adeo ſecundùm vulgarem ſententiam recipiat velocitatem ut 1, incidetur in id abſurdum (contra conceſſa) ut eorum unum ſubſtituatur alteri, quorum alterum poſſit viciſſim ſubſtitui ipſi, quin motus perpetuus oriatur. Et ita ſequetur, naturam in tranferendis viribus æqualitatis leges non ſervare effectuum reſpectu. Quòd ſi etiam pro parte retineri vim, & pro parte transferri ponamus, in idem tamen abſurdum incidemus.

mus. Erunt fortaſſe, qui vel omnem æqualitatis inter cauſam, & effectum legem tollent (quales ſunt qui motum perpetuum admittentes, quantumvis effectum per quantulumcunque produci poſſe putant) vel ſaltem negabunt quidem motum perpetuum, ſeu effectum cauſa potiorem eſſe poſſibilem; admittent tamen, ut effectus eſſe poſſit inferior cauſa. Sed vix credere poſſum, Dn. *P.* huc deſcenſurum. Cùm enim effectum cauſa potiorem eſſe non poſſe conceſſerit, videretur effugium quærentis potiùs quàm ſibi ſatisfacientis, cauſam admittere majorem effectu totali, cùm utrumque æquè a ratione abhorrere videatur. Sequeretur etiam, cauſam non poſſe iterum reſtitui, ſuoque effectui ſurrogari, quod quantum abhorreat a more naturæ, & rationibus rerum, facilè intelligitur. Et conſequens eſſet decreſcentibus ſemper effectibus, nec unquam rurſus creſcentibus, ipſam rerum naturam continuè declinare perfectione imminuta; (ferè ut in moralibus ſecundùm Poetam, *ætas parentum pejor avis, tulit nos nequiores &c.*) nec unquam reſurgere, & amiſſa recuperare poſſe ſine miraculo. Quæ in Phyſicis certè abhorrent a ſapientia, conſtantiaque Conditoris. Videturque inter prima principia hujus doctrinæ recipi poſſe, ut ſemper cauſa, & effectus (integra integro) æquipolleant. Et ſanè ipſius Dn. *P.* judicium, & candorem appello, an rationi conſentaneum ipſi videatur, ut pro potentia quæ poterat attollere unam libram ad 16 pedes, oriatur mox potentia quæ poſſit attollere unam libram non niſi ad 4 pedes? reliqua potentia neſcio quomodo amiſſa, &, ut ita dicam, annihilata, ſine ullo veſtigio, effectuque relicto. Quod utique contingeret, ſi pro 1 lib. veloc. 4 ſuccedere poſſet 4 lib. veloc. 1. Quin imò effici poterit, ut totus effectus ſubſtitutus vix milleſimam, aut centeſimam milleſimam &c. partem ejus quod cauſa poterat, præſtare poſſit. Nam ſi pro 1 lib. veloc. 1000 ſubſtituatur 1000 lib. veloc. 1. (quod ſecundùm vulgarem ſententiam fieri poteſt) effectus ad milleſimam partem redigitur, quæ videntur perabſurda. Et generaliter poſito, primum dari A veloc. c, & B veloc. e, translationes verò, & concurſus eſſe A veloc. (c) & B veloc. (e) & ſecundùm regulam vulgarem a *Carteſianis* maximè defenſam, ſervandam eſſe quantitatem motûs, ſeu eſſe Ac + Be æqu. A (c) + B (e), tales aſſumi poſſunt numeri, ut eadem abſurda oriantur.

Mirarer autem, ſi ipſi Dn. *P.* nihil ſubnatum eſſet ſcrupuli, tum hinc, tum quòd videret vim meæ demonſtrationis inevitabilem eſſe, niſi aliquid ſine omni ratione poſſibile negetur, id eſt niſi naturæ rerum denegetur facultas efficiendi, vel immediatè & directè, vel mediatè & per ambages, ut tota potentia majoris corporis alicujus transferatur aliquando in quoddam corpus minùs antea quieſcens. Profectò ſententia quæ eo redacta eſt, ut ſtare non poſſit, ſi hoc reperiatur poſſibile, valde laborat, atque in periculo verſatur. Ut taceam, non videri generalem naturæ legem a tali conditione debere ſuſpendi, & ſuſpectum eſſe effugium, quod nulla

nulla poſtulata admittit, niſi actu procurata; ut ſi quis *Archimedi* poſtulanti negaſſet, aliquam rectam alicui curvæ æqualem eſſe, quia nullam poterat Geometricè exhibere. Itaque propè mihi perſuadeo, Dn. *P.* expenſis omnibus tandem in noſtram ſententiam inclinaturum. Si quis tamen abſurda paulo antè indicata concoquere poſſet, in ejus gratiam tentabo, quod Clariſſimus Antagoniſta poſtulat, *modum indicare, quo natura efficere poſſit, ut potentia corporis majoris transferatur in minus quieſcens.* Poſſum autem afferre non unum. Et quidem ſi concedatur, poſſe totam vim minoris transferri in majus ſive motum, ſive quieſcens, igitur A motum, majus B quieſcente dividamus in partes ipſo B minores, totius A velocitatem retinentes, & cujuslibet deinde potentiam in B transferendo ſucceſſivè, tota ipſius A majoris potentia translata erit in B minùs quieſcens. Aliter: A & B connectantur linea rigida quantum ſatis eſt longa, & in ea ſumatur punctum H quod ponatur ſiſti, ita ut compoſitum non progredi quidem, rotari tamen poſſit circa immotum punctum H, quod ſit tam vicinum ipſi A, & tam remotum a B, ut celeritas, quæ inter circulandum competit ipſi A, ſit quantumvis parva. Ita poteſt A haberi pro quieſcente, vel quaſi, & tota quaſi vis ejus ſoluto mox nexu, ſeu linea rigida ſublata, translata erit in B. Adhibeo lineas rigidas mole carentes, exemplo aliorum, qui & puncta gravia fingunt, aliiſque id genus demonſtrationum ſubſidiis utuntur, non utique aſpernandis, quando non de praxi, ſed rationibus indagandis agitur. Et compertum habeo, nunquam inde aliquid falſi deduci. Cùm Florentiæ eſſem, dedi amico aliam adhuc demonſtrationem pro poſſibilitate translationis virium totalium &c. corpore majore in minus quieſcens, prorſus affinem illis ipſis quæ Clariſſ. *Papinus* ingenioſiſſimè pro me juvando excogitavit, pro quibus gratias debeo, imò & ago ſinceritate ejus dignas. Quamvis enim mox ipſe reſpondere tentet, & pag. 11. de inſtantia a ſe ipſo facta ita diſſerat: *Ad id reſpondeo, negari non poſſe validitatem hujus argumenti, ſi ſupponamus vectem perfectè durum, & rigidum, verum non datur in rerum natura ejuſmodi perfecta durities.* Spero tamen, omnibus expenſis ipſummet animadverſurum, vim argumenti non ita facilè eludi poſſe. Pro certo enim habeo, leges naturæ, ac motus ita debere concipi, ut nullum oriatur abſurdum, etiamſi corpora ſummè rigida ponantur, quemadmodum eſt Dn. *Malebranchium* admonui. Neque ullum, credo, exemplum contrarium afferetur. Quin & ſufficeret ad argumenti efficaciam, non eſſe impoſſibilia corpora perfectè rigida, etſi actu non darentur. Ut taceam, talia corpora ſecundùm atomorum patronos neceſſariò debere reperiri in natura. Quin etſi concedamus, nulla dari corpora perfectè rigida, imò nec dari poſſe, quoniam tamen elaſtica corpora promtæ admodum, plenæque reſtitutionis in effectu rigidis æquipollent, idemque cum ipſis præſtant, exiguo quantum voles diſcrimine, itaque ſi ipſe vectis ſit ſufficienter rigidus, ſeu reſtitu-

reſtitutionis quantum ſatis eſt plenæ, ac promtæ, effici poterit, ut aberratio a perfectè rigido, ſit data minor, adeoque vis omnis noſtro argumento manebit, nec potuit motus perpetuus (ſaltem in theoria) evitari, niſi nuntius mittatur opinioni *Carteſianorum.*

Supereſt ut contrario Clariſſimi Antagoniſtæ argumento ſatisfaciam. Ejus enim ſpecioſitate videtur unicè impeditus fuiſſe, ne meæ demonſtrationi manus daret, quod & ipſe *p.* 11. innuit, cùm ait: *Satis eſt mihi aliquod Argumenti dubium oſtendere; quum enim ſuprà allata demonſtratio, qua* Carteſianorum *ſententia probatur, ſit evidentiſſima* (id cujuſmodi ſit, nunc videbimus) *modò adverſa opinio eadem certitudine non gaudeat, ſatis liquet priorem eſſe proferendam.* Cùm ergo dubium meæ demonſtrationi objectum ſuſtulerim, nunc contrarium argumentum ſolvere aggrediar. Quod huc redit: Quæ æqualem vincere poſſunt reſiſtentiam, eorum vires ſunt æquales; ſed corpus A 4 librarum, habens velocitatem unius gradus, & corpus B libræ unius, habens velocitatem 4 graduum, æqualem vincere poſſunt reſiſtentiam; ergo corporum A, & B vires ſunt æquales. Minorem ratiocinatione p. 8. (ad formam Logicorum redacta) probat tali proſyllogiſmo: Quæ æqualem numerum impreſſionum gravitatis vincere poſſunt, ea æqualem vincere poſſunt reſiſtentiam: ſed corpora, A, & B æqualem numerum impreſſionum vincere poſſunt. Ergo &c. Minor hujus proſyllogiſmi ſic porrò probatur: Si corpora A & B aſcendant in planis ſimiliter inclinatis (vel etiam ambo perpendiculariter) tempora, quibus ſuam aſcendendi vim conſument, ſeu pervenient quouſque poſſunt, erunt ut celeritates, uti conſtat ex *Galilæi* ratiocinationibus. Sed celeritates in noſtro caſu ſunt reciprocè ut corpora A, & B (ex hypotheſi) ergo & tempora aſcendendi ſunt reciprocè ut corpora A & B; ſed quantitas impreſſionum gravitatis aſcenſu ſuperanda, eſt in ratione compoſita, & corporis in quod fit impreſſio, & temporis quo durante fit impreſſio; (quoniam ſi corpus pariter, & tempus dividantur in partes æquales, æqualis eſt impreſſio in qualibet parte corporis, & in qualibet parte temporis.) Et ratio compoſita eorum, quæ reciprocè proportionalia ſunt, eſt ratio æqualitatis. Itaque quantitas impreſſionum, ſeu numerus æqualium impreſſionum gravitatis in corpora A, & B eſt æqualis. Ad hoc argumentum reſpondeo, negando minorem Syllogiſmi principalis, & ad probationem reſpondeo, negando majorem proſyllogiſmi ita habentem: Quæ æqualem numerum impreſſionum gravitatis vincere poſſunt, ea æqualem vincere poſſunt reſiſtentiam. Hanc, inquam, propoſitionem nego, ſumendo ſcilicet *reſiſtentiam*, pro quantitate virium contrariarum. Et ne quis temerè, aut affectatè eam a me negari putet, ſciendum eſt, in ea contineri id ipſum quod eſt in quæſtione. Cùm enim impreſſio gravitatis nihil aliud ſit, quàm gradus velocitatis cuivis parti impreſſus, utique ſi reſiſtentiam, ſeu vim contrariam paterer hac impreſſione menſurari, concederem vim æſti-

mandam eſſe ex ductu velocitatis in corporis quantitatem, ſeu ex quantitate motûs. Atque hæc quidem ad oppoſitum mihi argumentum.

Ego verò, ut conſilii mei rationes tandem aperiam, quantitatem reſiſtentiæ, ſeu effectus non æſtimo gradibus velocitatis, hoc eſt entibus modalibus, ſive incompletis, ſed ſubſtantiis, ſeu realibus abſolutis; atque in hoc neglecto πρῶτον ψεῦδος adverſæ partis conſiſtere arbitror, & ea judico VIRIBUS ÆQUALIA eſſe, quæ æqualem numerum elaſtrorum æqualium vi ſua ad eumdem poſſunt tenſionis gradum perducere, aut quæ eumdem numerum librarum poſſunt attollere ad altitudinem eamdem ſupra cujuſque ſitum priorem, vel etiam (ſi rem a phyſicis concretis ad purè mechanica traducere malimus) quæ æquali numero corporum æqualium eamdem velocitatem imprimere poſſunt; aut denique quæ quamcumque rem potentia præditam (tamquam *menſuram*) æquali numero repetitam exhibere poſſunt. Et duo VIRIBUS INÆQUALIA, eam judico inter ſe PROPORTIONEM VIRIUM HABERE, quæ eſt proportio inter replicationes *menſuræ*, verbi gratiâ inter numeros æqualium inter ſe elaſtrorum, vel ponderum æqualiter ab ipſis intendendorum, aut attollendorum, vel inter numeros corporum æqualium æqualem velocitatem ab ipſis recipientium. Hac æſtimandi ratione vires reducuntur ad quamdam *menſuram*, ſemper ſibi congruam, tantumque repetendam, & eveniet, ut æſtimatio facta ſecundùm unam menſuram pro arbitrio electam, ſuccedat etiam ſecundum aliam quamcumque; alioqui natura careret legibus. Aſt hæc non ſuccedunt, ſed invicem pugnant in æſtimatione per gradus velocitatis replicatos, quam oſtendi cum aliis irrefragabilibus, & ſemper inter ſe conſentientibus æſtimandi modis non conſentire: cujus rei vera atque intima cauſa eſt, quòd ſic nulla, accuratè loquendo, vera & realis menſura adhibetur. Etſi enim (quod probè notari velim) fatear, tria corpora æqualia, & æquivelocia præcisè triplo plus habere potentiæ, quàm eorum unum, quia una eademque menſura etiam hic ter repetitur; ter enim repetitur corpus quale ſingulorum, certæ quantitatis: non tamen ideo concedo, corpus tres habens velocitatis gradus, ter continere corpus ipſi æquale unum habens velocitatis gradum, aut adeo triplam ejus potentiam habere; etſi enim ter contineat velocitatis gradum, non tamen & quantitatem corporis ter continet, ſed tantùm ſemel. Unde patet, velocitatem ab æſtimandarum virium officio a me non excludi: oſtendo enim, quicquid demum ad ipſarum determinationem afferatur, ut elaſtrum datæ tenſionis, pondus datæ magnitudinis, & elevationis, corpus datæ molis, & velocitatis &c. unum vel plura, ſi a cauſa poſſint præſtari, aut exhiberi, poſſe etiam exhiberi ab effectu, & viciſſim. Et quamcumque demum *realem* virium *menſuram* aſſumo, ſemper conſenſum reperio etiam pro reliquis. Sed ubi *modalis* quædam menſura aſſumta eſt, gradus verbi gratia velocitatis replicandus ſine replicatione corporis (ſtatuendo

tuendo nimirum duorum corporum æqualium vires eſſe ut velocitates) illico induimur in abſurditates, & ſine cauſa vel amittimus partem potentiæ, vel lucramur. Quæ in exemplum utilia eſſe poſſunt, ne abſtractis nimium fidamus, neve in realis Metaphyſicæ præcepta impingamus. Ex his igitur intelligitur, quòd hactenus a pleriſque in hoc negotio non ſatis rectè proceſſum eſt, oriri ex defectu *Matheſeos verè generalis*, ſeu *ſcientia æſtimandi* in univerſum, quæ nondum, quod ſciam, tradita eſt, & cujus hic aliquod ſpecimen damus. Quòd ſi jam numerus vincendorum elaſtrorum librarum, aut aliorum effectuum realium inter ſe congruentium ad æſtimandam potentiam adhibeatur, ſtare non poterit recepta opinio: mea autem indubitato prodibit, ſimulque omnes illæ abſurditates ſuprà hìc adductæ ceſſabunt, nec unquam ſubſtituetur alteri, cui non alterum viciſſim ſubſtitui poſſit, neque unquam cauſa producere poterit, quod non effectus integer poſſit, aut viciſſim; quæ in adverſa ſententia locum non habent. Sed hæc prolixè deducere neceſſe non eſt, cùm a Dn. *P.* aliiſque hæc meditaturis facilè animadvertantur. Gratiſſimum autem erit intelligere, an aliqua ſuperſint, in quibus Vir Clariſſimus nondum ſibi ſatisfactum putet, quæ ſi methodicè, & preſſo pede, ut ſolet, proponere volet, a me pariter, ac Cultoribus harum literarum inibit gratiam. Spero enim hac ratione abſolvi quod reſtat, & collatione inter nos continuata tanti momenti negotium (quo conſtituendæ ſunt veræ leges naturæ) ad finem perduci poſſe.

N°. XXXIII.

ADDITIUNCULA AD CONSIDERATIONES Cl. Dn. Lichtſcheidii.

Ex Actis Erudit. Lipſ. ann. 1691.

PErplacent quæ Cl. Dn. *Lichtſcheid* ingenioſè excogitavit circa motus pendulorum non tantùm per Geometriam, ſed & per experimenta examinandos. Reſponſum meum ad *Papinianas* objectiones interim ad ipſum perveniſſe puto. Lineam, quam per puncta deſcribere docet (tamquam locum certis pendulorum oſcillationibus determinandis inſervientem) quæ nonnihil compoſita prima fronte viſa eſt, deprehendi ipſiſſimam eſſe parabolam, cujus (ſi figura ipſius 6 inſpiciatur) vertex ſit V, axis VEZ, & VA ſit quarta pars lateris recti, ita ut *a* ſeu EB ſit ſemilatus. Et reperiet rectas tranſverſim ductas (ut V2, V4, V6, &c.) eſſe omnes ad curvam, (ſeu ejus tangentem) normales, ex nota parabolæ proprietate. Ita etiam ipſius operâ quædam non inelegantia circa parabolam obſervata habemus.

N°. XXXIV.

DE LA CHAINETTE,

Ou Solution d'un Problême fameux, propoſé par *Galilei*, pour ſervir d'eſſai d'une nouvelle analyſe des infinis, avec ſon uſage pour les logarithmes, & une application à l'avancement de la Navigation. Par M. G. G. Leibniz.

Tiré du Journal des Savans année 1692.

L'Analyſe ordinaire de *Viete*, & de *Deſcartes* conſiſtant dans la reduction des problêmes à des équations, & à des lignes d'un certain degré, c'eſt-à-dire, au plan ſolide, ſurſolide, &c. Mr. *Deſcartes* pour maintenir l'univerſalité, & la ſuffiſance de ſa méthode, trouva à propos d'exclurre de la Géométrie tous les problêmes, & toutes les lignes qu'on ne pouvoit aſſujettir à cette méthode, ſous prétexte que tout cela n'étoit que mécanique. Mais comme ces problêmes, & ces lignes peuvent être conſtruites, ou imaginées par le moyen de certains mouvemens exacts, qu'elles ont des proprietés importantes, & que la nature s'en ſert ſouvent, on peut dire qu'il fit en cela une faute ſemblable à celle qu'il avoit reprochée à quelques anciens, qui s'étoient bornés aux conſtructions, où l'on n'a beſoin que de la régle & du compas, comme ſi tout le reſte étoit mécanique. Mr. *de Leibniz* ayant remarqué qu'il y a des problêmes, & des lignes qui ne ſont d'aucun degré déterminé, c'eſt-à-dire, qu'il y a des problêmes dont le degré même eſt inconnu ou demandé, & des lignes dont une ſeule paſſe continuellement de degré en degré; cette ouverture le fit penſer à un calcul nouveau, qui paroit extraordinaire, mais que la nature a reſervé pour ces ſortes de problêmes tranſcendans, qui ſurpaſſent l'Algébre ordinaire. C'eſt ce qu'il appelle l'*Analyſe des infinis*, qui eſt entiérement différente de la Géométrie des indiviſibles de *Cavalieri*, & de l'Arithmétique des infinis de Mr. *Wallis*. Car cette Géométrie de *Cavalieri*, qui eſt très bornée d'ailleurs, eſt attachée aux figures, où elle cherche les ſommes des ordonnées; & Mr. *Wallis*, pour faciliter cette recherche, nous donne par induction les ſommes de certains

rangs

rangs de nombres: au lieu que l'analyſe nouvelle des infinis ne regarde ni les figures, ni les nombres, mais les grandeurs en général, comme fait la ſpacieuſe ordinaire. Elle montre un algorithme nouveau, c'eſt-à-dire, une nouvelle façon d'ajouter, de ſouſtraire, de multiplier, de diviſer, d'extraire, propre aux quantités incomparables, c'eſt-à-dire, à celles qui ſont infiniment grandes, ou infiniment petites en comparaiſon des autres. Elle employe les équations tant finies qu'infinies, & dans les finies elle fait entrer les inconnues dans l'expoſant des puiſſances, ou bien au lieu des puiſſances, ou des racines, elle ſe ſert d'une nouvelle affection des grandeurs variables, qui eſt la variation même, marquée par certains caractères, & qui conſiſte dans les différences, où dans les différences des différences de plufieurs degrés, auxquelles les ſommes ſont réciproques, comme les racines le ſont aux puiſſances.

Une partie des élémens de ce calcul, avec pluſieurs échantillons, a été publiée dans le journal de Leipſic, où l'auteur l'a appliquée particuliérement à quelques problêmes géométrico-phyſiques; comme par exemple à la ligne iſocrone, dans laquelle un corps peſant approche uniformément de l'horizon en deſcendant; à la ligne loxodromique, ou des rumbs de vent, pour réſoudre les plus utiles problêmes géométriques de la navigation, où l'on n'étoit arrivé juſqu'ici qu'imparfaitement par certaines tables ſubſidiaires; à la réſiſtance des ſolides, ou des liquides, pour avancer la Mécanique, & particuliérement la Baliſtique; aux loix harmoniques des mouvemens planétaires, pour approcher de la perfection de l'Aſtronomie; & à d'autres uſages de conſéquence. Cette méthode fut applaudie, & ſuivie d'abord par quelques perſonnes habiles. Mr. *Craigh* s'en ſervit en Angleterre; & enſuite Mr. *Bernoulli* Profeſſeur de Bâle, connu par pluſieurs belles productions de Mathématique, l'ayant étudiée, & en ayant remarqué l'importance, pria l'auteur publiquement de l'appliquer à la recherche de la ligne d'une chainette ſuſpendue par les deux bouts, que *Galilée* avoit propoſée, mais qu'on n'avoit pas encore déterminée juſqu'ici.

L'Auteur de la méthode y réuſſit d'abord, & pour donner aux autres l'occaſion d'exercer encore leur méthode, propoſa publiquement ce même problême, leur donnant le terme d'un an. Le frére de Mr. *Bernoulli* ayant appris que cette méthode y alloit, la médita de telle ſorte, qu'il vint à bout du problême, & donna à connoître par là ce qu'on doit attendre de lui. Mrs. *Bernoulli* pouſſérent même la recherche plus loin, & l'appliquérent à d'autres problêmes, qui ont de l'affinité avec celui-ci. De ceux qui ont employé d'autres méthodes, on ne connoit que Mr. *Huygens* qui ait réuſſi. Il eſt vrai qu'il ſuppoſe la quadrature d'une certaine figure. Du reſte en ce qui étoit commun aux ſolutions, ou remarques ſur cette ligne, il s'eſt trouvé un parfait accord, quoiqu'il n'y

ait eu aucune communication entre les auteurs des ſolutions; ce qui eſt une marque de la vérité, propre à perſuader ceux qui ne peuvent, ou ne veulent pas examiner les choſes à fond.

Par la méthode nouvelle le problême a reçu une parfaite ſolution; Mr. *de Leibniz* qui a été le premier à réſoudre ce problême, l'ayant réduit à la quadrature de l'hyperbole; ce que Mr. *Bernoulli* a fait auſſi enſuite: mais la conſtruction de Mr. *de Leibniz* donne enfin le moyen de marquer autant de points qu'on voudra de la ligne demandée, en ſuppoſant une ſeule proportion une fois pour toutes, & n'employant du reſte aucune quadrature ni extenſion de courbe, mais les ſeules moyennes, ou troiſiémes proportionnelles. Et comme c'eſt tout ce qu'on peut ſouhaiter pour les problêmes tranſcendans, il ſera bon de donner ici cette conſtruction.

Ta. XIII. Fig. 48. Soient menées les droites infinies N O (N) horizontale, & O A B verticale. Soient paralleles, & continuellement proportionnelles autant qu'on voudra de droites, comme 3 N 3 ξ, 1 N 1 ξ, O A, 1 (N) 1 (ξ), 3 (N) 3 (ξ) &c. dont les diſtances 3 N 1 N, 1 N O, O 1 (N), 1 (N) 3 (N), &c. ſoient toujours égales; en ſorte pourtant que prenant 3 N O, ou O 3 (N) égal à O A, ſoient 3 N 3 ξ à O A, ou O A à 3 (N) 3 (ξ) en raiſon de D à K, qu'on ſuppoſe connue une fois pour toutes, & toûjours la même. Ainſi appliquant autant de moyennes, ou troiſiémes proportionnelles qu'on voudra, pourvu que toujours les intervalles des proportionnelles ſoient égaux, on aura la ligne logaritmique ξ A (ξ) paſſant par tous les ξ, où O A étant priſe pour l'unité, & les N ξ étant comme les nombres, les intervalles O N ſeront comme les logarithmes. Maintenant prenons dans la verticale O A B une moyenne arithmétique O B, entre deux nombres N ξ, & (N) (ξ), qui ont le même logarithme O N, ou O (N), c'eſt-à-dire, dont la moyenne géométrique eſt l'unité O A: accompliſſons les rectangles B O N C, B O (N) (C), & C, (C) ſeront des points de la chainette demandée, F C A (C) L, ſuſpendue aux deux extrémités F & L, dont le ſommet renverſé ſera A, l'axe O A B, & le paramétre ſera O A, où l'unité priſe arbitrairement; & O B, ou N C ſera la hauteur du point de la chainette C, au deſſus de l'horizontale N C (N); & B C, ou O N logarithme commun des deux nombres N ξ, (N) (ξ) ſera la largeur de la chainette, à cette hauteur, ou la diſtance du point C de l'axe.

Quant aux principaux problêmes qu'on a coutume de chercher ſur les lignes, ſçavoir les tangentes, dimenſion de la courbe, quadrature de ſon aire, centres de gravité, tant de la ligne que de l'aire, ou dimenſions des ſurfaces, & des contenus des ſolides, formés par la rotation de la ligne autour de quelque droite qu'on voudra prendre pour l'axe; on trouvera

trouvera tout cela renfermé dans ce peu de paroles qu'on a miſes à la figure.

Mettons ſeulement ici l'uſage principal de cette ligne, & faiſons voir comment elle pourroit ſervir pour les logarithmes, & toutes ſortes de proportionnelles, moyennes, ou extrêmes, multiplication, diviſion, règles de trois, ou extractions; pourvû qu'on ſuppoſe que cette ligne puiſſe être décrite phyſiquement par le moyen d'une chaîne déliée, que je préfére à une corde, laquelle ſe peut étendre, & n'eſt pas ſi flexible.

Etant donné le nombre O ω, ſoit ce nombre, & à l'unité O A, la troiſiéme proportionnelle O ψ; & entre O ω, O ψ, moyenne arithmétique O B, de B menons à la chainette l'ordonnée B C, & *nous aurons le logarithme demandé* B C ou O N.

En échange *étant donné le logarithme* O N, menons de N à angle droit ſur O N, la droite de N C, rencontrant la chainette en C; & du centre O du rayon O B, égal à N C, décrivons l'arc de cercle qui coupe A R, horizontale par le ſommet A, au point R. Après quoi la différence & la ſomme des droites O R, A R *ſeront les deux nombres demandés* N ξ, & (N) (ξ), l'une au deſſus, l'autre au deſſous de l'unité O A, *dont le logarithme commun étoit donné* O N. Il reſulte encore de ceci; & des découvertes de l'auteur de cette méthode ſur la loxodromie, qu'il a réduite aux logarithmes, qu'on pourroit réſoudre ſans tables par la chainette ſuſpendue, comme par les logarithmes, le plus important problême de la Géométrie de la navigation, qui eſt: *L'angle de la Loxodromie, ou le rumb de vent avec lequel on va d'un lieu à un autre, étant donné auſſi-bien que la différence des latitudes, trouver la différence des longitudes.*

Cela peut ſervir, parce que dans les grands voyages on peut perdre la table des logarithmes, ou la table logarithmiquement graduée, que Mr. *de Leibniz* a propoſée. Mais la chainette y pourroit ſuppléer en cas de beſoin. Pour ne rien dire ici des autres règles qu'il a publiées pour ſe paſſer au beſoin des tables tant des ſinus ou tangentes, que de leurs logarithmes, ſans rien perdre de la préciſion, voici en peu de mots la règle qu'il a donnée pour les rhumbs, ou loxodromiés, qui pourra tirer les Hydrographes de l'embarras où ils témoignent ſe trouver ſur ce ſujet.

La différence des longitudes eſt au logarithme de la raiſon qu'il y a du nombre $\frac{1+e}{1-e}$ au nombre $\frac{1+(e)}{1-(e)}$ comme la tangente de l'angle que le rhumb, ou la loxodromie fait au méridien, & à un certain nombre conſtant, & perpétuel, qu'on peut marquer une fois pour toutes; ſuppoſé que le ſinus total ſoit l'unité, & que *e* ſoit le ſinus de la latitude plus grande, & (*e*) le ſinus de la latitude plus petite. Et s'il y avoit une carte, où les degrés de longitude fuſſent égaux, les méridiens paralléles, & par conſéquent les loxodromies repréſentées par des droites, il

il faudroit repréſenter les degrés de latitude, dans les diviſions du méridien; en telle ſorte qu'une droite qui couperoit obliquement les méridiens éloignés l'un de l'autre plus prochain d'un même intervalle, par exemple, des méridiens diſpoſés de degrés en degrés, y rencontreroit des latitudes, dont les ſinus étant e, & le ſinus total 1, les nombres $\frac{1+e}{1-e}$ ſeroient en progreſſion géométrique. Ce qui ſuffit pour la conſtruction d'une carte graduée comme il faut pour la Marine. On en peut encore conſtruire d'autres ſur le même fondement.

N°. XXXV.

DE LINEA EX LINEIS

Numero infinitis ordinatim ductis inter ſe concurrentibus formata, eaſque omnes tangente, ac de novo in ea re Analyſis infinitorum uſu.

Ex Actis Erud. Lipſ. ann. 1692.

ORdinatim applicatas vocare ſolent Geometræ rectas quotcumque inter ſe parallelas, quæ a curva ad rectam quamdam (directricem) uſque ducuntur quæ cùm ad directricem (tamquam *axem*) ſunt normales, ſolent vocari *ordinatæ κατ' ἐξοχὴν*. *Deſargueſius* rem prolatavit, & ſub ordinatim applicatis etiam comprehendit rectas *convergentes* ad unum punctum commune, aut ab eo *divergentes*. Et ſanè parallelæ ſub convergentibus, aut divergentibus comprehendi poſſunt, fingendo punctum concurſus infinitè ab hinc diſtare. Verum quia multis aliis modis fieri poteſt, ut infinitæ duci intelligantur lineæ ſecundùm legem quamdam communem, quæ tamen non ſint parallelæ, vel convergentes ad punctum omnibus commune, aut a puncto omnibus communi divergentes, ideo nos tales lineas generaliter vocabimus *ordinatim ductas*, vel ordinatim (poſitione) datas. Exempli causâ, ſi ſpeculum aliquod, vel potiùs ſectio ejus a plano per axem, cujuſcumque figuræ poſitione datæ, radios Solares, ſive immediatè, ſive poſt aliam quamdam reflexionem, aut refractionem advenientes reflectat; iſti radii reflexi erunt infinitæ lineæ rectæ ordinatim ductæ, & dato quovis puncto ſpeculi (cæteris manentibus) dabitur radius reflexus

reflexus ei *reſpondens.* Verùm ego ſub ordinatim ductis non tantùm rectas, ſed & curvas lineas qualeſcumque accipio, modò *lex* habeatur, ſecundùm quam dato lineæ cujuſdam datæ (tamquam *ordinatricis*) puncto, reſpondens ei puncto linea duci poſſit, quæ una erit ex ordinatim ducendis, ſeu ordinatim poſitione datis. Ordine enim percurrendo puncta ordinatricis (verbi gratiâ lineæ, cujus rotatione ſit ſpeculum paulo antè dictum, ſeu ſectionis ejus per axem) ordine prodibunt lineæ illæ ordinatim datæ. Porrò etſi eæ non concurrant omnes ad unum punctum commune, tamen regulariter duæ quævis tales lineæ *proximæ*, (id eſt *infinitesimè* differentes, ſeu infinitè parvam habentes diſtantiam) concurrunt inter ſe, punctumque concursûs eſt aſſignabile, & his concurſibus ordinatim ſumtis, nova prodit *linea concurſuum*, quæ eſt omnium concurſuum inter proximas locus communis, habetque hoc egregium, quòd omnes ordinatim ductas, quarum concurſu formatur, tangit, quam proprietatem cum meditantibus ſatis appareat, demonſtrare hic non eſt opus. Talis eſt *linea evolutione generans*, ea enim omnes rectas ad curvam evolutione generatam perpendiculares tangit, ex *Hugeniano* invento. Tales ſunt lineæ plures *coëvolutione generantes*, quas Dn. *D. T.* excogitavit, & *quaſi Foci* ab eodem introducti, cùm concurſus radiorum non fiunt in puncto, ſed in ejus locum *Focus* eſt *linearis*, concurſu ſaltem duarum proximarum quarumcumque formatus. Sed cùm hæc non niſi ad rectas pertineant, ſciendum eſt aliquid analogum, & in curvis locum habere. Ita linea reflectens, quæ radios ſecundùm quamcumque præſcriptam legem a lucido, vel ſpeculo aut lente (una pluribuſve) datarum figurarum, venientes reddit iterum convergentes (divergentes, aut parallelas) cujus conſtructionem in his Actis dedimus, formatur ex concurſu infinitarum ellipſium (hyperbolarum, aut parabolarum.) Et hinc quoque methodus haberi poterat, problema illud prima fronte tam difficile ſolvendi: nam infinitæ illæ ellipſes ſunt ordinatim poſitione datæ, adeoque & linea concurſuum data eſt, ſeu haberi poteſt. Et hæc methodus ad multa alia præſtanda aditum præbet, quæ aliàs vix videbantur eſſe in poteſtate. Quæ etiam cauſa eſt, cur viam hanc novam Geometris aperire voluerim. Res autem pendet a noſtra *Analyſi indiviſibilium*, & calculus hujus methodi tantùm applicatio eſt noſtri calculi differentialis. Nempe conſtituta ſemel æquatione locali, (ſeu ad curvam lineam, unam ex ordinatim datis,) ſed generali, (legem omnibus communem exhibente) hujus æquationis jam quæratur æquatio differentialis, modò mox dicendo, & ope harum æquationum habetur quæſitum. Et quidem cum linea alicujus curvæ ad punctum quodcumque in ea datum quæritur tangens, tunc etiam tantum opus eſt *æquationem ejus* curvæ *differentiare*, ſeu quærere æquationem, quæ ſit differentialis ad æquationem curvæ localem, ſed tunc *parametri*; ſeu rectæ magnitudine *conſtantes*, lineæ conſtructionem, vel æquationis pro ipſa

calculum ingredientes, quæ per *a*, *b*, &c. deſignari ſolent, cenſentur *unicæ*, ſeu *indifferentiabiles*, quemadmodum, & ipſa recta tangens, vel aliæ nonnullæ *functiones* ab ea pendentes, verb. gr. perpendiculares ad tangentem ab axe ad curvam ductæ. Verùm tam *ordinata*, quàm *abſciſſa*, quas per *x* & *y* deſignari mos eſt (quas & *coordinatas* appellare ſoleo, cùm una ſit ordinata ad unum, altera ad alterum latus anguli, a duabus *condirectricibus* comprehenſi) eſt *gemina*, ſeu *differentiabilis*. Hic verò in noſtro calculo præſenti cùm non quæritur tangens quæcumque unius curvæ in quocumque ejus puncto, ſed tangens unica infinitarum curvarum ordinatim ductarum, unicuique in ſuo puncto reſpondenti occurrens, adeoque cùm quæritur uni ex his curvis aſſumptæ reſpondens punctum contactûs, tunc contrarium evenit, & tam *x* quàm *y* (vel alia functio ad punctum illud determinandum æquivalens) eſt *unica*; ſed aliqua minimum parameter *a* vel *b* debet eſſe *gemina* ſeu differentiabilis, ea nimirum, qua variata etiam variantur curvæ ordinatim datæ. Et quidem, licèt unius curvæ plures poſſint eſſe rectæ conſtantes, ſeu parametri, (exempli causâ ellipſis omnis, & hyperbolæ pleræque habent duas, cùm parabola & circulus habeant tantùm unicam,) tamen hic ſemper oportet ex datis eò rem tandem poſſe deduci, ut unica tantùm ſuperſit *conſtans* (in eadem curva) *variabilis* (pro diverſis) alioqui modus ordinatim eas ducendi non ſatis eſt determinatus. Interim nihil impedit cùm plures dantur æquationes determinantes, conſiderari plures parametros ut differentiabiles, cùm etiam plures æquationes differentiales pro ipſis determinandis haberi poſſint. Et plerumque datur *conſtantiſſima* (una, vel plures) ſeu parameter communis omnibus ordinatim ducendis; adeoque litera eam deſignans in calculo differentiali etiam manet indifferentiabilis. Hinc patet, eamdem æquationem poſſe habere diverſas æquationes differentiales, ſeu variis modis eſſe differentiabilem, prout poſtulat ſcopus inquiſitionis. Imò fieri poſſe expertus ſum, ut plures modi differentiandi eamdem æquationem jungantur inter ſe. Hæc omnia explicanda eſſent diſtinctiùs, atque exemplis illuſtranda, ſi inſtitutiones quaſdam novæ noſtræ *Analyſeos infinitorum* tradere vellemus; ſed ea res nec hujus eſt loci, & nec temporis noſtri. Et qui priora noſtra intellexerint, ac porrò meditari volent, ad hæc quoque non difficulter pertingent, & eò quidem jucundiùs, quòd in partem inventionis venire ſibi videbuntur. *Vocabulis* utor ſubinde *novis*, ſed quæ ipſe contextus explicat, neque ego in verbis facilè novare ſoleo, niſi cùm evidens eſt fructus, non tantùm ad brachylogiam, (alioqui enim vix licuiſſet hæc ſine multiplici calculo tradere) ſed & ad quamdam, ut ita dicam, admonitionem, atque excitationem mentis, atque univerſalia animo concipienda.

N°. XXXVI.

N°. XXXVI.

CONSTRUCTIO TESTUDINIS QUADRABILIS HEMISPHÆRICÆ.

Ex Actis Erudit. Lipſ. ann. 1692.

SUperficiem Sphæræ *Archimedes* demonſtravit æqualem eſſe circulo, cujus diameter ſit dupla diametri Sphæræ. Idem viam oſtendit, qua portio quæcumque Sphæræ, arcûs circuli rotatione genita, adeoque vel uno circulo abſciſſa, vel duobus comprehenſa, ad circulos, & circuli portiones reduci poteſt. Triangulum Sphæricum tribus circulis magnis contentum dudum dimenſi ſunt Geometræ. Nam quadrupla Trianguli area eſt ad ſuperficiem Sphæræ, ut ſumma angulorum, duobus rectis minuta, eſt ad duos rectos. Hinc jam, cùm dentur & triangula duobus circulis magnis, & uno minore ad ambos normali comprehenſa, facilè habentur etiam illa, in quibus anguli ſunt qualeſcumque; imò in triangulo jam magnitudine dato, alium circulum ex aliquo ejus angulo educendo, dantur & triangula comprehenſa uno magno, & duobus minoribus; ac denique tribus circulis quibuſcumque. Sed majus aliquid hìc agitur, ut ſcilicet menſurentur portiones ſuperficiei ſphæricæ aliis quoque lineis contentæ, & quod potiſſimum eſt, ut aſſignentur, quæ ſint abſolutæ quadrabiles. Videram dudum patere ad hæc aditum, ſed non omnia vacat agere; itaque non attigi, donec nuper Reverendiſſimus & Illuſtriſſimus Abbas *de Monte acuto*, Magni Ducis Hetruriæ Ablegatus ad aulam Cæſaream, juſſu Sereniſſimi Domini ſui hoc mihi elegantiſſimum ænigma Geometricum typis editum, attentandum miſit. *Quæritur forma Templi Hemiſphærici, ſed quatuor æqualibus, ac ſimilibus, ſimiliterque poſitis feneſtris ita interrupti, ut his detractis, reliquum hemiſphæricæ ſuperficiei ſit abſolutè quadrabile.* Hunc nodum aggreſſus ea ipſa, qua literas accepi, die ſolvi, & quidem infinitis modis, neque enim determinatum problema eſt. Non tamen ideo facile putari debet, aut ſolutu indignum; ſed rem paucis exponere operæ pretium erit, additis etiam nonnullis, quæ longiſſimè ultra quæſitum extenduntur.

(1.) Si ſphærica ſuperficies in Elementa reſolvatur ductis meridianis, & parallelis, areolæ Elementares inter duos meridianos, duoſque parallelos comprehenſæ, erunt in ratione compoſita elementorum æquatoris inter

ter meridianos, & elementorum axis inter parallelos; æqualeſque produc-
Tab XIII. tis ex his elementis in ſe invicem reſpectivè ductis, ita *fig.* 49. areola LN
Fig. 49. erit ad areolam N R in ratione compoſita HG ad GQ, & S Γ ad ΓV. Quod ſecundùm meam *Analyſin infinitorum differentialem* ita apparet, ſi PK vel KH ſit radius r, & PL arcus ſit a, & ejus ſinus verſus PS ſit x, & ſinus rectus LS ſit y, & QH ſit v, fiet LM, da, & ST, dx & GH, dv & NM $y\,dv : r$ & $da = r\,dx : y$. Jam areola LN, eſt NM in LM, ergo eſt $dv\,dx$. Hæc prolixiùs non explico, quòd mea principia tam *Geometriæ incomparabilium*, quàm *Analyſeos infinitorum* in Actis Eruditorum jam prodiere.

(2.) Iiſdem poſitis, trilineum elementare duobus meridianis, & elemento paralleli comprehenſum, æquatur rectangulo ſub ſinu verſo graduum meridiani, & elemento æquatoris inter meridianos intercepto. Nempe in eadem *figura* 49. PMNP æqu. PT in GH, ſeu ſuperficiei cylindricæ elementari GHAD. Nam quia LMN æqu. $dvdx$, per præcedentem, ergo trilineum elementare ſphæricum PMNP, quod eſt ſumma omnium hujuſmodi areolarum inter P & M (manente ſemper eadem dv,) ſeu $\overline{\int dx\,dv}$ erit $x\,dv$.

(3.) Trilineum in ſuperficie ſphærica duobus arcubus meridianorum (ſeu circulorum magnorum) & linea alia quacumque ſubtendente comprehenſum, æquatur portioni ſuperficiei cylindricæ, cujus baſis ſit arcus æquatoris inter meridianos interceptus, ipſa autem ſuperficies formetur, dum puncto, quo quiſque meridianus ſecat æquatorem, normaliter ad planum æquatoris inſiſtit recta, æqualis ſinui verſo graduum meridiani, inter polum, & lineam ſubtendentem interceptorum. Nempe in eadem *fig.* 49. dum reſpectivè æquantur HF, GD, QB, ipſis PS, PΓ, PV, & ita in reliquis punctis; tunc portio ſuperficiei cylindricæ HQBF (ſeu ſuperficies ungulæ) æquatur trilineo in ſuperficie ſphærica deſcripto PMRP, nam quia (per præcedentem) FHGD æquatur ipſi PMNP, & DGQB ipſi PXRP, & ita in cæteris quotcumque, conſequens eſt tota totis æquari, PMRP ipſi HQBF.

(4.) Superficies cylindrica, quæ fit, dum ſinûs recti punctis reſpondentibus arcus circuli normaliter ad planum circuli inſiſtunt, æquatur rectangulo ſub radio, & portione axis inter ſinus rectos extremos inter-
Tab. XIV. cepta. Et proinde quadrari abſolutè poteſt. Ita in *fig.* 50. ſi ubique BC
Fig. 50. ſit æqu. AB, ſuperficies cylindra B (B) (C) C æquabitur rectangulo ſub radio, & A (A). Hæc propoſitio etſi ex calculo noſtro paulo ante poſito ſtatim derivari poſſit, quia tamen dudum innotuit Geometris, non eſt cur immoremur. Videantur qui de linea Sinuum & Cycloide egere.

(5.) Quadratura carbaſi ſeu Lunulæ ſphæricæ certis modis deſcriptæ,
Tab. XIV. Res nova. Sit in *fig.* 51. hemiſphæricæ ſuperficiei quadrans PDQSAEP,
Fig. 51. unde abſcindatur carbaſus, ſeu Lunula ſphærica PEALλP, per lineam ALLP,

ALLP, ita in ſphærica ſuperficie ductam, ut ducto meridiano PLS, per L, occurrente æquatori in S, ſit FS, vel FΣ, ſinus rectus ipſius QS vel ipſius QΣ arcus æquatoris, æqualis ipſi PB, Sinui verſo ipſius PNL, arcus meridiani. Hæc Carbaſus integra PEALλP æquatur ipſi plano K♃, quod eſt quadratum radii ſphæræ. Sed & portio ejus quæcumque habetur. Nam P1N1L3LP æquatur rectangulo 1F3M comprehenſo ſub radio, & 1F3F, differentia ſinuum verſorum Q1F, Q3F, quos habent extremi arcus æquatoris Q1S & Q3S. Hæc ita demonſtrantur: rectæ Sω æquales ipſis FS vel PB, inſiſtant arcui æquatoris QSA normaliter ad planum æquatoris KAQ; ita formabunt ſcutum ACωQSA, quod eſt medietas ſuperficiei cylindricæ artic. præcedenti deſcriptæ. Jam quoniam Sω æqu. PB, ideo (per artic. 3.) carbaſi portio P1N1L3LP æquatur Scuti portioni 1S1ω3ω3S1S, ſed hæc æquatur rectangulo 1F3M per artic. 4. Similiter tota carbaſus PEALλP æquatur toti ſcuto ACωQSA per 3; & hoc æquatur plano K♃, quod eſt quadratum radii per 4, ut proponebatur.

(6.) Carbaſum ſphæricam efficere, quæ ſit in data ratione ad quadratum radii ſphæræ; ratione, inquam, minoris ad majus. Hoc fiet lineam PLLA ducendo ſic, ut PB ſinus verſus ipſius arcûs PNL (portionis meridiani PLS), non ſit æqualis ipſi FS ſinui recto ipſius arcûs QS, (portionis æquatoris QSA) ut in præcedenti, ſed in data ratione minor, unde manifeſtum eſt in eadem ratione, & carbaſum quadrato radii minorem fore.

(7.) Teſtudinem hemiſphæricam æqualiter quadrifeneſtratam efficere, ita ut hemiſphærii ſuperficies demtis feneſtris ſit quadrabilis, idque infinitis modis, adeo ut hemiſphærica hæc ſuperficies perforata ſit in data ratione ad quadratum diametri; ratione, inquam, minoris ad majus. Nempe ſi in Teſtudinis, ſeu templi hemiſphærici quadrante quovis fiat, quod factum eſt in quadrante PEASQDP. *fig.* 51. Nam hæc hemiſphærica teſtudo perforata conſtabit quatuor carbaſis, ex quibus una ſit PλLAEP, ex feneſtris autem quatuor (ſeu foraminibus) erit una PλLASQDP. Et per artic. 5. fornix, ſeu teſtudo ſic perforata, tota æquabitur quadrato diametri (nempe quadruplo quadrati a radio ſeu carbaſi) aut (per 6.) erit in data ratione minor, Quod Erat Faciendum. Eſt autem QA portio baſis, ſeu quadrans horizontis; P, Zenith; PA, PQ, quadrantes azimuthales.

(8). Alias teſtudines hemiſphæricas perforatas quadrabiles efficere. Exempli causâ invertatur figura, ut A fiat Zenith, & PQ arcus Horizontis, tunc alius fiet quadrans teſtudinis ex carbaſo, & feneſtra corniculata (ut priùs) conſtans, ſed inverſis. Aliter invertatur figura, ut fiat Q Zenith, & AP arcus horizontis, ſeu baſis, habebitur quadrans teſtudinis, quæ tota conſtabit ex quatuor muris, ſeu fornicibus, unaque

 apertura

apertura a ſummo ad imum quadrifide ſe diffundente inter muros ; ſed tamen iiſdem poſitis horizonte, & Zenith, teſtudinem quoque quadrifeneſtratam quadrabilem ſic efficiemus : Ponamus meridianum P2 N2 L2S biſecare æquatoris quadrantem Q S A, quadrans igitur hemiſphæricus P Q S A P medietatem P2 N2 L2 S A E P habebit conſtantem ex carbaſo P E A2 L2 N P, & apertura A2 S2 L A. Quod ſi jam idem fiat in altera medietate quadrantis, quæ eſt P2 N2 L2 S Q D P, ducendo Q H2 L lineam æqualem, & ſimilem, ac ſimiliter poſitam ipſi A3 L2 L, conſtabit quadrans hemiſphæricus carbaſo quadrabili P D E H2 L3 L A E P, & apertura Q H2 L3 L A S Q, ſive fornice quadrabili, & feneſtra ; & idem faciendo in cæteris quadrantibus, componetur teſtudo quadrifeneſtrata, ſive P, ſive Q, ſive A, ſit Zenith ; quæ æquabitur facto ex radio ſphæræ, ducto in diagonalem quadrati circulo magno circumſcripti.

(9.) Hæc omnia licebit aliter efficere infinitis adhuc modis. Hactenus feceramus ut P B eſſet æqualis ipſi F S, aut in data ad eam ratione : ſed innumeris modis hæc variari poſſunt ſalva quadrabilitate, quot ferè modis dantur figuræ planæ quadrabiles ; imò ſecundùm datam quamvis quadraturam. Exempli causâ, ſi punctum L ſumatur ita, ut P B (ſinus verſus ipſius arcûs P N L, qui eſt portio meridiani P L S) ſit æqualis differentiæ inter tangentem, & Sinum rectum ipſius arcûs Q S, carbaſi portio P λ2 L2 N P æquabitur dimidio quadrato Q2 F, & tota carbaſus dimidio quadrato radii. Quin &, ſi ſit P B æqu. K F, æquabitur iterum carbaſus quadrato radii. Sed & portio ejus quævis inter meridianos facillimè quadratur.

Scholium : Nec inelegans, nec inutile futurum erat, teſtudinum formas delineationibus exprimere, ſed temporis brevitas effecit, ut Geometricis oculis ſcribere contenti nunc eſſemus.

N°. XXXVII.

N°. XXXVII.

NOUVELLES REMARQUES

DE M. G. G. LEIBNIZ,

Touchant l'Analyſe des Tranſcendantes, différentes de celle de la Géométrie de M. *Deſcartes*.

Tirées du Journal des Savans de l'année 1692.

IL n'eſt pas mal-aiſé à ceux qui ſont verſés dans l'Algébre ordinaire, de calculer par des expoſans en lettres, tout comme en nombres, lorsque ces lettres ou ces nombres ſignifient les grandeurs connuës. Mais lorſqu'elles ſignifient les grandeurs mêmes qu'on demande, ou qui ne ſont pas déterminées, perſonne n'a encore montré la façon d'y calculer. Dans le ſecond mois de la premiére année des Actes de Leipſic, je propoſai cet exemple aiſé, il y a déja dix ans. Soit l'équation $x^x + x = 30$, on demande la valeur du nombre x. Il eſt viſible que 3 y ſatisfait: Car $3^3 + 3$, c'eſt à-dire, $27 + 3$ fait 30. Mais comme il arrive ſouvent que la grandeur demandée n'eſt pas trouvable en nombres rationels, comment faire? Je répons qu'alors elle n'eſt pas même trouvable en grandeurs ou nombres irrationels, qui ſe puiſſent obtenir par la Géométrie ordinaire, ou par les méthodes de la Géométrie de Mr. *Deſcartes*. Car une telle équation n'eſt d'aucun degré connu; & le problême ne ſçauroit être plan, ni ſolide, ni quarré-quarré, ni ſurſolide, &c. Et par conſéquent pas une des lignes que M. *Deſcartes* veut que nous croyions ſeules géométriques, ne le peut conſtruire. Ainſi il faut recourir aux lignes d'une nouvelle eſpèce, que j'appelle tranſcendantes, parce qu'il n'y a point de degré qu'elles ne paſſent. J'ajouterai qu'encore les tetragoniſmes (excepté certain cas) dépendent de ces courbes & de ces équations tranſcendantes. Et Mr. *Deſcartes* a été obligé d'exclure toutes ces choſes de ſa Géométrie, pour maintenir ce qu'il avoit avancé, que tous les problêmes géométriques ſe peuvent réſoudre par ſa méthode; ce qui n'eſt point. Je mettrai ici un exemple de la ſolution d'un tel problême par les logarithmes. Comme il eſt aiſé, il ſervira à me faire mieux entendre.

Soit

Soit $c^x = a, b^{x-1}$, on demande x. Je réponds que ce nombre ſera égal à ce qui provient, lorſque le logarithme d'a, moins le log. de b, eſt diviſé par le log. de c, moins ledit log. de b. En voici le calcul. En vertu de l'équation donnée, & par la nature des logarithmes, il y a: x, log. $c =$ log. $a + \overline{x - 1}$, log. b. Donc x log. $c - x$ log. $b. =$ log. a — log. b. & par conſéquent x eſt log. a — log. b, diviſé par log. c — log. b. On a rencontré de tels exemples en raiſonnant ſur l'intérêt.

N°. XXXVIII.

N°. XXXVIII.

GENERALIA DE NATURA LINEARUM,

Anguloque contactûs, & oſculi, provolutionibus, aliiſque cognatis, & eorum uſibus nonnullis.

Ex Actis Erud. Lipſ. ann. 1692.

Cum nihil mihi ſit gratius quàm qualiacumque tentamina mea Viris egregiis digna videri quæ perficiantur; perplacuere quæ clariſſimus Baſileenſium Profeſſor *Bernoullius* de linearum oſculis nupero Martio in Actis Erud. publicavit. Cumque animadverterem cogitationes quidem noſtras in ſumma ipſi probari, nonnulla tamen aliter conſtituenda judicari, quod adeo non ægrè fero, ut quoties doceor, in lucro ponam; meum eſſe putavi, rem denuo examinare, paratiſſimo ad retractandum animo, ſi monitis contrariis doctiſſimi viri locum dari poſſe deprehendiſſem.

Statueram ego, *contactum* continere duas interſectiones coincidentes; *oſculum* continere plures contactus coincidentes, & oſculum quidem primi gradûs eſſe, quando coincidunt contactus duo, ſeu interſectiones quatuor; oſculum ſecundi gradûs, quando coincidunt interſectiones ſex, aut contactus tres &c. & circulum oſculantem, ſive maximum, aut minimum tangentium intra, vel extra in propoſito puncto circulorum (qui ſcilicet omnium tangentium proximè ad curvam accedit) eſſe curvedinis menſuram, & definire quantitatem anguli contactûs; ita ut angulus contactûs duarum linearum ſe tangentium ſit idem qui circulorum ibi eas oſculantium. Et in lineis, quas circulus in pluribus punctis ſecare poteſt, altiora etiam oſcula poſſe oriri, cùm omnes interſectiones in unum coaleſcunt, atque ita aliquando in caſu maximæ, vel minimæ curvedinis, ſeu tranſitûs à curvedine creſcente ad decreſcentem, vel contra, coincidere oſcula duo, ſeu contactus quatuor, interſectiones octo. Obſervavi etiam poſtea centrum circuli curvam propoſitam oſculantis ſemper cadere in lineam, quæ evolutione fili propoſitam generare poteſt, & unicam (ſuæ ſeriei) eſſe perpendicularem illam, quæ ex centro oſculantis circuli ad lineam duci poſſit; ſive unicam eſſe *unicam*; hoc eſt unicam eſſe maximam,

ximam, vel minimam ex eodem puncto ad curvam educibilem; cùm ex aliis punctis intra curvam plures, & duæ ſaltem perpendiculares, id eſt in ſua ſerie maximæ, vel minimæ, ſeu *duæ ſuæ ſeriei unicæ* ad curvam duci poſſint. Et cùm conſtet aliam atque aliam lineam evolutione deſcribi, prout filum producitur longiùs, animadverteram olim (ut hoc obiter dicam) eas quas Dn. *Bernoullius* nuper vocavit condeſcriptas eſſe *parallelas* inter ſe, ita ut una ſit ab alia ubique æquidiſtans, (ſeu æqualis ubique minimi intervalli, quod eſt recta minima ab una ad aliam ducenda) vel, ut recta perpendicularis ad unam, ſit alteri quoque perpendicularis, quæ dudum mihi fuit definitio *parallelifmi* in genere ſumti. Hanc noſtram curvedinis menſuram, uſumque Evolutarum, etiam primo Evolutionum Inventori celeberrimo *Hugenio* placuiſſe, ex ſolutione catenariæ lineæ animadverti. Porrò cùm tres interſectiones circuli, & curvæ coincidant, notavi *flexum* oriri contrarium, id eſt contactum ſumtum cum interſectione. Quemadmodum, & coincidentes interſectiones quinque dant contactum cum flexu contrario coaleſcentem, ſeu interſectionem cum oſculo primi gradus; & interſectiones ſeptem coincidentes dant flexum contrarium cum ſimplici oſculo, ſeu oſculum ſecundi gradûs cum interſectione coaleſcens. Unde intelligitur, quotcumque interſectiones coincidentes in contactus, oſcula, aut flexus contrarios reſolvi poſſe. Et quidem in contactu vero, atque oſculo recta, vel circulus lineam ab utraque parte tangit extrorſum, vel ab utraque parte introrſum; ſed in flexu contrario unam partem tangit extrorſum, alteram introrſum; & ita compoſitum non tangit, ſed ſecat.

Cauſam quoque cur linea evolutione generans locus ſit centrorum omnium circulorum lineam propoſitam oſculantium, ita explicare mihi videbar: Sumantur duo puncta curvæ A & B, & ducantur rectæ ad curvam perpendiculares in A & in B, earum interſectio communis C dabit centrum circuli, qui radio CA deſcriptus tanget curvam in A, radio verò CB deſcriptus, tanget eam in B, ſed ſi coincidant A & B ſive inaſſignabiliter diſtent, hoc eſt, ubi duæ perpendiculares concurrunt, coincidunt duo contactus, duoque circuli tangentes abeunt in unum, qui curvam oſculabitur; ſed per hunc ipſum concurſum perpendicularium inaſſignabiliter differentium inveniuntur, & lineæ evolutione generantes, ut ex *Hugeniano* de pendulis opere patet. Porrò circulus, cujus centrum eſt in recta arcui ad eaſdem partes cavo perpendiculariter occurrente, per punctum occurſus deſcriptus, arcum non ſecat, ſed tangit. Itaque ſicubi ſecat, neceſſe eſt ibi punctum adeſſe flexus contrarii, ſeu non eſſe lineam ad eaſdem partes cavam. Rectè autem animadvertit Dn. *Bernoullius* interſectione ſimplici ad contactum ſimplicem, vel ad oſculum, ſeu contactum multiplicem accedente, contactum mutari in ſectionem; ſed hinc manifeſtum eſt, cùm circulus curvam oſculatur, regulariter (id eſt excepto

flexûs

flexûs contrarii puncto) coincidere quatuor interſectiones, ſeu duos contactus; adeoque hanc ipſam eſſe naturam oſculi primi gradûs, quandoquidem id oſculum definimus ordinaria oſculatione circulorum, quæ in quocumque curvæ puncto regulariter locum habere poteſt, ſeu circulo curvedinem menſurante, qui ſcilicet proximè ad curvam accedit.

Et in univerſum dici poteſt interſectionum circuli cum alia linea numerum regulariter eſſe parem. Itaque non video, quomodo primi gradûs oſculum tribus interſectionibus explicari queat, ita ſcilicet ut tale oſculum trium radicum ſit regulare, & tota curva diffuſum, at oſculum quatuor radicum, ſeu quatuor coaleſcentium interſectionum pro ſecundo, & ſingulari habeatur, nec niſi in punctis curvæ determinatis contingat. Contra enim ſe res habet, & quatuor interſectiones, ſeu duo contactus oſculo cuique regulariter inſunt; & in ſolo caſu extremo, qui eſt flexus contrarii, naſcens, ut ita dicam, vel moriens oſculatio tribus interſectionibus contenta eſt. Unde nolui ex caſu trium interſectionum peculiarem oſculi gradum facere, cùm præſertim ex contactu (cujus perfectior ſpecies oſculum eſt) in interſectionem degeneraret. Eademque ratione, & in altioribus oſculatio ſua natura paris eſt numeri radicum, nec niſi inflexus contrarii puncto in numerum imparem abit. Et ſanè cùm circulus poſt contactum in puncto propoſito curvam adhuc in duobus præterea punctis ſecat, neceſſe eſt has interſectiones promoto circuli centro continuè ad dictum contactum appropinquantes, tandem ambas ſimul contactui coaleſcere, nam cùm quamlibet in eum pervenire neceſſe ſit, ideo ſi alterutra ſola ad contactum perveniente, circulus fiat proximus curvæ, ſeu oſcularis, ſequitur ambabus interſectionibus ſeparatim pervenientibus ad coalitionem cum contactu propoſito, duos dari circulos diverſos lineæ proximos, ſeu oſculantes per idem ejus punctum propoſitum tranſeuntes, quod eſt impoſſibile. Niſi ſcilicet linea ibi ſecet ſemet ipſam, quo caſu duarum vice fungitur, adeoque circuli illi duo reverâ lineas duas oſculantur, licèt unius partes, de quo hic non agitur. Facilè etiam hinc intelligitur, ſi circulus poſt contactum internum ſecare curvam rurſus (utrinque) poſſit, tunc in caſu oſculi (ubi duæ ſectiones contactui coaleſcunt) circulum oſculantem eſſe extra curvam; & contra ex contactu externo mox in caſu coaleſcendi cum duabus reliquis ſectionibus, fieri oſculum internum, & ita tranſitum circuli, a contactu ſectionem adjunctam habente ad oſculum, eſſe tranſitum in oppoſitam curvæ partem.

Sed, & hoc notandum eſt, *minimam curvedinem*, & *maximam obtuſitatem* eſſe in puncto flexus contrarii, & rectè dixit Dn. *Bernoullius*, circulum oſculantem eo caſu degenerare in rectam; radius enim eſt infinitus, ſeu centrum cadit in lineæ evolutæ concurſum cum ſua aſymptoto. Quoniam antequàm duæ proximæ, ad curvam perpendiculares, ſibi occurrentes hactenus ad plagam propoſitam, fiant ſibi occurrentes ad plagam

gam oppoſitam, ſeu ex convergentibus divergentes, debent fieri parallelæ, quo caſu earum concurſus infinitè abeſſe debet. Fieri tamen, & aliunde poteſt, ut lineæ generatæ curvedo ſit minima, ſeu maxima obtuſitas; non quidem abſolutè, ſed in toto aliquo arcu ad eaſdem partes cavo, ſeu in certa progreſſione. Cùm ſcilicet talis eſt natura curvæ per ſui evolutionem generantis, ut evolutio continuari ultra certum punctum, & filum generans ulteriùs extendi nequeat; uti contingit cùm curva evolvenda ex duabus convexitates ſibi obvertentibus, ac ſe ſe tangentibus compoſita eſt. Eodem modo prodibit maxima curvedo, ſeu minima obtuſitas, ut lineæ curvedo ex creſcente rurſus incipiat fieri decreſcens; veluti ſi curva generanda non intra duos arcus generantes convexitate obverſa ſe tangentes, ſed extra earum angulum cadat. Neutro tamen modo generata linea per continuam fili evolutionem producitur.

Hæc autem ut notarem, eo faciliùs adductus ſum, quòd linearum naturam in univerſum illuſtrant, mihique proferunt non tantùm ad finiendam illam celebrem de angulo contactûs controverſiam, ſed & a vaga logomachia ad uſus ſolidos, ac profuturos transferendam, & video nuper Dn. *Eiſenſchmid* diſſertationem ſuam contra Dn. *Lagnium* defendentem, ac de diametro umbræ in eclipſi Lunæ loquentem ex hypotheſi terræ ovalis, adhibuiſſe diametrum circuli, qui ovalem oſculatur, ſeu cum ea angulum oſculi (angulorum contactûs minimum) facit, atque ita quàm proximè ad illam accedit; eo conſilio, ut ex diverſis proportionibus diametri umbræ ad diametrum lunæ definiatur vera figura globi terræ. Quod quantum præſtare poſſit, obſervationibus committo.

Cùm hæc ſcripſiſſem, venere in manus meas *Acta menſis Maji*, in quibus nova quædam *Bernoulliana* legi, & lineæ illius, cum qua rectæ convergentes ad datum punctum, eumdem conſtantem angulum (ſed obliquum) faciunt, proprietatem elegantiſſimam ibi detectam, non ſine voluptate obſervavi, aliaque video notata, quæ generalem curvarum naturam illuſtrant. Plurimum igitur linearum doctrinam hodie promotam habemus tum explicata *flexûs* natura, tum adhibitis ad earum generationem *provolutionibus* pariter atque *evolutionibus*. Interiorem naturam *flexûs*, ſeu curvitatis aperuiſſe non nihil viſus ſum detecta *menſura anguli contactûs*, ope ſcilicet circuli curvam *oſculantis*, ſeu maximè ad eam accedentis, eumdemque cum ea in puncto oſculi flexum habentis, de quo tum antea, tum etiam hoc loco dictum eſt.

Quod ad *provolutionem* attinet, *Galilæus*, ut arbitror, primus de lineis per eam generatis cogitavit, & *ſimpliciſſimam* ex iis *cycloeidem*, quam clavus rotæ in plano incedentis deſcribet in aëre, conſiderare cœpit, de qua multa a viris doctis ſunt demonſtrata. *Romerus* Danus, aſtrorum imprimis ſcientiâ clarus, cùm in obſervatorio Regio Pariſino verſaretur, elegantes, ut audivi, proprietates detexit cycloeidis altioris, cùm rota ſcilicet,

cet, ſive circulus incedit ſuper circulo. De quo tamen nihil ad me pervenit. *Newtonus* nuper de cycloeidibus iiſdem egregia, & univerſalia dedit.

Evolutionem curvarum generatricem primus illuſtravit *Hugenius*. Eam cogitationem promovit *Tſchirnhuſius*, adhibitis, (ut ego appellare ſoleo) *coëvolutionibus*, animadverſoque quomodo tales lineæ coëvolutæ ut *foci* ſpectari poſſint, & radiorum quoque concurſu generentur, conſiderata in primis cauſtica, quæ formatur radiis parallelis a ſpeculo reflexis. Ego inde longiùs progreſſus ſum, uſumque reperi ad ſolvenda problemata (quorum in gratia potiſſimum ſuſcipitur ſpeculatio) *lineaſ*que *opticas* inveniendas, quarum ope radii redderentur ad datum punctum convergentes, vel divergentes, aut etiam inter ſe paralleli. Quod alia etiam ratione præſtitere *Newtonus* in Principiis, *Hugenius* in libro de Lumine. Obſervavi quoque eadem operâ dari figuras *Acamptas*, quæ etſi opacæ, & politæ ſint, radios tamen non reflectunt, & *Aclaſtas*, quæ licèt ſint tranſparentes, ſeu ex materia radios refringente, vi formæ tamen ſuæ, & poſitionis ad Solem, radios ſine refractione tranſmittunt. His nunc obſervationes ſingulares *Bernoullius* adjecit. Cæterum ab *Hugenio* in tr. de Lumine, & *Tſchirnhuſio* in Actis, notatum eſt, cauſticam illam a ſpeculo a concavo ſphærico radios ſolares reflectente formatam, ſimul eſſe cycloeidalem, provolutione circuli ſuper circulo generatam. Poſtremò à me nuper propoſita eſt *nova linearum formatio per concurſum curvarum ordinatim datarum*, cùm antea tantum radiorum, ſeu rectarum concurſus adhiberentur, cujus formationis ad problemata quædam ſolvenda egregium uſum comperi.

Eximia quædam ineſſe videntur illis, quæ de figura veli a vento tenſi Cl. *Bernoullius* nuper diſſeruit; tametſi de tota re (in qua non deſunt ſcrupuli) ob molem aliorum negotiorum non expenſa, pronuntiare non auſim. Ex reperta a me menſuratione *loxodromiarum* per logarithmos equidem non parum practici fructus duci poteſt; difficilem tamen arbitror curſus æſtimationem, quæ longitudinibus definiendis ſufficiat. Cùm de deviatione navis Geometrica acribiâ agitur, non velorum tantùm, ſed & navis ſpectanda eſſet figura. Denique quod innuit, ſe, fratremque in calculo meo plurimùm profeciſſe, id agnoſco, gratulorque non illis magis, quàm mihi. Valde autem noſſe velim, an ultra metas illas ſint provecti, ad quas ego perveni; id ſi ab ullis, certè ab ipſorum ingenio aliquando expecto, & gaudebo plurimum, ſi intellexero; præſertim cùm mihi vix amplius in talibus ea qua prius intentione animi verſari liceat. Cæterum a me quoque non difficulter ſolvitur illud problema: invenire lineam, cujus arcu æquabiliter creſcente elementa elementorum, quæ habent abſciſſæ, ſint proportionalia cubis incrementorum, vel elementorum, quæ habent ordinatæ; quod in catenaria, ſeu funiculari ſuccedere veriſſimum eſt. Sed quoniam id jam a *Bernoulliis* eſt notatum, adjiciam, ſi pro

cubis elementorum ordinatarum adhibeantur quadrata, quæſitam lineam fore logarithmicam. Si verò ipſa ſimplicia ordinatarum elementa ſint proportionalia elementis elementorum, ſeu differentiis ſecundis abſciſſarum, inveni lineam quæſitam eſſe circulum ipſum.

N°. XXXIX.

ADDITIO G. G. LEIBNITII

Ad ſolutionem Problematis in Act. An. 1692. propoſiti.

Ex Actis Erud. Lipſ. anni 1693.

SOlutioni Ænigmatis Florentini adjectum eſt ultimo articulo, poſſe adhuc aliis infinitis modis quæſitum obtineri; ſed in exemplorum aliquo irrepſit ſphalma ex calculi errore feſtinanti natum, quemadmodum admonuit Cl. *Jac. Bernoullius*, quo nomine Autor ei agit gratias. Nam ipſe per alia diſtractiſſimus, nunquam fortaſſe mentem eo rurſus ſponte advertiſſet. Sphalma autem qualecumque ſic emendabitur §. 9. lin. 8. poſt verba *portio* $P\lambda 2 L 2 NP$ ponatur: æquabitur ſpatio plano hyperbolico, quod facilè determinari poteſt ex notiſſimis. Nam hæc differentia in elementum arcûs, eſt ut differentia radii a ſecante ducta in elementum ſinûs verſi, quam ex hyperbolæ quadratura pendere conſtat. Sed ſi P B fiat ad Q F ut Q K ad S F, dicta portio æquabitur dimidio quadrato Q F, & *tota* &c. & ſequitur *linea* 9. *ſeqq. dicti articuli.* Addi & hoc non inutile erit, poſſe etiam ſimili methodo quæri KB pro KPB, ſic ut portiones potiùs versùs æquatorem, quàm versùs Polum quadrentur; poſſe etiam in unum addi areolas, non ut hactenus inter duos meridianos, ſed inter duos parallelos comprehenſas, & zonam elementarem ſphæricam fore vdx, & inde quadrabilem carbaſum orituram, prout arcus Q S in rectam extenſus, & in B ipſi P K normaliter applicatus, figuram quadrabilem præbet. Sed hæc, atque ſimilia ex poſitis comminiſci facile eſt, unde fieri poteſt, ut conſtructiones etiam elegantes naſcantur.

N°. XL.

N°. XL.

SUPPLEMENTUM GEOMETRIÆ

Practicæ ſe ſe ad Problemata tranſcendentia extendens, ope novæ Methodi generaliſſimæ per ſeries infinitas.

Ex Actis Erudit. Lipſ. ann. 1693.

CUm antea Series infinitæ fuerint quæſitæ cum primo inventore *Nicolao Mercatore* Holſato per diviſiones, & cum ſummo Geometra *Iſaaco Newtono* per extractiones; viſum mihi fuit, poſſe ad eas perveniri commodiùs, & univerſaliùs per ſuppoſitionem ipſius ſeriei quæſitæ, tamquam inventæ, ita ut terminorum coëfficientes ex ſucceſſu definirentur. Atque ita data lineæ proprietate non tantùm in calculo communi, ſed & in ſummatorio, vel differentiali, aut differentio - differentiali &c. utcumque implicato ſemper ad ſeriem veniri poteſt, cujus ope quæſitum, ſi totam ſeriem concipias exactè; ſi partem ſeriei adhibeas, quantumlibet appropinquando, exhibetur. Exemplo res patebit, facili quidem, & dudum propoſito, ſed ad intelligentiam apto; quærendo ſcilicet vel Logarithmum ex numero, vel numerum ex Logarithmo.

Sit Ratio, vel numerus, $a + x ,: a$, & Logarithmus ſit $y = \int, a\,a\,dx :, a + x$, ob quadraturam hyperbolæ; fiet ergo $dy = adx :, a + x$ ſeu $a\,dy : dx + xdy : dx - a = 0$. Si jam dato numero quæratur Logarithmus, fiat $y = bx + cx^2 + ex^3 + fx^4$ &c. & fiet $dy : dx = b + 2cx + 3ex^2 + 4fx^3$ &c. itaque:

$$0 \left\{ \begin{array}{llllll} + a\,dy : dx = ab & + 2acx & + 3aex^2 & + 4afx^3 & \&c. \\ x\,dy : dx = & + bx & + 2cx^2 & + 3ex^3 & \&c. \\ - a = - a & & & & \end{array} \right\} = 0$$

in qua æquatione explicata, nec aliam indeterminatam quàm x continente, ut omnes termini deſtruantur, ſeu ut *æquatio* fiat *identica*, fiet ab $- a = 0$ ſeu $b = 1$ & $2ac + b = 0$ ſeu $c = -1 : 2a$ & $3ae + 2c = 0$ ſeu $e = 1 : 3a^2$, & $4af + 3e = 0$ ſeu $f = -1 : 4a^3$, & ita porrò.

Ergo fiet $y = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2a} + \frac{x^3}{3a^2} - \frac{x^4}{4a^3}$ &c.

Contrà

Contrà ſi dato Logarithmo y quæratur numerus $a + x, : a$, adeoque ſi quæratur x, ſcribatur $x = ly + my^2 + ny^3 + py^4$. &c. fiet $dx : dy = l + 2my + 3ny^2 + 4py^3$ &c. eſt autem utique per priora $a + x - adx : dy = 0$ Unde

$$0 = \left\{ \begin{array}{l} a + x = a + ly + my^2 + ny^3 + py^4 \text{ \&c.} \\ - adx : dy = - la - 2amy - 3any^2 - 4apy^3 - 5aqy^4 \text{ \&c.} \end{array} \right\} = 0$$

Quæ æquatio ultima, ut deſtructis terminis fiat identica erit $l = 1$ $m (= l : 2a) = 1 : 2a$ $n (= m : 3a =) 1 : 2.3a^2$; $p = (n : 4a =) 1 : 2.3.4a^3$; & ita porrò.

$$\text{Et fiet } x = \frac{y}{1} + \frac{y^2}{1.2.a} + \frac{y^3}{1.2.3a^2} + \frac{y^4}{1.2.3.4a^3} \text{ \&c.}$$

Addamus aliud exemplum, prima fronte difficilius, cùm ſcilicet inveniendus eſt ſinus rectus ex dato arcu, & radio, ſeu quod eodem redit (ob peripheriam practicè ſatis datam) ex dato ſinu toto, & angulo. Sit arcus circuli y, & ſinus rectus x, radius verò ſit a; conſtat ex noſtra Methodo differentiali, generalem relationem inter arcum, & ſinum poſſe exprimi hac æquatione: $a^2 d\overline{y}^2 = a^2 d\overline{x}^2 + x^2 d\overline{y}^2$. Jam fiat $x = by + cy^3 + ey^5 + fy^7$. &c. erit $dx : dy = b + 3cy^2 + 5ey^4 + 7fy^6$ &c. Et hos valores ipſius x, & ipſius $dx : dy$ ſubſtituendo in æquatione differentiali, explicatamque æquationem reddendo identicam, ſeu terminos deſtruendo, invenientur valores coefficientium aſſumtitiarum b, c, e, f. &c. Sed idem multo breviùs conſequemur, deſcendendo ad differentio-differentiales. Nam æquationem differentialem $a^2 d\overline{y}^2 = a^2 d\overline{x}^2 + x^2 d\overline{y}^2$ rurſus differentiando, poſita dy conſtante, fiet $2a^2 dx\,ddx + 2xdx\,d\overline{y}^2 = 0$; ſeu $a^2 ddx + xd\overline{y}^2 = 0$ jam $ddx : d\overline{y}^2 = 2.3.cy + 4.5\,ey^3 + 6.7\,fy^5$ &c. ut patet valorem ipſius $dx : dy$ paulo antè habitum, differentiando. Unde jam æquatio differentio-differentialis ſic explicabitur:

$$0 = \left\{ \begin{array}{l} x = by + cy^3 + ey^5 + fy^7 \text{ \&c.} \\ a^2 ddx : dy^2 = 2.3\,a^2 cy + 4.5\,a^2 ey^3 + 6.7\,a^2 fy^5 + 8.9\,a^2 gy^7. \end{array} \right\} = 0$$

Et deſtruendo terminos æquationis explicatæ, aſſumatur $b = 1$ jam $b + 2.3\,a^2 c = 0$ ergo $c = - 1 : 2.3\,a^2$, & $c + 4.5\,a^2 e = 0$ ſeu $e = (- c : 4.5\,a^2 =) 1 : 2.3.4.5\,a^4$ & ſimiliter $f = - 1 : 2.3.4.5.6.7\,a^6$.

$$\text{Sicque porrò, hinc } x = \frac{y}{1} - \frac{y^3}{1.2.3\,a^2} + \frac{y^5}{1.2.3.4.5a^4} - \frac{y^7}{1.2.3.4.5.6.7\,a^6} \text{ \&c.}$$

poſito a eſſe ſinum totum, ſeu radium, x ſinum rectum, & y arcum, qui in praxi debet eſſe notabiliter minor radio.

Eſto adhuc aliud exemplum, in quo ex data Tangentium proprietate quæritur linea. Nimirum ſit ordinata y, abſciſſa z, ſubtangentialis (ut Hugeniano verbo utar) ſeu portio axis intercepta inter tangentem, & ordinatam

dinatam ſit t; quæritur curva in qua ſit $t = yy - zy, : a$. Eſt autem generaliter ex legibus calculi differentialis $t : y = dz : dy$. Ergo fit hoc loco $dz : dy = y - z, : a$ ſeu $adz + zdy = ydy$, ſeu $adz : dy + z - y = o$. Sit $z = by + cy^2 + ey^3 + fy^3$ &c. fiet $dz : dy = b + 2cy + 3ey^2 + 4fy^3$ &c. Itaque

$$o = \left\{\begin{array}{lcl} adz : dy & = & ab + 2acy + 3aey^2 + 4afy^3 \text{ \&c.} \\ +z & = & + by + cy^2 + ey^3 \text{ \&c.} \\ -y & = & -1.y \end{array}\right\} = o$$

Et deſtruendo, fiet $ab = o$ adeoque $b = o$ & $2ac + b - 1 = o$ ſeu $c = 1 : 2a$; & $e = (-c : 3a =) - 1 : 2.3a^2$ & $f = (-e : 4a =) 1 : 2.3.4a^3$. Et ita porrò. Unde

$$Z = \frac{y^2}{1.2a} - \frac{y^3}{1.2.3a^2} + \frac{y^4}{1.2.3.4a^3} - \frac{y^5}{1.2.3.4.5a^4} \text{ \&c.}$$

Cæterum colligitur ex ſuprà inventis, ſi $a : , a - x$ ſit numerus, & y ſit logarithmus,

fore $X = \frac{y}{1} - \frac{y^2}{1.2a} + \frac{y^3}{1.2.3a^2} - \frac{y^4}{1.2.3.4a^3}$ &c. Ergo $z = y - x$.

itaque quæſitæ lineæ, cujus ſubtangentialis ſit $yy - zy, : a$, hæc eſt natura, ut poſito y logarithmo, fiat z differentia inter logarithmum y & ejus ſubnumeralem. Voco autem ſubnumeralem x, poſito $a : , a - x$ eſſe numerum. Unde patet aliquando per ſeries infinitas commodè obtineri valorem finitum, etiam tranſcendentem, ſed hoc obiter nobis hic ſuffecerit, problemata etiam impeditiſſima quantalibet exactitudine per hanc methodum in praxi ſolvi poſſe. Eadem methodo etiam *æquationum* utcumque aſſurgentium *radices* obtineri poſſe, manifeſtius eſt, quàm ut explicari hoc loco ſit opus.

N°. XLI.

G. G. LEIBNITII AD PROBLEMA

In Actis Eruditorum ann. 1693. menſe Majo propoſitum.

Ex Actis Erud. Lipſ. hujuſce anni.

PErplacet problema Bernoullianum nupero menſe Majo propoſitum de invenienda linea A B C ex data ratione inter tangentem B D, & reſectam A D ex axe A E, per tangentem; vel ideo, quòd etiam illi, qui noſtræ methodi differentialis faciliora tenent, non ſtatim huc pervenient. Nec motu tantùm, ſed & calculo analytico exhiberi poteſt, ſi detur ratio inter factum, ex his duabus rectis (tangente t reſecta r) vel earum potentiis, & inter chordæ A B ipſis ſubtenſæ potentiam facto homogeneam, veluti inter tr & cc, vel trr & c^3 aliterve. Itemque locum habet in aliis innumeris, ut ſi detur ratio dictæ reſectæ A D, ad ordinatam B E.

N°. XLII.

N°. XLII.

REGLE GENERALE

De la compoſition des mouvemens.

Tirée du Journal des Savans année 1693.

SI les droites AB, AC, AD, AE, (&c.) repréſentent les diverſes tendances, ou les mouvemens particuliers d'un mobile A, qui doivent compoſer un mouvement total; & ſi G eſt le centre de gravité de tous les points de tendance B, C, D, E, (&c.) enfin ſi AG eſt prolongée au delà de G, juſqu'à M, en ſorte qu'AM ſoit AG, comme le nombre des mouvemens particuliers ou compoſans, eſt à l'unité: le mouvement compoſé ſera AM.

C'eſt-à-dire, pour parler plus familiérement: Si le mobile A étoit parvenu dans une ſeconde de temps d'A juſqu'à B, en cas qu'il eût été pouſſé par le ſeul mouvement AB, (que je ſuppoſe toujours uniforme ici;) & encore de même, s'il étoit parvenu dans une ſeconde juſqu'à C ou D, ou E, &c. en cas qu'il eût été pouſſé par un de ces mouvemens tout ſeul: maintenant que ce mobile eſt pouſſé en même temps par tous ces mouvemens enſemble, ne pouvant pas aller en même temps de pluſieurs côtés, il ira vers G, le centre de gravité de tous les points de tendance B, C, D, E, &c. mais d'autant plus loin qu'il y a plus de tendances: de ſorte qu'il parviendra dans une ſeconde juſqu'à M, ſi AM eſt AG, comme le nombre des tendances eſt à l'unité. Ainſi *il arrivera au mobile la même choſe qui arriveroit à ſon centre de gravité, ſi ce mobile ſe partageoit également entre ces mouvemens, pour ſatisfaire parfaitement à tous enſemble.* Car le mobile étant partagé également entre quatre tendances, il ne peut écheoir à chacune qu'une quatriéme partie du mobile, qui devra aller quatre fois plus loin, pour avoir autant de progrès, que ſi le mobile tout entier avoit ſatisfait à chaque tendance; mais ainſi le centre de gravité de toutes ces parties iroit auſſi quatre fois plus loin. Maintenant le partage n'ayant point de lieu, le tout ira comme le centre des partages, pour ſatisfaire à chaque tendance en particulier, autant qu'il eſt poſſible ſans le partage. Et il en provient autant que ſi on avoit fait les partages, & réuni les parties au centre, après avoir ſatisfait aux mouvemens particuliers.

Cette explication peut tenir lieu de démonſtration. Mais ceux qui en demandent une à la façon ordinaire, la trouveront aiſément en pourſuivant ce qui ſuit: Si on mène par A deux droites qui ſoient dans un même plan avec tous les mouvemens, & qui faſſe un angle droit en A, on pourra réſoudre chacun de tous ces mouvemens particuliers en deux, pris ſur les côtés de cet angle droit. Ainſi la compoſition de tous les mouvemens ſur un des côtés, ſera le mouvement moyen arithmétique, multiplié par le nombre des mouvemens, c'eſt-à-dire, pour avoir la diſtance entre A, & le point de tendance de ce mouvement compoſé, pris ſur ce côté, il faudra multiplier la diſtance du centre de gravité de tous les points de tendance ſur le même côté, par le nombre des tendances. Car l'on ſçait, que la diſtance entre A, & le centre de gravité des points pris ſur une même droite avec A, eſt la moyenne arithmétique des diſtances entre A & ces points, de quelque nombre qu'ils puiſſent être. J'appelle *grandeur moyenne arithmétique* entre pluſieurs grandeurs, celle qui ſe fait par leur ſomme diviſée par leur nombre: obſervant que ce qui eſt en ſens contraire eſt une quantité négative, dont l'addition eſt une ſouſtraction en effet. Or puiſqu'il faut multiplier par le nombre des tendances la diſtance du centre de gravité des points de tendance, pris tant ſur l'un que ſur l'autre côté de l'angle droit, pour déterminer le mouvement compoſé ſur chacun des côtés, il s'enſuit que le mouvement total compoſé des mouvemens de ces deux côtés, ſe déterminera de même. Ainſi la compoſition de pluſieurs mouvemens faiſant angle enſemble dans un même plan, ſe réduit à la compoſition de pluſieurs mouvemens dans une même droite, & de deux mouvemens faiſant angle droit. Que ſi les mouvemens donnés ne ſont pas dans le même plan, il faut ſe ſervir de trois droites faiſant angle entr'elles.

Il eſt bon de remarquer, que dans cette compoſition des mouvemens, il ſe conſerve toujours la même quantité de la progreſſion, & non pas toujours la même quantité du mouvement. Par exemple, ſi deux tendances ſont dans une même droite, mais en ſens contraire, le mobile va du côté du plus fort, avec la différence des viteſſes, & non pas avec leur ſomme, comme il arriveroit ſi les tendances le portoient d'un même côté. Et ſi les deux tendances contraires étoient égales, il n'y auroit point de mouvement. Cependant tout cela ſuffit, pour ainſi dire, *in abſtracto*, lorſqu'on ſuppoſe déja ces tendances dans le mobile: mais *in concreto*, en conſidérant les cauſes qui les y doivent produire, on trouvera qu'il ne ſe conſerve pas ſeulement en tout la même quantité du progrès, mais auſſi la même quantité de la force abſolue & entiére, qui eſt encore différente de la quantité du mouvement. On donnera une autre fois *deux Conſectaires* fort généraux & fort importans, qui ſe tirent de cette règle.

N°. XLIII.

N°. XLIII.

DEUX PROBLEMES

CONSTRUITS PAR M. G. G. LEIBNIZ,

en employant ſa Règle génerale de la compoſition des mouvemens.

Tirés du Journal des Savans de l'année 1693.

PROBLEME *A. Mener la tangente d'une ligne courbe qui ſe décrit par des filets tendus.* Du point A de la courbe ſoit décrit un cercle quelconque, coupant les filets aux points B, C, D, &c. ſoit trouvé le centre de gravité de ces points, ſçavoir G; & la droite A G ſera perpendiculaire à la courbe: ou bien une droite menée par A, normale à AG, ſera la tangente qu'on cherche. Lorſque le filet eſt double ou triple, il y faut conſidérer deux ou trois points dans un ſeul endroit, à peu près comme ſi un de ces points tenant lieu de pluſieurs, étoit d'autant plus peſant. On peut appliquer cette conſtruction non ſeulement aux coniques ordinaires, aux ovales de M. *Deſcartes*, aux coévolutions de M. *de Tſchirnhaus*; mais encore à une infinité d'autres lignes. En voici la raiſon, qui a ſervi de principe d'invention. C'eſt qu'on doit conſidérer que le ſtile qui tend les filets, pourra être conçu comme ayant autant de directions égales en viteſſe entr'elles, qu'il y a de filets: car il les tire également, & comme il les tire il en eſt tiré. Ainſi ſa direction compoſee, (qui doit être dans la perpendiculaire à la courbe) paſſe par le centre de gravité d'autant de points qu'il y a de filets, (par la nouvelle règle des compoſitions du mouvement, que l'on trouve dans le N°. précédent.) Et ces points, à cauſe de l'égalité des tendances dans notre cas, ſont également diſtans du ſtile, & tombent ainſi dans les interſections du cercle avec les filets. M. *de Tſchirnhaus* dans ſon livre intitulé *Medicina mentis*, ayant cherché le premier ce problême, m'a donné occaſion d'y arriver; ce que je fais en prenant une voye, qui a cet avantage, que l'eſprit y fait tout ſans calcul, & ſans diagrammes.

M. *Fatio* y eſt auſſi arrivé de ſon chef par une très belle voye, & l'a publié le premier. Enfin M. le Marquis *de l'Hôpital* a donné ſur ce ſujet

 l'énon-

l'énonciation la plus générale qu'on puiſſe ſouhaiter, fondée ſur la nouvelle méthode *du calcul des différences.*

PROBLEME 2. *Un même mobile étant pouſſé en même tems par un nombre infini de ſollicitations, trouver ſon mouvement.* J'appelle ſollicitations les efforts infiniment petits, ou *conatus*, par leſquels le mobile eſt ſollicité, ou invité, pour ainſi dire, au mouvement; comme eſt, par exemple, l'action de la peſanteur, ou de la tendance centrifuge, dont il en faut une infinité pour compoſer un mouvement ordinaire. Cherchez le centre de gravité du *lieu* de tous les points de tendance de ces ſollicitations, & la direction compoſée paſſera par ce centre: mais les viteſſes produites ſeront proportionnelles aux grandeurs des lieux. Les lieux peuvent être des lignes, des ſurfaces, ou même des ſolides.

Le problême qu'on vient de réſoudre eſt d'importance en Phyſique, car la nature ne produit jamais aucune action que par une multitude véritablement infinie des cauſes concourantes.

N°. XLIV.

N°. XLIV.

SUPPLEMENTUM GEOMETRIÆ

Dimenſoriæ, ſeu generaliſſima omnium Tetragoniſmorum effectio per motum &c. Similiterque multiplex conſtructio lineæ ex data tangentium conditione.

Ex Actis Erud. Lipſ. ann. 1693.

DImenſiones linearum, ſuperficierum, & ſolidorum plerorumque, ut & inventiones centrorum gravitatis, reducuntur ad tetragoniſmos figurarum planarum; & hinc naſcitur *Geometria dimenſoria*, toto, ut ſic dicam, genere diverſa a *determinatrice*, quam rectarum tantùm magnitudines ingrediuntur, atque hinc quæſita puncta ex punctis datis determinantur. Et Geometria quidem determinatrix reduci poteſt regulariter ad æquationes Algebraicas, in quibus ſcilicet incognita ad certum aſſurgit gradum. Sed dimenſoria ſua natura ab Algebra non pendet; & ſi aliquando eveniat (in caſu ſcilicet quadraturarum ordinariarum) ut ad Algebraicas quantitates revocetur; uti Geometria determinatrix ab Arithmetica non pendet; etſi aliquando eveniat (in caſu ſcilicet commenſurabilitatis) ut ad numeros, ſeu rationales quantitates revocetur. Unde *triplices* habemus *quantitates*: *rationales*, *Algebraicas*, & *tranſcendentes*. Eſt autem *fons irrationalium* Algebraicarum, *ambiguitas* problematis, ſeu *multiplicitas*; neque enim poſſibile foret, plures valores eidem problemati ſatisfacientes, eodem calculo exprimere, niſi per quantitates radicales; eæ verò non niſi in caſibus ſpecialibus ad rationalitates revocari poſſunt. Sed *fons tranſcendentium* quantitatum eſt *infinitudo*. Ita ut *Geometriæ* tranſcendentium (cujus pars dimenſoria eſt) reſpondens *Analyſis* ſit ipſiſſima *ſcientia infiniti*. Porrò quemadmodum ad conſtruendas quantitates Algebraicas, certi adhibentur motus, in quibus aut non interſunt curvæ materiales, ſed tantùm regulæ rectilineæ, aut, ſi curvæ rigidæ interveniunt, non tamen niſi ratione occurſuum, ſeu interſectionum uſurpari debent: ita ad conſtruendas quantitates tranſcendentes hactenus adhibita eſt applicatio, ſeu admenſuratio curvarum ad rectas, uti fit in deſcriptione cycloeidis, aut evolutione

tione fili, vel folii lineæ, vel ſuperficiei circumligati. Quin &, ſi quis ſpiralem *Archimedis*, aut Quadratricem *veterum* Geometricè (hoc eſt motu continuo exacto) deſcribere velit, hoc facilè præſtabit quadam rectæ ad curvam admenſuratione, ut motus rectus circulari attemperetur. Minimè igitur hæc excludo ex Geometria, etſi id fecerit *Carteſius*: cùm lineæ ſic deſcriptæ, & exactæ ſint, & utiliſſimas habeant proprietates, & tranſcendentibus quantitatibus ſint accommodatæ. Sunt tamen & aliæ conſtruendi rationes, quæ aliquid Phyſici videntur habere admiſtum: ut ſi quis problemata Geometriæ determinatricis conſtrueret per radios lucis, (quod ſæpe cum fructu fieri poſſet) aut quemadmodum nos aream Hyperbolæ quadravimus, vel logarithmos contruximus, motu compoſito ex æquabili, & per frictionem uniformem retardato; vel ope chordæ, ſive catenæ pondere præditæ, lineam catenariam, vel funicularem (*la chainette*) conſtituentis. Et quidem ſi exacta ſit conſtruendi ratio, recipitur in Geometriæ theoriam; ſi facilis ſit, utiliſque, poteſt recipi in praxin. Nam & motus ſecundùm certas hypotheſes factus Geometricæ eſt tractationis, exemplo centri gravitatis. Eſt autem novum quoddam motûs genus, quem nos opinor primi ad conſtructiones Geometricas adhibuimus, occaſione mox dicenda; cùm præ cæteris videatur referri poſſe ad puram Geometriam; affiniſque ſit deſcriptioni linearum per fila ex umbilicis, ſive focis; quandoquidem in eo nihil aliud requiritur, quàm ut punctum, lineam in plano deſcribens, ad unam extremitatem fili, in eodem plano (vel æquivalente) poſiti, alligatum, moveatur altera extremitate fili mota, ſed non niſi per tractionem, non verò per impulſum in tranſverſum, qui nec a filo ob flexibilitatem debet expectari: trahatur autem in ipſius fili tenſi, ſeu trahentis directione, quod per ſe evenit, ſi nullum in itinere occurrat impedimentum. Quoniam tamen filum materiale, cùm nunquam habeat ſummam flexibilitatem, quam Geometria ſupponit, facilè ſtylum, ſeu punctum deſcribens, (quippe in plano liberè poſitum,) nonnihil in tranſverſum agere poſſet, ita ut motus ſtyli non eſſet nuda tractatio; ideo impedimento materiali commodè occurritur remedio materiali, ut ſcilicet cauſa ſit, quæ punctum deſcribens nonnihil faciat vel apprimi, vel adhærere loco plani, cui ineſt, qualis cauſa eſſe poteſt pondus puncto deſcribenti incumbens, ſeu conjunctum, quo ipſum hoc punctum apprimetur plano horizontali, in quo moveri, lineamque deſcribere debet. Ita ſi reſiſtentia incumbentis, qua fit, ut non facillimè loco moveatur, prævaleat omnino exiguæ illi reſiduæ in filo rigiditati, potiùs cedet filum, atque intendetur; atque ita aget tractione, non impulſu, quod unum hoc loco requiritur reſpectu puncti deſcribentis. Hinc autem fit, ut talis motus mirè ſit accommodatus ad Geometriam tranſcendentem, quia immediatè refertur ad lineæ tangentes, vel directiones, adeoque ad quantitates elementares, numero quidem infinitas, magnitudine autem inaſſignabiles, ſeu infinitè parvas.

Hujus

Hujus autem Conſtructionis excogitandæ, talis mihi olim occaſio Lutetiæ præbita eſt. *Claudius Perraltus* Medicus Pariſinus inſignis, tum & Mechanicis, atque Architectonicis ſtudiis egregius, & *Vitruvii* editione notus, idemque in Regia ſcientiarum Societate Gallica, dum viveret, non poſtremus, mihi, & aliis ante me multis propoſuit hoc problema, cujus nondum ſibi occurriſſe ſolutionem ingenuè fatebatur: invenire lineam BB (*fig.* 52.) quam pondus, fili, vel catenulæ AB extremitati B annexum, puncto B vel æquivalente, deſcribat in plano horizontali; dum alteram fili AB extremitatem A, ducendo per rectam immotam AA, eo ipſo pondus B trahimus per directum planum horizontale, in quod vel æquivalens, etiam recta AA, & durante motu filum, AB, cadunt. Utebatur autem (intelligentiæ causâ) horologio portatili ſuæ thecæ argenteæ incluſo B, quod catenulæ AB ad thecam alligatæ principio A, ſecundùm regulam AA ducto, per tabulam trahebat. Ita imum thecæ punctum (quod in fundi medio eſt) in tabula deſcribebat lineam BB. Hanc lineam ego attentiùs conſiderans (cùm tunc maximè in tangentium contemplatione verſarer) ſtatim animadverti, quòd res eſt, filum perpetuò lineam tangere, ſeu rectam ut 3 A 3 B eſſe tangentem lineæ BB in puncto 3 B. Quod & ſic demonſtratur: Centro 3 B & filo 3 A 3 B tamquam radio, deſcribatur arcus circuli utcumque parvus 3 A. F, inde filum 3 B. F, apprehenſum in F, directè, ſeu per ſua propria veſtigia trahatur uſque ad 4 A; ita ut ex 3 B. F. transferatur in 4 B 4 A; itaque ſi ponatur ſimiliter fuiſſe proceſſum ad puncta 1 B, 2 B, ut ad punctum 3 B, utique punctum B deſcripſiſſet polygonum 1 B 2 B 3 B &c. cujus latera ſemper incident in filum, unde imminuto indefinitè arcu, qualis erat 3 A. F, ac tandem evaneſcente, quod fit in motu tractionis continuæ, qualis eſt noſtræ deſcriptionis, ubi continua, ſed ſemper *inaſſignabilis* fit circumactio fili, manifeſtum eſt, polygonum abire in curvam, cujus tangens eſt filum. Itaque videbam rem redire ad hoc problema converſæ tangentium: invenire lineam BB ejus naturæ, ut AB portio tangentis inter axem AA, & curvam BB intercepta ſit conſtanti datæ æqualis. Nec difficile mihi fuit deprehendere, hujus lineæ deſcriptionem ad quadraturam Hyperbolæ revocari poſſe. Nimirum Centro C, vel A (ubi filum 1 A 1 B ſimul eſt ordinata, & tangens curvæ) radio verò AB, deſcribatur circulus 1 B. FG, axi AE occurrens in G, & huic axi parallela ſit 1 B. K; cui ex C educta CF occurrat in K, erit 1 B. K tangens arcus circularis 1 B. F. Jam per F ducatur FLB, parallela axi AE, occurrens ipſi 1 A 1 B in L, & curvæ BB in B, in qua producta ſumatur LH æqualis ipſi 1 B. K, idemque ubique faciendo, prodibit linea tangentium 1 B. HH, & rectangulum 1 B 1 A. E reperietur æquari figuræ tangentium, ſeu areæ trilineæ 1 B. LH. 1 B; verbi gratiâ 1 B 1 A in 1 A 3 E producet æquale trilineo 1 B. 3 L. 3 H. 1 B. Cùm igitur figuræ tangen- Ta. XIV. Fig. 52.

tium area exhiberi poſſit per quadraturam Hyperbolæ, vel Logarithmos; ut notum eſt, patet ejus ope etiam haberi 1 A 3 E, ſeu 3 L 3 B, adeoque punctum curvæ ut 3 B. Viciſſim hinc datâ deſcriptione lineæ B B quadratura hyperbolæ, vel Logarithmi conſtruentur. Quibus ulteriùs explicandis non immoror, cùm præſertim arbitrer idem optimè præſtitiſſe *Chriſtianum Hugenium*, Virum celeberrimum, qui mihi non ita pridem per literas ſignificaverat incidiſſe ſibi ſingulorum Hyperbolæ quadrandæ rationem; quam etiam in Hiſtoria operum eruditorum publicatam nuperrimè, & hanc ipſam eſſe colligo ex iis, quæ nuper a præſtantiſſimis fratribus *Bernoulliis* data exhibentur in *Actis Eruditorum*, ubi *Hugenianorum* iſtorum occaſione, motum ſimilem apparet pulchrè transferri ad deſcribendam lineam, ubi portio tangentis intercepta inter curvam & axem, eſt ad portionem axis inter punctum fixum, & occurſum tangentis, ſeu A B, ad C A (*in fig.* 52.) ut recta conſtans ad aliam rectam conſtantem. Quæ me quoque veterum in hoc genere meorum tandem edendorum admonuere.

Pronum ſcilicet ſtatim fuerat intelligere, percepta ſemel relatione motûs ad tangentes, innumeras alias lineas, non ita facilè ad Quadraturam revocabiles hac eadem arte conſtrui poſſe. Nam, & ſi A A non recta eſſet, ſed curva, non ideo minùs filum ipſam B B tangeret. Quin ampliùs, & ſi filum A B inter trahendum creſceret, aut decreſceret, non ideo minùs tangens maneret. Itaque ſi data utcumque eſſet relatio inter C A & A B (verbi gratiâ ut A B exiſtentibus ſinubus, eſſent C A tangentes ejuſdem anguli) variis machinationibus moderari motum fili liceret, ut datâ lege inter contrahendum promoveretur. Infinitæ etiam lineæ eidem problemati ſatisfacientes, hac conſtruendi ratione duci poſſunt, quælibet per punctum, ſi lubet, datum. Quod ſi punctum deſcribens a pluribus filis ſimul trahatur, compoſita directio poterit adhiberi. Sed etſi unum tantùm ſit filum, poterit ejus longitudo variari, ipſi ponderi B annexa exiſtente rota, vel figura, per modum deſcribendæ cycloeidis in plano voluta. Recta etiam rigida ad filum ſemper normalis, vel datum, aut certâ lege variabilem angulum habens, cum B ferri poteſt, in quo etiam intelligi poteſt moveri punctum deſcribens aliud. Poſſunt etiam duo pondera plano innitentia ſimul trahi, ſive eamdem ſemper diſtantiam ſervantia, ſive etiam durante motu eam variantia. Poſſunt etiam duo plana intelligi, unum, in quo movebitur punctum C B, eique firmiter innitetur, alterum in quo ſtylus ex B egrediens leviſſimo attactu (nihil adeo motum ipſius B turbaturo) deſcribat lineam novam, & hoc planum ſuum habeat motum proprium, eritque lineæ novæ tangens ipſa recta deſignans directionem motûs compoſiti ex motu ſtyli in plano immoto, & motu plani alterius. Unde rurſus tangentium lineæ novæ ſic deſcriptæ determinabuntur proprietates. Itaque cùm hoc motuum genus latiſſimè diffundatur, & innumeras applicationes recipiat, multa olim chartæ folia meditando in eam

rem

rem implevi, ac de cautionibus etiam practicis cogitavi, præſertim quia uſum tam inſignem ad tangentium converſam, & in primis ad Tetragoniſmos videbam. Cùm ergo *conſtructionem* repererim, generaliter ſe ſe extendentem ad omnes quadraturas, qua neſcio an alia amplior inde a nata Geometria excogitata ſit, eam publicare tandem conſtitui. Tametſi enim iſta hactenus in juſti operis, integræque velut ſcientiæ materiam ſervaverim, tam multa tamen alia, alteriuſve generis ſubnaſcuntur, ut veteribus quacumque occaſione defungi tandem præſtet, ne intercidant, & ſatis diu iſta, ultra Horatiani limitis duplum preſſa, *Lucinam* expectarunt.

Oſtendam autem *problema generale Quadraturarum reduci ad inventionem lineæ datam habentis legem declivitatum*, ſive in qua latera trianguli characteriſtici aſſignabilis datam inter ſe habeant relationem, deinde oſtendam hanc lineam per motum a nobis excogitatum deſcribi poſſe. Nimirum in omni curva C (C) intelligo *triangulum characteriſticum* duplex: aſſignabile TBC, & inaſſignabile GLC, ſimilia inter ſe. Et quidem *inaſſignabile* comprehenditur ipſis GLLC, elementis coordinatarum CB, CF tamquam cruribus, & GC, elemento arcûs, tamquam baſi, ſeu hypotenuſa. Sed aſſignabile TBC comprehenditur inter axem, ordinatam, & tangentem, exprimitque adeo angulum, quem directio curvæ (ſeu ejus tangens) ad axem, vel baſin facit, hoc eſt curvæ declivitatem in propoſito puncto C. Sit jam zona quadranda F (H) comprehenſa inter curvam H (H), duas rectas parallelas FH & (F) (H) & axem F (F) in hoc axe ſumto puncto fixo A, per A ducatur ad AF normalis AB tamquam axis conjugatus, & in quavis HF (producta prout opus) ſumatur punctum C: ſeu fiat linea nova C (C) cujus hæc ſit natura, ut ex puncto C ducta ad axem conjugatum AB (ſi opus productum) tam ordinata conjugata CB, (æquali AF) quàm tangente CT, ſit portio hujus axis inter eas comprehenſa TB, ad BC, ut HF ad conſtantem a, ſeu a in BT æquetur rectangulo AFH (circumſcripto circa trilineum AFHA). His poſitis, ajo rectangulum ſub a & ſub E (C) (diſcrimine inter FC, & (F) (C) ordinatas curvæ) æquari zonæ F (H); adeoque ſi linea H (H) producta incidat in A, trilineum AFHA figuræ quadrandæ, æquari rectangulo ſub a conſtante, & FC ordinata figuræ quadratricis. Rem noſter calculus ſtatim oſtendit, ſit enim AF y; & FH, z; & BT, t; & FC, x; erit $t = zy : a$, ex hypotheſi: rurſus $t = y\,dx : dy$ ex natura tangentium noſtro calculo expreſſa. Ergo $a\,dx = z\,dy$, adeoque $ax = \int z\,dy = AFHA$. Linea igitur C (C) eſt quadratrix reſpectu lineæ H (H), cum ipſius C (C) ordinata FC, ducta in a conſtantem faciat rectangulum æquale areæ, ſeu ſummæ ordinatarum ipſius H (H) ad abſciſſas debitas AF applicatarum. Hinc cùm BT ſit ad AF ut FH ad a (ex hypotheſi) deturque relatio ipſius FH ad AF (naturam exhibens figuræ quadrandæ) dabitur ergo & relatio BT ad FH, ſeu ad BC, adeoque Tab.XIV. Fig. 53.

 &

& relatio BT ad TC, id eſt relatio inter latera trianguli TBC. Itaque ad omnes quadraturas, adeoque & ad dimenſiones efficiendas tantum opus data relatione laterum trianguli characteriſtici aſſignabilis TBC, ſeu data lege declivitatum curvæ, poſſe deſcribere curvam C (C) quam oſtenſum eſt eſſe quadratricem.

Tab. XIV. Fig. 54. Hæc deſcriptio ita fiet: In *figur.* 54. ſit angulus rectus TAH immotus, & in plano horizontali poſitus; in cujus crure AT procedat cylinder cavus verticalis TG, infra dictum planum horizontale prominens, in quo ſit ſurſum deorſumque mobilis cylinder ſolidus FE, in ſummitate F alligatum habens filum FTC, ita ut pars FT ſit intra cylindrum cavum, pars TC in dicto plano horizontali. Porro ad fili TC extremitatem C ſit punctum pondere ſibi incumbente eidem plano innitens, atque in eo deſcribens lineam C (C) initium autem motûs erit in cylindro cavo TG, qui dum ducitur per AT recedens ab A, attrahet C. Punctum verò deſcribens, ſeu ſtylus C ante ſe protrudat HR, regulam in eodem plano horizontalis normaliter ad AH (alterum crus anguli recti immobilis TAH) incedentem verſus A; quæ protruſio non impedit, quo minus protrudens punctum C ſola tractione fili moveatur, adeoque ejus directionem in motu ſervet. Sit verò & tabula quædam RLM, eodem ſui puncto R normaliter incedens ad regulam HR, cæterum propulſa continuè a cylindro cavo, ita ut ATHR ſit rectangulum. Denique in hac tabula ſit deſcripta, (per laminam extantem, ſi placet,) linea rigida EE, quam cylinder ſolidus FE, inciſura, quam in extremitate E habere intelligitur, ſemper mordeat; ita prout R accedet ad T, cylinder FE deſcendet. Cùm igitur quantitas ET + TC ſit data (nempe compoſita ex cylindro ſolido EF, & toto filo FTC) ſitque data relatio inter TC & TR vel BC (ex lege declivitatum curvæ data) habebitur & relatio inter ET & TR, ordinatam, & abſciſſam curvæ EE, cujus proinde natura, & deſcriptio haberi poteſt in Tabula LRM per geometriam ordinariam; habetur ergo etiam deſcriptio lineæ C (C) per machinationem præſentem. Eſt autem TC ſemper tangens curvæ C (C) ex natura noſtri motûs, itaque deſcripta eſt linea C (C), ubi lex declivitatum, ſeu relatio laterum trianguli characteriſtici aſſignabilis, TRC, vel TBC, eſt data. Quæ linea cùm ſit quadratrix figuræ datæ quadrandæ, ut paulo ante oſtenſum eſt, habebitur quadratura, vel dimenſio quæſita.

Similia variis modis ad converſæ tangentium methodi problemata accommodari poſſunt, veluti ſi punctum T fuiſſet motum in curva TT (loco rectæ AT) etiam HC coordinata (ſeu abſciſſa AB) calculum fuiſſet ingreſſa. Et ſanè omne problema converſæ tangentium reduci poteſt ad relationem inter tres rectas, nempe duas coordinatas CB, CH, & tangentem CT; aut alias functiones harum loco. Sed ſæpe res multo ſimpliciore motu confici poteſt. Veluti ſi data fuiſſet relatio inter AT & TC

T C (quod eſt circulis lineam ad angulos rectos ſecantibus, ordinatim poſitione datis, invenire lineam C (C)) ſuffeciſſet minor apparatus. Ceſſantibus enim iis quæ incedunt in H & R, ſatis erit E E lineam rigidam directricem deſcribere in plano verticali immobili tranſeunte per AT. Ita promoto in recta immota A T, puncto T C, ſeu cylindro cavo T G, deſcendenteque cylindro ſolido T E, prout jubet linea data directrix EE, quam cylinder mordet; utique ob ſummum E T + T F conſtantem (ut ante,) & relationem inter A T & T C datam facilè invenietur relatio debita inter AT & T C, ſeu natura lineæ E E, cujus ope deſcripta C (C) erit quæſita.

N°. XLV.

C. HUGENII Z.

DE PROBLEMATE BERNOULLIANO,

In Actis Lipſienſibus anni 1693 propoſito, cum additione G. G. *Leibnitii.*

Ex Actis Erudit. Lipſ. ann. 1693.

ELegans inprimis eſſe hoc Problema, cùm ex iis quæ clariſſimus inventor de eo prodidit, tum ex ſolutione, & commentatione fraternâ manifeſtum eſt. A quo inveſtigando cùm propter inſignem difficultatem, quæ ſtatim ſeſe offerebat, abſtinere ſtatuerim (neque enim omnibus perquirendis, quæ à Viris eruditis exercitii gratiâ proponuntur, incumbere neceſſe exiſtimo, aut aſſequendis parem me profiteor) non deſiit tamen quaſi invitum compellere recurrens identidem quæſiti non vulgaris idea, donec tandem quod deſiderabam obtinui. Inventâ nimirum *æquatione differentiali*, in quâ ex altera parte erat elementum trapezii hyperbolici, ab aſymptoto perpendicularibus intercepti; ab alterâ elementum ſpatii curvilinei, quod itidem ad trapezium hyperbolicum reduci poſſet. Quod apertiùs exponerem, niſi relinquendam etiamnum aliis putarem inquirendi voluptatem. Inde eo rem deducebam, ut trapezium ejuſmodi hyperbolicum ſecandum eſſet aut augendum ſecundùm rationem datam. Quod cùm per medias aut continuè proportionales fieri poſſit, ubi ratio tangentis ad abſciſſam eſt ea quæ numeri ad numerum, hinc apparuit

curvam quæſitam tunc iis accenſendam quæ geometricæ vocantur, alias eſſe ex heterogeneis: ac tamen conſtructionem dari poſitâ lineæ logarithmicæ deſcriptione, quam quidem hîc adducerem, niſi viderem haud difficulter ex ipsâ *Jacobi Bernoullii* doctiſſimâ ſimul breviſſimâque ſolutione omnia erui poſſe, ut jam ab aliis occupatam dubitem.

Colligitur verò ex his illud animadverſione dignum, nempe quandocunque in inveſtigatione curvarum ex tangentibus, aut ſubtangentibus ejus, ad ſimiles ei quam dixi æquationes pervenietur, aut in quibus habeatur utrinque elementum ſpatii ad trapezium hyperbolicum reductibilis; tunc idem hoc, quod mirabile hîc accidit, eventurum, ut curvæ geometricæ diverſorum generum graduumque exiſtant, ſi hyperbolarum ad quas devenitur rectangula quæ in aſymptotis, ſint commenſurabilia. Præterea obſervanda venit in hoc problemate inuſitata ac ſingularis analyſis via, quæ ad alia multa in hac Tangentium doctrinâ aditum aperit, ut egregiè jam animadvertit Vir celeberrimus *calculi differentialis* inventor, ſine quo vix eſſet, ut ad haſce geometriæ ſubtilitates admitteremur. Porrò quod ad curvarum, de quibus agitur, deſignationem in plano attinet, poſſem, ſi operæ pretium eſſet, alios modos ac fortaſſe commodiores indicare quàm qui a cl. *Bernoullio* præſcribitur, atque etiam docere quâ ratione optimè peragatur deſcriptio noſtræ quadratricis hyperbolæ, quæ inter *Tractorias* (ita enim vocari poſſunt) ſimpliciſſima cenſenda eſt, cùm ad eam filis nihil opus ſit, ſed bacillo tantùm utrimque cuſpidem lateri infixam habente, quo fit ut & regreſſu explorari poſſit quàm rectè exarata ſit. Sed his ſuperſedendum arbitror, donec inſignis uſus aliquis harum linearum in lucem proferatur. Interim aliam quandam utiliſſimam curvam nuper mihi repertam Geometræ ſciant, cujus operâ horologiis æqualis motus conciliatur, atque ejuſmodi ut maris agitatione nequaquam turbari aut imminui queat; quod in pendulis noſtris hactenus uſurpatis non ſatis caveri potuit. Adeo ut nova ac certior ſpes nunc affulgeat perficiendi longitudinum inventi. Curva hæc formatur,

a a b b c d e e e e e f i i i i i l l l m m m m n o r r s s t t u u x.

EXCERPTUM EX EPISTOLA G. G. LEIBNITII

Cui præcedens meditatio fuit incluſa.

MItto meditationem quæ ſatis indicat autorem ſuum, tum magnitudine præclarorum inventorum, tum ipsâ magnis viris ſuetâ ingenuitate. Nam & meo qualicumque invento debere aliquid voluit, cùm ipſe pro ſuâ in his ſtudiis autoritate & meritis, facilè omnia a ſe petiiſſe videri poſſit. Cæterum video ipſum, qua eſt perſpicaciâ, ubi primùm animum ad noſtrum calculum differentialem appulit, ſtatim animadvertiſſe, quid

quid in eo ſit optimum. Nempe quòd ita ſolutiones generales habeantur, quæ ſua naturâ porriguntur ad quantitates tranſcendentes, in certis autem caſibus, ut fieri poteſt, ad ordinarias ducunt. Mirarer, quòd ſolas illas quæ æquationibus certi gradûs ſubjacent, Geometricas vocare adhuc videtur, niſi judicarem, ſequi magis vulgi morem eâ in re, quàm probare, dum de iis ait, *quæ Geometricæ vocantur.* Ego putem, ut veteres quidam rectè reprehenſi ſunt, quod Geometricum ſatis eſſe negarent, quicquid circulo aut regulâ effici non poſſet; ita nec illorum hodiè errori favendum eſſe, qui Geometriam ſolis æquationibus Algebræ gradariis metiuntur; cùm Geometricum potius ſit, quicquid motu continuo exactè conſtrui poteſt. Quod ſi ille non admittit, ſuis ipſe præclaris inventis injuriam facit, cùm ipſemet inprimis auxerit Geometricas conſtructiones: nam evolutionum inventum, quod *Hugenio* debemus, quantivis pretii eſt, & nunc tractorias conſtructiones protraxit in publicum primus. Nam etſi ego prior jam a multis annis idem tacitus verſaverim, & ut arbitror longiùs etiam provexerim, fateor tamen ideam primam hujus motûs mihi a *Perralto* veniſſe, etſi a me profecta ſit reſolutio ejus ſeu applicatio ad Geometriam. At *Hugenium* judico utrumque ſibi ipſi debere. Quod verò nunc ſpem facit motûs hujus tractorii reddendi quàm accuratiſſimi, ſi fortè inſignis aliquis hujuſmodi linearum uſus in lucem proferatur, non dubito quin ſit libentiùs impleturus, viſo nupero ſchediaſmate meo menſis Septembris, (a) ubi oſtenſum eſt, omnes quadraturas tali motu, etſi compoſitiore conſtrui poſſe. Ad ſchediaſma dictum adjicere placet, poſſe in *fig.* 54. totam tabulam RM, cum appendicibus, nempe cylindris TG, FE, & directrice rigidâ EE in eodem plano vel æquivalente eſſe cum ipſo plano lineæ deſcribendæ C (C). Cæterum curvam directricem rigidam ſæpè commodè vitari poſſe, & adhibitis pro eâ rectis materialibus, quibus poteſt deſcribi.

(a) Vid. Num. antecedentem.

N°. XLVI.

N°. XLVI.

NOVA CALCULI DIFFERENTIALIS

Applicatio & uſus, ad multiplicem linearum conſtructionem, ex data tangentium conditione.

Ex Actis Erudit. Lipſ. ann. 1694.

Tab. XV. MEmini jam a me inſinuatum in his Actis, ut rectarum ordinatim ſumptarum concurſu hactenùs noto, ita & concurſu curvarum lineas formari. Sed placet rem non parvi ad Geometriam augendam momenti exponere diſtinctiùs; nam ne in rectis quidem concurrentibus tota ejus vis fuit perſpecta. In genere igitur hoc problema ad communis Geometriæ leges revocare hic docebo: *Lineis* (rectis vel curvis) *propoſitam tangentibus, poſitione ordinatim datis invenire propoſitam*, vel quod eodem redit: *invenire lineam, quæ infinitas lineas ordinatim poſitione datas tangit.* Cujus uſus cùm latiſſimè pateat, calculum in eam rem peculiarem jamdudum excogitavi, vel potiùs huc peculiari ratione applicui noſtrum Differentialem compendio non contemnendo. Scilicet quemadmodum *Carteſius* loca veterum calculo exprimens æquationes adhibuit, quæ cuivis curvæ puncto conveniunt, ita nos æquationes hîc adhibemus infinities ampliores, quæ cuilibet puncto cujuslibet curvæ *in ſerie ordinatim ſumtarum curvarum* comprehenſæ, accommodantur. Itaque x & y abſciſſa quidem & ordinata, ſeu *coordinatæ* eſſe intelliguntur cujuſvis ex dictis curvis, ſed ſpeciatim tamen accipiuntur de curva ex ipſarum concurſu *formata*, ſeu ipſas tangente; utili quodam *æquivocationis characteriſticæ* genere. *Coefficientes* a, b, c, in æquatione cum ipſis x & y uſurpatæ, ſignificant quantitates in eadem curva *conſtantes*, alias quidem *inſitas* (nempe *parametros*) alias verò *extraneas*, quæ ſitum curvæ (adeoque verticis, axiſque) definiunt. Sed comparando curvas ſeriei inter ſe, ſeu tranſitum de curva in curvam conſiderando, aliæ coefficientes ſunt *conſtantiſſimæ*, ſeu *permanentes*, (quæ manent non tantùm in una, ſed in omnibus ſeriei curvis,) aliæ ſunt *variabiles*. Et quidem ut *ſeriei curvarum lex* data ſit, neceſſe eſt unicam tantùm in coefficientibus ſupereſſe variabilitatem, adeoque ſi in *primaria*

pro

pro omnibus curvis *æquatione* naturam earum communem explicante plures extent variabiles, neceſſe eſt dari alias *æquationes acceſſorias*, coefficientium variabilium dependentiam inter ſe exprimentes, quarum ope omnes variabiles ex æquatione primaria tolli poſſint præter unam. Cæterùm pro concurſu duarum linearum proximarum, ſua interſectione punctum curvæ quæſitæ (quam & tangere intelliguntur,) determinantium, manifeſtum eſt, concurrentes quidem, adeoque lineam ex concurſu *formatam* tangentes, eſſe geminas; interſectionis autem, ſeu concursûs punctum eſſe unicum, adeoque & ordinatam ei reſpondentem unicam eſſe; cùm alioqui in inveſtigatione ſolita linearum propoſitam tangentium, rectarum, vel curvarum (velut circulorum, parabolarum &c.) ex datæ curvæ ordinatis quærendarum, ordinatæ *geminæ*, tangentes *unicæ* concipiantur. Itaque quoad præſentem calculum, quo ipſæ ex tangentibus rectis, vel curvis poſitione datis inveſtigantur ordinatæ (contra quam in communi) manent coordinatæ x & y in hoc tranſitu (a proximo ad proximum) invariatæ, adeoque ſunt indifferentiabiles; at coefficientes, (quæ in communi calculo indifferentiabiles cenſentur, quia conſtantes,) quatenus hic variabiles ſunt, differentiantur. Notabile eſt autem, *ſi omnes inſitæ coefficientes ſint permanentes*, curvæque adeo ordinatim concurrentes ſint congruæ inter ſe; perinde fore, ac ſi intelligantur *eſſe veſtigia ejuſdem lineæ motæ;* curvaque earum concurſu formata lineam motam perpetuo durante motu tanget. Unde in hoc caſu oritur connexio quædam cum generatione *trochoeidum*; nam & baſis, ſuper qua volvitur generatrix trochoeidis, generatricem durante motu tangit.

Calculus autem ita inſtituetur: aſſumatur aliquis angulus rectus fixus, cujus crura utcunque producta conſtituere intelligantur duos axes relationis curvarum, ſeu axem cum axe conjugato; in quos demiſſæ normales ex puncto curvæ quocunque erunt ordinata, x, & ordinata conjugata, ſeu abſciſſa, y; uno verbo: *coordinatæ*, x & y; quarum relationem ex datis quærendo habebitur *æquatio*, (1) quam paulo ante appellavimus *primariam*, cùm ſit cuilibet cujuslibet curvarum ordinatim ſumtarum puncto communis. Quòd ſi æquationi 1, inſunt plures coefficientes variabiles, ut b, c, dabitur earum dependentia per *ſecundariam* æquationem, (2) unam vel plures; atque ita ex æq. 1. tollendo coefficientes variabiles, præter unam b prodibit æq. (3). Hanc æquationem differentiando, ut prodeat æq. (4) cùm in ea ſola affutura ſit differentialis ipſius b, evaneſcet differentialitas, adeoque habemus æq. 4 ordinariam, cujus ope ex æq. 3 tollendo variabilem reſiduam b, habebitur æquatio, (5) in qua præter x & y tantùm ſupererunt coefficientes invariabiles (ut a) quæ erit æquatio ad curvam quæſitam concurſu ſeriei linearum formatam, adeoque *ad ſeriei linearum tangentem communem.* Sed & aliter inſtitui poteſt calculus, prout facilitas invitabit, non tollendo ſtatim variabiles, ſed ſervando.

Nempe datis æq. (1) primaria, & æq. (2) ſecundaria (una vel pluribus pro explicanda dependentia coefficientium variabilium inſervituris) differentientur æq. 1, ut prodeat (3), & æq. 2, ut prodeat (4) (una vel plures, ſi pro æq. 2. affuerint plures.) Ita habebimus plures quantitates differentiales, ſed tamen habebimus & æquationes ſufficientes ad eas tollendas; & quidem modò tolli poſſint differentiales quantitates uſque ad unam; etiam reſidua iſta evaneſcet per ſe, & ſic prodibit æq. (5) ordinaria, ſeu carens quantitate differentiali; quam conjungendo cum æq. 1 & 2 tolli poterunt variabiles omnes, & prodibit æq. (6) naturam exprimens curvæ quæſitæ, linearum concurſu formatæ, quæ erit eadem cum æq. 5. calculi prioris.

Hic jam methodo ſolvi poſſunt innumera problemata ſublimioris Geometriæ, hactenùs non habita in poteſtate, pertinentiaque ad tangentium converſam; ex quibus nonnulla in ſpecimen indicabo, magnæ utique generalitatis. Veluti: data relatione inter A Γ & A Θ reſegmenta axium per curvæ tangentem CT facta, invenire curvam CC; nam rectæ curvam
Tab. xv. Fig. 55. tangentes ordinatim poſitione dantur, adeoque & curva quæſita, quippe quæ earum concurſu formatur. Vel ſi dato puncto axis T, detur lineæ datæ EE punctum E, ſic ut juncta TE, ſi opus producta, quæſitam curvam CC tangat, patet ex dictis curvam CC præſcripta hic methodo haberi. Similiter data relatione inter AP, & AΠ, reſegmenta axium facta per curvæ perpendicularem PC, licet invenire curvam CC: nam ob rectas PΠ ordinatim poſitione datas, etiam datur linea FF formata per earum concurſum; hujus verò evolutione deſcribetur curva CC quæſita. Unde hic quidem infinitæ curvæ ſatisfacientes dari poſſunt, omnes ſcilicet parallelæ inter ſe, quæ ejuſdem lineæ evolutione *condeſcribuntur*; & data relatione inter AP & AΠ dari poteſt *curva quæſita* non tantùm ſatisfaciens, ſed & *tranſiens per punctum datum.* Interim hoc caſu curva CC non ſemper eſt ordinaria, quoniam ſcilicet non ipſamet, ſed ipſius per evolutionem generatrix rectarum poſitione datarum concurſu formatur. Certè cùm ipſa curva formatur concurſu, habetur *determinata*, nec in arbitrio eſt punctum, per quod tranſeat; quæ diſtinctio utilis eſt in hac doctrina.

Sed exemplum calculi dabimus in problemate itidem generali, ad aliquam tamen ſpecialem lineam applicato: *data relatione perpendicularis* PC
Tab. xv. Fig. 56. *ad proprium ab axe reſegmentum* AP *invenire lineam* CC. Patet enim datis poſitione punctis C, nempe centris circulorum, & radiis PC datis magnitudine (ob datam relationem ad AP) *dari ordinatim circulos lineam* CC *tangentes*, adeoque lineam ipſam circulorum concurſu formatam haberi poſſe, id quod jam verbulo indicaveramus olim in *Actis* 1686. *menſe Junio*, ſub ſchediaſmatis finem. Itaque centro P, radio PC magnitudine dato, deſcribatur circulus CF. Ut ergo methodum paulo antè

poſitam

poſitam huc applicemus: ex puncto circuli quocumque F agantur normales ad crura anguli recti PAH, ſeu coordinatæ FG, y, & FH, x (quæ in caſu concurſûs duorum circulorum incidunt in CB, CL) ſit AP, b, & PC, c; fiet ex natura circuli, $xx + yy + bb \overset{(1)}{=} 2bx + cc$ æquatio primaria omnibus noſtris circulis, & cuique cujuſque puncto communis. Quoniam autem datur relatio inter AP & PC dabitur curva EE, cujus ordinata PE æquetur ipſi PC; hæc curva ponatur (exempli gratiâ) eſſe parabola, cujus parameter, a, & fiat $ab \overset{(2)}{=} cc$, quæ æquatio ſecundaria exhibet relationem, ſeu dependentiam inter c & b. Hujus ope tollendo c, ex æq. 1, fiet $xx + yy + bb \overset{(3)}{=} 2bx + ab$; patet autem in æq. 1. præter coordinatas x & y, adeſſe coefficientes c, b, a; ex quibus c & b ſunt in uno circulo conſtantes, & c quidem eſt circulo inſita, cùm ejus radium deſignet; b eſt extranea, quippe ſitum centri deſignans; ambæ variatis circulis ſunt variabiles, ſed a eſt conſtantiſſima, ſive permanens, cùm non unius tantùm circuli omnibus punctis, ſed & pro omnibus circulis noſtris in æquatione maneat eadem. Reducta jam æquatio 3 ad unam coefficientem variabilem b, differentietur, ſecundùm b (ſolam in ea differentiabilem) & fiet $2bdb = 2xdb + adb$, ſeu (evaneſcente db) fit $b \overset{(4)}{=} x + a : 2$ (qui calculus in caſu unius differentiabilis in effectu coincidit cum methodo vetere de maximis & minimis a *Fermatio* propoſita, ab *Huddenio* promota, ſed quæ tantùm eſt corollarium noſtræ. Jam ope æq. 4. tollendo reſiduam coefficientem variabilem b ex æq. 3 fiet $ax + aa : 4 \overset{(5)}{=} yy$, quæ eſt æquatio ad curvam cc quæſitam. Idque indicio eſt eam eſſe parabolam, ipſi datæ AE congruentem, ſed paulo tantùm aliter ſitam; continuata enim CC vertice ſuo V incidet in axem AP, ſed ſupra datæ AE verticem A, ita ut diſtantia verticum AV ſit communis lateris recti pars quarta. Si alteram calculandi rationem malis, per plures differentiales; reſumtæ æquationes 1 & 2 differentientur, & ex 1 fiet $bdb \overset{(3)}{=} + db + cdc$, ſed ex 2 fiet $adb \overset{(4)}{=} 2cdc$, quarum (3 & 4) ope tollendo dc, evaneſcet ſimul & db, & fiet $b \overset{(5)}{=} x + a : 2$ ut paulo antè. Unde jam per 1, 2, 5 tollendo c & b coefficientes variabiles; prodibit $ax + aa : 4 \overset{(6)}{=} yy$ pro æquatione lineæ quæſitæ, ut antè.

Atque ita docuimus data relatione perpendicularis PC ad proprium ex axe reſegmentum AP exhibere lineam CC, quia ordinatim dantur circuli lineam tangentes. Sed data relatione rectæ tangentis TC ad proprium ex axe reſegmentum AT (ſeu circulis normalibus ad lineam ordinatim

 datis)

datis) invenire lineam C C ; alterius eſt methodi, & *conſtructione tractoria* talis linea haberi poteſt, a nobis in his *Actis Sept. anni ſuperioris menſe* (a) explicata. Hujus autem præſentis methodi noſtræ maximus præterea eſt uſus ad complura alia problemata Geometriæ ſuperioris, aut etiam ad mechanica, vel phyſica applicatæ. Cùm enim id agitur, ut figura formetur, in quovis puncto dato ſuæ lineæ terminantis præſtans aliquid deſideratum, perſæpe conſequimur quæſitam formando ipſam concurſu linearum, quarum quævis in aliquo puncto ſatisfacit, ipſomet ſc. puncto concursûs. Hac ratione jam olim in ſchediaſmate de *Lineis Opticis* (b) inveni modum lineas exhibendi, quæ radios ordinatim poſitione datos, ſeu a datæ figuræ ſpeculo venientes, reddant convergentes, aut divergentes, aut parallelos. Formatur enim talis linea ellipſium concurſu, ſi radii debeant fieri convergentes ; eademque methodus valet, ſi reddendæ ſint parallelæ aut divergentes.

P. S.

Solutionem ſuam Problematis *Bernoulliani* menſe nupero Majo una cum objectione Anonymi Actis Eruditorum inſertam, Dn. Marchio *Hoſpitalius* Autor defendere non diſtulit, oſtenditque, ut intellexi, Anonymum, ſi calculum ſuum ad finem perduxiſſet, ipſummet ſolutionis datæ ſucceſſum fuiſſe deprehenſurum. Cæterum Anonymus ille aliam ſolutionem non dedit, neque id ſecundùm Analyſin vulgarem facilè præſtari poteſt. Noſtra autem nova, adeoque & Dn. Marchionis, ac Dominorum *Bernoulliorum* Methodus, non hoc tantùm, ſed &, quemadmodum jam menſe Julio (c) in Actis anni ſuperioris eſt admonitum, innumera ſimilia ſolvit, ſive abſolutè pro re nata, ſive per quadraturas. Et generale Problema ſic concipi poteſt. *Data ratione inter duas Functiones invenire lineam.* Data ratio intelligitur, quæ eſt inter duas datas, velut m & n. *Functionem* voco portionem rectæ, quæ ductis ope ſola puncti fixi, & puncti curvæ cum curvedine ſua dati rectis, abſcinditur. Tales ſunt : Abſciſſa A B vel A β ; ordinata B C vel β C ; tangens C T vel C θ perpendicularis C p vel C π ; ſubtangentialis B T vel β θ ; ſubperpendicularis B P vel β π ; per tangentem reſecta A T vel A θ ; perpendicularem reſecta A P vel A π ; correſecta P T vel π θ ; radius oſculi ſeu curvedinis C F ; & aliæ innumeræ.

(a) Vid. Num. XLIV. (b) Vid. Num. XXII. (c) Vid. Num. XLI.

N°. XLVII.

CONSIDERATIONS

Sur la différence qu'il y a entre l'Analyſe ordinaire, & le nouveau Calcul des Tranſcendantes.

Tirées du Journal des Savans de l'année 1694.

LA ſolution d'un problême de conſéquence propoſé par M. *Jean Bernoulli*, que M. le *Marquis de l'Hoſpital* a donné dans les Mémoires de l'Académie Royale des Sciences, & tout ce qu'on a eu la bonté d'y dire en faveur de mon calcul, qui ſert à ces choſes, m'engage à en dire un mot, pour animer les Géomètres à le perfectionner. Il faut avoüer, que l'Analyſe ordinaire eſt encore aſſez imparfaite: le public n'a pas encore le moyen de trouver les racines du cinquiéme degré, & au dela; & il n'a pas encore de méthode générale pour le calcul qui ſe fait à la façon de *Diophante* pour réſoudre les queſtions en nombres. Ainſi il ne faut point s'étonner, ſi notre nouveau calcul des différences & des ſommes, qui enveloppe la conſidération de l'infini, & s'éloigne par conſéquent de ce que l'imagination peut atteindre, n'eſt pas venu d'abord à ſa perfection. Mais comme il eſt beaucoup plus utile que le calcul des équations du cinquiéme degré, & au dela, ou que le calcul de *Diophante*, quoique j'aye trouvé le moyen de les faire encore ſervir au nôtre; il eſt important qu'on s'y applique. Meſſieurs *Bernoulli* ont été les premiers, qui ont témoigné publiquement avec un très grand ſuccès, combien ils l'avoient trouvé propre pour réſoudre des problêmes Phyſico-Mathématiques, dont la porte paroiſſoit fermée auparavant. M. le Marquis *de l'Hoſpital* y a pris goût auſſi, en ayant donné de beaux échantillons; & enfin M. *Huygens* lui-même en a reconnu & approuvé la conſéquence. Il faut rendre cette juſtice à M. *Newton*, (à qui la Géométrie, l'Optique, & l'Aſtronomie ont de grandes obligations) qu'encore en ceci il a eu quelque choſe de ſemblable de ſon chef, ſuivant ce qu'on en a ſçu depuis. Il eſt vrai qu'il ſe ſert d'autres caractères: mais comme la caractériſque même eſt, pour ainſi dire, une grande part de l'art d'inventer, je crois que les nôtres donnent plus d'ouverture. Pour ce qui eſt de ceux qui ne ſe ſervent que de l'Analyſe ordinaire, & penſent peut-être qu'elle leur ſuffit, il ſera bon de leur propoſer des pro-

blêmes ſemblables au dernier de Mr. *Bernoulli.*

En voici un plus général, qui le comprend avec une infinité d'autres. Soit donnée la raiſon, comme M à N, entre deux fonctions quelconques
Tab. xv. Fig. 57. de la ligne A C C: trouver la ligne. J'appelle *fonctions* toutes les portions des lignes droites, qu'on fait en menant des droites indéfinies, qui répondent au point fixe, & aux points de la courbe; comme ſont A B ou A β abſciſſe, B C, ou β C ordonnée, A C corde, C T ou C θ tangente, C P ou C π perpendiculaire, B T ou β θ ſous-tangente, B P, ou β π ſous-perpendiculaire. A T ou A θ *reſecta*, ou retranchée par la tangente; A P ou A π retranchée par la perpendiculaire; T θ & P π ſous-retranchées, *ſub-reſectæ à tangente, vel perpendiculari*; T P ou θ π *correſectæ*; & une infinité d'autres d'une conſtruction plus compoſée, qu'on ſe peut figurer.

Le problême ſe peut toujours réſoudre; & il y a moyen de conſtruire la ligne, au moins par les quadratures, ou par les rectifications. Car cette méthode, ou ce *calculus differentialis*, ſert non-ſeulement aux différences, mais encore aux ſommes, qui ſont le réciproque des différences; à peu près comme le calcul ordinaire ne ſert pas ſeulement aux puiſſances, mais encore aux racines, qui ſont le réciproque des puiſſances. Et l'analogie va plus loin qu'on ne penſe. Dans l'analyſe ordinaire on peut toujours délivrer le calcul *à vinculo*, & des racines, par le moyen des puiſſances: mais le public n'a pas encore la méthode de le délivrer des puiſſances impliquées par le moyen des racines pures. De même dans notre Analyſe des tranſcendantes, on peut toujours délivrer le calcul *à vinculo*, & des ſommes, par le moyen des différences: mais le public n'a pas encore la méthode de le délivrer des différences impliquées par le moyen des ſommes pures, ou quadratures: & comme il n'eſt pas toujours poſſible de tirer les racines effectivement pour parvenir aux grandeurs rationnelles de l'Arithmétique commune, il n'eſt pas toujours poſſible non plus de donner effectivement les ſommes ou quadratures, pour parvenir aux grandeurs ordinaires, ou algébriques de l'analyſe commune. Cependant par le moyen des ſéries infinies on peut toujours exprimer des grandeurs rompues, comme en entiers & des incommenſurables en rationnelles, & des tranſcendantes en ordinaires. Et j'ai donné par là une voye générale, ſelon laquelle tous les problêmes, non ſeulement des différences, ou ſommes, mais encore des différentio-différentielles, ou ſommes des ſommes, & au delà, ſe peuvent conſtruire ſuffiſamment pour la pratique: comme j'ai donné auſſi une conſtruction générale des quadratures par un mouvement continu & réglé.

Enfin notre méthode étant proprement cette partie de la Mathématique générale, qui traite de l'infini, c'eſt ce qui fait qu'on en a fort beſoin, en appliquant les Mathématiques à la Phyſique, parce que le caractère de l'Auteur infini entre ordinairement dans les opérations de la nature.

N°. XLVIII.

N°. XLVIII.

CONSTRUCTIO PROPRIA PROBLEMATIS

De Curva Iſochrona Paracentrica. Ubi & generaliora quædam de natura, & calculo differentiali oſculorum, & de conſtructione linearum tranſcendentium, una maximè geometrica, altera mechanica quidem, ſed generaliſſima. Acceſſit modus reddendi inventiones tranſcendentium linearum univerſales, ut quemvis caſum comprehendant, & tranſeant per punctum datum.

Ex Actis Erud. Lipſ. ann. 1694.

A Celeberrimo Viro *Jac. Bernoullio*, Matheſeos apud Baſileenſes Profeſſore, in *Actis menſis Junii* nuperi velut invitatus; præſertim circa problema a me olim, cùm nondum noſtra calculandi methodus frequentari cœpiſſet, propoſitum; reſponſionem defugere nolui; tametſi & valetudo vacillans, & aliæ multiplices cauſæ, excuſare me fortaſſe poſſent. Et quidem profundiùs iſta meditari non licet, aut demonſtrationes introſpicere, minimè tamen dubito, pro explorato acumine *Viri*, vera attuliſſe. Quo conſtituto libenter agnoſco, non facilè in ſpecialium problematum ſolutione apud Geometras pulchriora repertum iri. Quædam tamen annotabo, quæ mihi primo aſpectu ſeſe obtulere, nec novo ſtudio indigebant. Theoremata pro inveniendis radiis circulorum oſculantium elegantia, & utilia ſunt, utorque ſimilibus vel expreſsè, vel potius virtualiter, ipsâ calculi noſtri naturâ jubente, quoties generatricem evolutoriam, vel oſcula quæro, lineæ non niſi differentialiter, ſeu per tangentium proprietatem datæ; tunc enim ut ex duabus incognitis generatricem determinantibus unius (altera ſublata) valor, per ipſas x, y, dx, dy lineæ differentialiter datæ generaliter habeatur; utique veniendum eſt ad differentio-differentiales, quæ tamen ceſſant in applicatione, quia $dy : dx$, per ordinarias explicatur. Sed & pro centris non minùs ac radiis circulorum

lorum oſculantium theoremata generaliora formari poſſunt, quæ certorum elementorum æqualitate non indigent. Tale hoc eſt (cujus corollaria ſunt, quæ *Vir Cl.* attulit,) radius oſculi eſt ad unitatem, ut elementum unius coordinatæ eſt ad elementum rationis elementorum alterius coordinatæ, & curvæ. *Rationem* autem hìc ſumo pro re homogenea unitati, vel numero, quæ oritur ex diviſione antecedentis per conſequens. Item: diſtantia centri oſculantis circuli ab ordinata curvæ, eſt ad unitatem, ut tertia proportionalis elementorum abſciſſæ & curvæ eſt ad elementum rationis elementorum abſciſſæ & ordinatæ. Et quod notatu dignum eſt, poſſunt hæc indagari ſine mediatione figuræ, nempe ex calculo ſolo a nobis propoſito; quærendo ſcilicet æquationem localem ad rectam curvæ normalem, eamque differentiando ſecundùm quantitates in ea geminatas, methodo a me præſcripta in his *Actis April.* 1692, (a) & nuper illuſtrata. Nempe ſit abſciſſa AB, x; ordinata BC, y, vel contra; & elementum curvæ ſit dc. Et CP ad curvam perpendicularis, axi occurrat, in P; ſumaturque in ea punctum quodcunque G, unde ad axem normalis GF ducatur. Jam ſit AF, f; & GF, g; fietque (cùm ſigna ita poſtulabunt) $g + y$ ad $f - x$ ut dx ad dy ſeu fiet $g + y = \overline{f - x}, dx : dy$; quæ eſt æquatio localis ad rectam indefinitè productam, curvæ normalem. Verùm quia jam duarum hujuſmodi rectarum quæritur interſectio, differentianda eſt hæc æquatio; hoc tantùm obſervato, ut g & f, ob commune punctum concursûs, conſiderentur velut coincidentes in utraque recta, adeoque indifferentiabiles. Et fiet $dy = \overline{f - x}\, d.\overline{dx : dy} - dx\, dx : dy$; ſeu $dc\, dc : dy$ (tertia prop. ipſis dy, dc) eſt ad $d.\overline{dx : dy}$ (elementum rationis inter dx & dy) ut $f - x$ ad unitatem; quod eſt poſterius theorema ex iis, quæ paulo ante adduxi. Quòd ſi rationem inter dx & dy vocemus r, fiet dx ad $r\,dr :, 1 + rr$ (elementum quoddam pro dicta ratione logarithmicum) ut diſtantia a coordinata nempe $f - x$ eſt ad unitatem. Iiſdem poſitis, radius oſculi vocetur q, fiet $q\,dy : dc = f - x$; & differentiando fiet $q\,d, \overline{dy : dc} = dx$ ſeu fiet q ad 1, ut $-dx$ ad $d, \overline{dy : dc}$, vel q ad 1, ut dy ad $d, dx : dc$; quod eſt theorema prius. Et omnino variari iſta poſſunt infinitis modis, conſtituique pro uſu problematum; potiſſima tamen elegantioraque conſignari prodeſt ad ſcientiæ incrementum. Et latent ſanè in iſtis, quæ egregios uſus habere poſſunt.

De *Elaſtro* in univerſum quidem dici, opinor, poteſt: tenſionem eſſe proportionalem vi tendenti. Sed cùm in ſolidi contenti mutatione tenſio conſiſtat, non ſolet tota in longitudinem refundi; ut ſi fingamus pilas inflatas in lineam depoſitas eſſe, vicinamque vicinæ nodo quodam alligari; ac totum funem ex illis compoſitum intendi; manifeſtum eſt, funis extenſionem in longitudinem non fore proportionalem tenſioni aëris incluſi in pilis, ſeu vi tendenti. Quæ cauſa etiam eſt, quòd de lamina elaſtica non

(a) Vid. Num. XXXV.

non æquè ac de catena certi aliquid conſtitui poteſt. Itaque rectè *Cl. Vir.* generalia dedit pro quacumque tenſionis lege.

Cùm varios modos conſtruendi tranſcendentes lineas examinaſſem olim, omnium abſolutiſſimum eſſe repereram, qui fieret inventione punctorum quotcumque per meras quantitates ordinarias, ſeu Algebraicas, ſuppoſita tantùm unica quantitate conſtante tranſcendente pro punctis omnibus; cùm alias perpetuò tranſcendentibus novis ſit opus pro puncto quovis. Et hoc modo uſus eram ad catenariæ conſtructionem. Is igitur valdè probatur *Celeberrimo Viro p.* 271: dolendum tamen cenſet, quòd non ſit univerſalis; etſi enim ſuccedat in his, quæ pendent a logarithmis, vel quadratura hyperbolæ, non tamen adhiberi poſſe, ubi quadratura circuli, vel altior alia requiritur. Cùm verò mihi ſecus videatur, omninoque arbitrer pro circuli dimenſione, imò & pro altioribus, ſimile aliquid fieri poſſe; ad promotionem ſcientiæ intereſt, ut res nonnihil declaretur. Nempe quod pro quadratura hyperbolæ præſtat ſectio rationis, ſeu inventio mediarum proportionalium, id pro circulari præſtat ſectio anguli. Itaque loco logarithmicæ adhiberi poteſt *linea ſinuum* (noſtro more explicata) vel linea tangentium, aliaque ſimilis. Nempe ſumatur quadrans circuli ABCGA, Tab.XVI. Fig. 58. cujus baſis BC eſt ſinus totus, altitudini autem BA utcumque productæ in E, tamquam axi, ordinatim applicentur ſinus recti, hoc modo: Arcus quadrantis biſecetur in G, & ſegmenta AG, CG rurſus biſecentur in H & K; & ſegmenta AH, HG, GK, KC denuò biſecentur, eodemque modo pergi intelligatur. Porrò ſimiliter altitudo EB biſecetur in (G); & E(G), B(G) in (H) & (K) atque ita porrò: tum ipſæ rectæ a punctis ſectionum ad axem ductæ: ut GL, HM, KN ſeu ſinus angulorum GBC, HBC, KBC, (quos cum baſi comprehendunt radii a punctis ſectionum arcûs ad centrum ducti) ordinatim applicentur reſpondentibus punctis ſectionum altitudinis; ſeu transferantur in (G) (L); (H) (M); (K) (N); & ſinus totus BC, in B(C); & linea E(M)(L)(N)(C) erit linea ſinuum; atque ita ſi ordinatæ velut (M)(H) ſint ut ſinus angulorum (velut ABH) abſciſſæ, E(H) erunt ut anguli, ſeu ut arcus, velut (AH). Et ſiquidem tota altitudo EB ſit æqualis arcui quadrantis; abſciſſæ erunt arcubus dicto modo reſpondentibus æquales. Igitur linea hæc ſinuum per puncta deſcribi poteſt non minùs ac logarithmica. Ipſa autem ſemel deſcripta, dataque una ſola quantitate conſtante, quæ eſt ratio diametri ad circumferentiam; ſeu data ratione arcûs quadrantis AGC, ad radium BC; adeoque data ratione arcûs AGC ad altitudinem BE (cujus ratio ad BC pro arbitrio ſumta eſt), patet ope lineæ ſinuum deſcriptæ, arcum circuli quemvis dari; adeoque & ſegmenti cujuſque circularis, vel ſectoris quadraturam. Quemadmodum autem in logarithmica datur unica illa quantitas requiſita, ſi detur figuræ deſcriptæ tangens; ita in linea ſinuum idem eſt. Nam ſi ordinatæ ſint ſinus,

nus, & abſciſſæ ſint proportionales arcubus, erunt elementa abſciſſarum proportionalia arcuum elementis. Jam elementum arcûs eſt ad elementum ſinûs; ut radius ad ſinum complementi. Ergo in figura ſinuum dicta, erit elementum abſciſſæ ad elementum ordinatæ, id eſt, erit ſubtangentialis quæcunque T (G) ad ordinatam G L ſeu ſinum in ratione compoſita, radii AB ad arcum quadrantis A G C, & altitudinis B E ad B L ſinum complementi; & ipſe arcus quadrantis erit ad radium, ut B E altitudo lineæ ſinuum eſt ad T (G) ſubtangentialem 45 graduum ſinui reſpondentem. Porrò quemadmodum lineæ tranſcendentes, id eſt, æquatione algebraica, ſeu certi gradûs inexplicabiles, nempe de gradu in gradum tranſeuntes, deſcribi poſſunt ſectione rationis, vel anguli: ita manifeſtum eſt, innumerabiles alias hujuſmodi per puncta conſtructiones poſſe excogitari linearum tranſcendentium, quas ad alias quadraturas, itemque ad tangentium univerſam methodum, ſeu differentialium primi gradus conſtructionem profuturas, ex dictis intelligi poteſt. Atque ita ad novum velut pelagus meditationum aditus patet, quod ritè ingredienti præclara dabit; cùm in his vera conſiſtat connexio analyſeos algebraicæ, atque tranſcendentis. Qua occaſione noto obiter, quod *Vir Clariſſimus* in mei gratiam Algebraicas ſe impoſterum vocaturum ait, quas ante Geometricas vocaverat, non ita a me accipi, quaſi mihi neſcio quam in his affectationem imputet, ſed quod rationes meas non improbet, quibus inductus ſtatuo, quicquid exactum eſt, Geometricum eſſe, Mechanicum verò quod fit appropinquando; nec minùs peccaſſe *Carteſium* hæc Geometria excludenda, quæ ipſius analyſi non ſubjiciebantur, quàm veteres *Carteſio* peccaſſe erant viſi, qui lineas ſupra rectam & circulum ad mechanicas retulerant.

Nota, quam *Vir Clariſſimus* adhibet p. 271, unde intelligatur, an quadratura figuræ ordinariæ ope logarithmicæ exhiberi poſſit, quod ſcilicet res tum demum ſuccedat, cùm ordinata figuræ quadrandæ eſt ſubtangentialis Algebraicæ; non videtur univerſalis; nec niſi pro illis eſt, quæ ſimpliciore ratione per logarithmos conſtruuntur. Nam eo caſu, quo hæc nota locum habet, logarithmus ordinatæ ad alteram illam curvam Algebraicam dicta ſubtangentiali præditam, erit æqualis rationi, quam ordinata quadratricis, ſeu ſummatricis habet ad conſtantem, ſcilicet in quadratrice ſit ordinata y; in quadranda t; in altera algebraica v; abſciſſa utrobique ſit x, & in algebraica ad v, ſit ſubtangentialis q; ſitque $a\,dy = t\,dx$; & t detur per x, & ob notam præſcriptam ſit $q = aa : t$, erit ex natura ſubtangentialis $dx : q = dv : v = t\,dx : aa = d\overline{y : a}$. Ergo log. $v = \overline{y : a}$. Sit jam in exemplo ad inſtantiam apto $t = x + aa : x$, fiet $y = xx : 2a + a$ log. x. Ergo ſi nota dicta eſſet univerſalis, deberet dari quantitas algebraica v, cujus logarithmus eſſet $\overline{xx : 2aa}$ + log. x; ſeu logarithmus rationis

rationis inter quantitates algebraicas v & x, deberet eſſe quantitas algebraica $xx : 2aa$ indefinitè, in quibuſcumque v vel x, quod fieri nequit. Invenire autem, utrum quadratura fieri poſſit per logarithmicam, vel etiam per dimenſiones conicas, alterius eſt analyſeos, quam a methodo tangentium inverſa diſtinguo. Et quod ad hanc attinet, agnoſco me propoſuiſſe inter alias viam per æquationem generalem, $a + bx + cy$ &c. ad curvam indefinitam; cujus uſum non contemnendum puto, praxi ipſa, & ſpeciminibus edoctus. Sed contractionibus quibuſdam, aliaque induſtria opus eſt.

Ad ſeriem, quam *Profeſſor Clariſſimus* exhibet p. 274, pro exprimenda quantitate $y = \int, xx\,dx : \sqrt{1 - x^4}$, perveniri etiam poteſt ſimplici expreſſione potentiæ binomii. Nam $\boxed{e}\,\overline{1 + b} = 1 + \frac{e}{1} b + \frac{e.\,\overline{e-1}}{1\,2} bb + \frac{e.\,\overline{e-1}.\,\overline{e-2}}{1.2.3.} b^3$ &c. quod ſi ſit $= 1 : \sqrt{1 - x^4}$ erit $e = -1 : 2$ & $b = -x^4$, unde explicando ſeriem $1 + \frac{e}{1} b$ &c. & proveniens multiplicando per $xx\,dx$ habebitur valor ipſius dy: unde fiet: $y = \frac{1}{3.1} x^3 + \frac{1.}{7.2.1} x^7 + \frac{1.3}{11.4.1.2} x^{11} + \frac{1.\,3.\,5}{15.8.1.2.3}$ &c. Ego ſanè compendii causâ utor hoc artificio poſt *Newtonum* etiam ad ſeries meas, cùm unica irrationalis calculum ingreditur, quia ſic ſublatio ejus evitatur. Quamquam & poſt exaltationes (prolixiùs licèt) ad idem perveniri poſſit, methodo generali a me præſcripta.

Venio jam ad problematis mei ſolutionem, ſeu lineæ (quam voco) *Iſochronæ paracentricæ* a me propoſitæ, conſtructionem, occaſione curvæ elaſticæ a *Viro Clariſſimo* feliciter inventam, & ipſa ejus evolutione exhibitam; qua me invitare videtur, ut meam quoque ſolutionem prodam. Feciſſem multo antè, ſi ſatis vacare liceret his laboribus. Jam enim ante complures annos habui, & quidem paulo poſt iſochronam ſimplicem inventam, quando & publicè propoſui quærendam hanc paracentricam paulo difficiliorem. Sed plerumque viam reperiſſe contentus, proſequutione abſtinere cogor. Adeo ut ad ipſius Catenariæ conſtructionem vix demum, diu poſt repertam ejus analyſin, me accinxerim; cùm ſcilicet amici urgerent. Apparebit autem, meum proceſſum non tam ab eo, quod feliciter extrinſecus oblatum eſt, quàm ex ipſius rei natura ſtatim per ſe proveniſſe. Et quamquam adeo non improbem conſtructionem datam, ut laudem potiùs, quippe quæ ad rem difficilem *Autori* aditum dedit; nec iis aſſentiar, qui peccatum dicunt, compoſito magis modo præſtari, quod poteſt ſimpliciore, neque enim peccatum eſt, quod perfectiſſimum non eſt: Cùm tamen mihi ſeſe obtulerit conſtructio ſatis expedita per rectificationem cur-

væ ordinariæ, hanc velut toto genere ſimpliciorem illa, quam *Vir Cl.* dedit, paucis deſignare volui. Nam ipſe curvam quamdam conſtruit, quadratura, ſeu dimenſione ejus figuræ, cujus ordinata eſt $axx : \sqrt{a^4 - x^4}$ Et hujus quadratricis tranſcendentis (quam ob uſum Elaſticam vocat) rurſus dimenſionem adhibet, ut ſolvatur problema quæſitum. Atque ita curvam a me propoſitam efficit per ſolutionem tranſcendentalem ſecundi generis. Sed cùm curva ſit ipſamet nonniſi generis primi, quia tantùm ad ejus conſtructionem requiritur quadratura figuræ, cujus ordinata eſt, $\sqrt{a^4 - x^4} : a$; ideo lineam quoque quæſivi algebraicam, cujus rectificatione quæſitum commodè præſtaretur. Quomodo autem hæ duæ quadraturæ conicis dimenſionibus reſpondeant, aliàs oſtendam. Adeſt enim peculiaris pro talibus analyſis. Sanè, ſi quadranda eſſet figura ordinatarum, $\sqrt{a^4 + x^4}$ (quæ ſigno tantùm a dicta differt) per extenſionem curvæ hyperbolicæ res præſtaretur. Sed nunc ad propriam conſtructionem problematis propoſiti progrediamur.

Tab. XVI. Fig. 59. Quæritur, qualis ſit (*in fig.* 59.) linea *Iſochrona paracentrica* 1C 2C 3C, in qua moto gravi, quod deſcendit ex altitudine H, acceſſus & receſſus reſpectu centri cujuſdam A ſeu puncti fixi, ſit æquabilis; adeoque elementa diſtantiarum ab A ſint elementis temporum proportionalia. Diſtantiæ AC repræſentent tempora t; ex 1C agatur 1C 1θ, normalis ad A 2C, erunt 1θ 2C, ut elementa temporum dt. Arcus curvæ appellentur c; elementa eorum, dc, tamquam elementa ſpatiorum, quæ grave percurrendo abſolvit. Sunt autem (ex generaliſſima motûs lege) *elementa ſpatiorum in ratione compoſita velocitatum, & temporis elementorum.* Velocitas vocetur v. Hinc $dc \overset{(1)}{\text{ut}}\ v\,dt$. Diſtantia inter horizontes punctorum H & A, ſeu HA, vocetur a. Porrò ex lege motûs gravium, velocitates ſunt in duplicata ratione altitudinum HB. Sit AB, x, & HB erit $a + x$ (nam *varietates ſignorum* pro talibus in ipſo literæ valore comprehendo, nec in calculo moror, cùm omnia eodem modo proveniant) fiet vv $\overset{(2)}{\text{ut}}$ $a + x$, & per 1 & 2, fit dc ut $dt\sqrt{a + x}$, ſeu ad implendam legem homogeneorum $dc \overset{(3)}{=} dt\sqrt{aa + ax} : a$. Jam centro A, radio ſi placet AH, deſcribatur circulus AKM, axem AB ſecans in K, & AC in M. Et Arcus KM (qui vocabitur m) repræſentet angulum converſionis rectæ AMC circa A; itaque, M 2M, ſeu dm, erit ipſius arcûs circuli ſive motûs angularis, ſeu vertiginis, elementum. Itaque fit 1C 1θ $= t\,dm : a$. Eſt autem quadr. 1C 2C æq. quadr. 2C 1θ + quadr. 1θ 1C. Ergo $dc\,dc \overset{(4)}{=} dt\,dt + tt\,dm\,dm : aa \overset{(5)}{=}$ (per æq. 3.) $dt\,dt + dt\,dt\,x : a$. Ergo

Ergo $dt : t \overset{(6)}{=} dm : \sqrt{ax}$. Ex M ad axem agatur normalis ML, & AL vocetur z, fiet $ax \overset{(7)}{=} zt$, nempe ob triangula ſimilia ALM, ABC. Et per 6 & 7 fit $dt : \sqrt{at} \overset{(8)}{=} dm : \sqrt{az}$. Jam ex proprietate tangentium circuli eſt dm ad dz $\overset{(9)}{\text{ut}}$ a ad $\sqrt{aa - zz}$, id eſt, ut AM ad ML, radius ad ſinum anguli KAM. Et ex 8 & 9 fiet $dt : \sqrt{at} \overset{(9)}{=} adz : \sqrt{a^3 z - az^3}$. Unde ſummando $2\sqrt{at} \overset{(10)}{=} aa.\int, dz : \sqrt{a^3 z - az^3} + b$: ubi b eſt quantitas *conſtans pro arbitrio aſſumta*. Id enim licet *inter ſummandum*, quoties non vetamur problematis conditionibus. Quod cùm non ſatis obſervari videam, monere hoc loco volui, quoniam intereſt ad *ſolutionum generalitatem*. Nam infinitæ ſatisfaciunt curvæ, iiſdem manentibus punctis H & A, ſed quæ variari poſſunt pro variata recta b, adeo ut curva quæſita (quantum judico) reperiri poſſit, quæ tranſeat per punctum datum. Nunc ſupereſt abſolvenda quadratura $\int, dz \sqrt{a^3 z - az^3}$, id eſt, (ſi AN ſit media proportionalis inter AL & AK) invenienda eſt area figuræ, cujus ordinata ſit ad AH ut quadratum ab AH ad rectangulum ſub AN & LM.

Hanc quadraturam ita efficiemus: In HK ſumatur LW æqualis ipſi EK diagonali quadrati ab AH vel AE, & juncta MW, ſumatur $A\beta$ in AK, ſi opus producta, quæ ſit ad AN in duplicata ratione MW ad WL ſeu EK. Et ipſis $A\beta$ ordinatim ad angulos rectos applicentur $\beta\gamma$, quæ ſint ad LM (reſpondentes) ut rectangulum NAL ad quadratum ab EK. Et per puncta γ deſcribatur linea $A\gamma$, cujus extenſione in rectum habebitur quadratura paulo antè dicta. Nempe triplum rectanguli ſub curva $A\gamma$ & recta AH, demto quintuplo dimidii rectanguli ſub AN & LM ($= \frac{1}{2}\sqrt{a^3 z - az^3}$) dabit figuræ ſuprà dictæ ab A incipiendo ſumtæ (cujus ordinatæ ſint reciprocè proportionales dictis rectangulis ſub AN & LM) aream; quam applicando ad a prodibit recta $aa.\int, dz : \sqrt{a^3 z - az^3}$. Hæc recta ſumatur cum recta conſtante b (ſignis tamen, prout caſus poſtulant, variatis) provenientis dimidium vocetur p. Ergo per æq. 10 fit $\sqrt{at} = p$ ſeu $t \overset{(11)}{=} pp : a$. Et cùm p habeatur ex z & a, habebitur ex illis & t ſeu AC. Ergo & x ſeu AB per æq. 7. Cùm ergo ex aſſumta AL ſeu z quacumque habeatur AB magnitudine, adeoque & poſitione, at AC magnitudine; habebitur AC etiam poſitione, ſeu dabitur punctum C. Nam centro A, radio AC, magnitudine dato, deſcribatur circulus, cui ex B normaliter ad AB educta occurret in puncto

C, quod eſt in curva Iſochrona paracentrica quæſita. Delineationes variabunt pro caſibus, quam in rem & *b* aſſumta variari debet. Nam quod arbitratur *Vir Clariſſimus*, non niſi unam lineam quæſitam dari ad idem punctum A, & ad eamdem altitudinem H; id rogo, ut denuo expendat: mihi enim viſum eſt infinitas haberi poſſe, ita ut aſſignari regulariter queat, quæ per datum punctum tranſeat; exceptis punctis horizontalis rectæ tranſeuntis per A. Quin & ſuprà A talis linea intelligi poteſt. Tantum verò ipſius acumini, & profundæ harum rerum notitiæ tribuo, ut quod re ritè expenſa meiſque rationibus conſideratis ſecunda meditatione ſtatuet, plurimum apud me ponderis ſit habiturum.

Interim quemadmodum *rationem* univerſalem hic aperui, *per quam ſolutiones problematum differentialium redduntur generales*; quæ neglecta, ni fallor, obſtitit, quo minùs *Vir Clariſſimus* hîc omnes lineas quæſito ſatisfacientes complecteretur: ita dabo *modum Mechanicum* quidem, ſed tamen ob univerſalitatem, & praxeos commoditatem non contemnendum, cujus ope quæcumque *lineæ quæſitæ tranſcendentes differentialiter datæ per punctum datum* (*quando id fieri poteſt*) *duci poſſunt*, idque tam exactè, quàm quis volet, licèt non ut *Geometricus* ſupra declaratus (exemplo lineæ ſinuum) per puncta vera, ſed tantùm per veris proxima incedat. Habetque hunc uſum, ut de linearum poſſibilitate, forma, & natura, multa etiam ante veram ſolutionem cognoſcere poſſimus. Quin & ad differentio-differentiales cujuſcumque gradûs applicari poteſt. Nempe, in exemplo præſente, datum ſit punctum 1 C, per quod ducenda linea Iſochrona paracentrica CC, in qua grave lapſum ex altitudine H æquabiliter recedat a centro A; quæritur punctum aliquod aliud proximum 2 C, ita ut recta 1 C 2 C ſit latus *polygoni*, *curvæ ſuccedanei*. Præter rectam A 1 M, in quam (ſi opus productam) incidit 1 C, ducatur alia, quantum ſatis vicina A 2 M, (ad eas partes, ad quas ducere volumus lineam CC) & ad A 2 M agatur ex 1 C perpendicularis 1 C 1 θ. Et in A 1 θ (ſi opus producta) ſumatur (ad eas partes, ad quas ducitur linea, 1 C 2 C) recta ipſi AH æqualis, 1 θ 1 P; unde perpendiculariter educatur 1 P 1 Q (ad eaſdem quas dixi partes) Biſecta AB in ω, centro ω, radio ω H, deſcriptus circuli arcus ſecet AE ſi opus productam in R; ſeu brevius quæratur AR media proportionalis inter AH & HB. Denique centro 1 C radio æquali ipſi AR deſcriptus arcus circuli ſecet 1 P 1 Q in 1 Q, & juncta 1 C 1 Q, ſecabit ipſam A 2 M, ſi opus productam in puncto quæſito 2 C. Eodemque modo ex puncto 2 C quæretur 3 C, & ita porrò. Et ſic habebitur polygonum 1 C 2 C 3 C &c. lineæ quæſitæ ſuccedaneum, ſeu *linea Mechanica Geometriæ vicaria*; ſimulque manifeſtè cognoſcimus, poſſibilem eſſe Geometricam per datum punctum 1 C tranſeuntem, cùm ſit *limes*, *in quem* tandem polygona continuè *advergentia evaneſcunt*. Ita ſimul & *ſeriem* quantitatum ordinariarum habemus tranſcendenti quæſitæ *advergentem*.

tem. Quæ ad tangentium converſam de cætero meditati ſumus, alio loco, Deo volente, proferemus; multa enim diverſiſſima itinera non ſine ſucceſſu exploravimus, tametſi proſequi ſatis non vacet. Pro radicibus æquationum omnino dari puto methodum generalem, neque imaginarias moramur. Itaque quod inde colligit *Vir Doctiſſimus*, hactenus probo, ne miremur, ſi in Tranſcendentibus intra pauciſſimos annos non omne præſtitum eſt, quod vellemus; quando in ipſa analyſi ordinaria, ſeu algebraica circa radices æquationum, ſeu valores incognitarum analyticos, nemo gradum quarto altiorem abſolvit, nec *Vieta*, vel *Carteſius* in eo negotio quicquam majorum inventis adjecerunt.

Poſtremò ne diſceptatiunculæ priſtinæ inter nos, circa numerum radicum oſculationis, monitorumque *Viri Clariſſimi* planè obliviſcar; Equidem quod initio ſcripſeram, cùm materiam hanc Geometris proponerem, adhuc mihi verum videtur, quando ſcilicet circulus lineam oſculatur, duos contactus, ſeu quatuor interſectiones in unum abire; adeoque adeſſe quatuor radices æquales. Interim verum quoque eſt, ſi quis modo circulum reperiat lineæ in tribus punctis coeuntibus occurrentem, habere oſculantem. Nam quartum punctum eo ipſo adeſt, etſi ejus non fiat mentio. Cujus rei ratio eſt, quòd nunquam circulus lineam ad eaſdem partes cavam ſecat in tribus punctis, quin ſimul ſecet in quarto. Si verò circulus lineam ſecet in tribus tantùm punctis, oportet in arcum lineæ in punctis interceptum, cadere punctum flexûs contrarii. Et tamen nihilominus in ipſomet puncto flexûs poſſumus pro oſculante concipere quatuor interſectionum coincidentiam, ſeu duos ab eodem latere curvæ contactus circulares, unum ante, alterum poſt punctum flexûs, ſeu unum in concava, alterum in convexa parte arcûs ex duabus partibus hujuſmodi compoſiti; qui contactus continuè convergentes tandem in ipſo flexu coibunt. Et reverâ flexus contrarii eſt punctum extremum commune, in quo duæ lineæ, una concava, altera convexa, (unam totam conſtituentes) ſe tangunt. Coincidunt ergo duo contactus, ſeu quatuor interſectiones in omni oſculo. Sed ſi de interſectionibus rectæ cum linea quæratur, tria tantùm puncta interſectionum coincidentia, vel contactum cum interſectione coëuntem, nempe in ipſo puncto flexus, non verò duos contactus, concipere licet.

N°. XLIX.

Nº. XLIX.

CHRIST. HUGENII Z.

Conſtructio univerſalis Problematis a Cl. Viro Joh. Bernoullio, menſe Majo anni 1693. in Actis Erud. propoſiti, cum additione G. G. Leibnitii.

Ex Actis Erud. Lipſ. anni 1694.

CUm in *Actis Lipſienſibus* Conſtructionem hanc me reperiſſe ſignificarem, menſe Octobri anno 1693, edenda tamen ea ſuperſedi, quòd futurum putabam, ut vel ab Autore ipſo, vel Clariſſimo Viro fratre ejus, vel alio quopiam, non multùm abſimilis brevi in lucem mitteretur; ac ſubverebar etiam, ne actum agerem. Quoniam verò nuſquam adhuc comparuit, & eſt inter eas quæ dari poſſint quodammodo ſimpliciſſima, non videtur, abſque ea diutius relinquendum tam eximium problema. Eſt autem hujuſmodi. In recta A B (*fig.* 60.) ſit datum punctum A, & oporteat invenire curvam A F C talem, ut tangens ejus quævis C D abſcindat a recta A B partem A D, quæ ad ipſam C D habeat rationem datam lineæ C ad L.

T. XVII. Fig. 60.

Conſtructio: ſicut C ad L, ita quælibet A D, in recta A B aſſumta ad E F ipſi perpendicularem: & per F punctum ponatur ducta Logarithmica quæcumque cujus aſymptotos ſit A B, ad quam illa accedat versùs A. Deinde ab A versùs E accepta diſtantia qualibet A D, ſit ut C ad L, ſive ut A E ad E B, ita A B ad aliam D H; qua tamquam radio, centroque D, deſcribatur Circuli circumferentia H C; ac præterea applicatur ad Logarithmicam recta I G aſymptoto perpendicularis, ipſique D H æqualis. Jam ſicut L ad duplum C, ita fiat I E ad E K, ſumendam in aſymptoto in partem alterutram, nihil enim refert, & applicetur rurſus ad Logarithmicam recta K L. Utque duæ ſimul K L, E F ad earum differentiam, ita ſit D H ad D B; quæ ſumenda verſus A punctum, ſi A D major ſit quàm A E; at in contrariam, ſi minor. Denique erigatur ad aſymptoton perpendicularis B C; ea ſecabit circumferentiam H C in puncto C, quod erit in curva quæſita A F C. Tangit autem hanc recta E F in F.

Porrò

Porrò animadverſione dignum eſt, non ſimplicem eſſe curvaturam lineæ hujus cùm C major eſt quàm L, ſed ex duabus eam tunc componi, ex uno quodam puncto exeuntibus, ut CFA, CM; quarum hæc in infinitum progreditur. In puncto autem extremo C, recta ex A educta occurrit curvæ utrique ad angulos rectos, ac proportionales ſunt DA, DC, DB.

EXCERPTA EX EPISTOLA C. HUGENII Z.

ad G. G. *Leibnitium*.

PRincipium quo uſus eſt *Clariſſimus Matheſeos Profeſſor Bernoullius* verum puto, & bene adhibitum, quòd radii qui curvedinem metiuntur, ſint in ratione contraria virium rem elaſticam flectentium. Puto tamen, non tantùm ſuperficiem externam extendi, ſed & internam contrahi. Magnum admodum poſtulatum eſt, figurarum curvilinearum quadraturas tamquam datas aſſumere. Ego me nihil admodum egiſſe putarem, ſi problema aliquod huc tantùm reduxiſſem, exceptâ tamen Circuli, & Hyperbolæ Quadraturâ. Præſtat Linearum Curvarum Rectificationes tamquam ſemper in poteſtate exiſtentes aſſumere, quod etiam tibi probari video.

De reliquo *Clariſſimus Bernoullius* videtur mihi tantùm (*fig.* 61.) determinaſſe figuram, ubi tangentes extremitatum ſunt parallelæ, cùm arcus Elaſtici A termini per chordam EF junguntur. Sed ſi arcus ſit ut in B vel C vel D, aut extremitates non chorda ſed recta rigida HI jungantur, figuræ determinandæ ſuperſunt. Subtile etiam fatebor inventum conſenſûs inter figuram elaſticam, & lintei, vel veli a liquoris pondere preſſi, ſi modò demonſtratum videam. Alioqui cogor ſuſtinere aſſenſum, quia & ipſum Autorem circa figuram veli ſententiam mutaſſe video, & demonſtrare poſſum, velum ex numero finito rectarum æqualium compoſitum (*ut in fig.* 62.) aliam a vento quàm a pondere figuram accepturum, cùm tamen *Bernoulliana* ſententia ſit, eamdem eſſe velariam cum catenaria: Oporteret ergo diſcrimen evaneſcere in caſu infiniti. Præſtat haud dubiè Iſochronam tuam Paracentricam conſtrui, ut a te fieri ſcribis, rectificatione lineæ ordinariæ, vel ſaltem talis, cujus puncta poſſint conſtrui, quàm per lineæ Elaſticæ extenſionem, quæ ipſamet nondum eſt constructa. Ta. XVII. Fig. 61. Fig. 62.

Quod ait *Clariſſimus Bernoullius* unicam tantùm eſſe paracentricam ut Axω (*fig.* 63.) reſpectu ejuſdem puncti, vel centri A, poſt deſcenſum ex TA, ejus contrarium manifeſtè video, tibique aſſentior dari infinitas, ut Aβz, Aδγ, &c. eaſque ſumo uſque ad rectam Aη incluſivè. Quin imò ſuperſunt adhuc aliæ Curvæ determinandæ, ſi ſcilicet æqualiter acceden- Fig. 63.

Fig. 64. dum ſit ad punctum C, linea autem incipiat vel ab A, directè ſupra C, vel ad latus a D. Quo caſu lineæ ut ABC, AEC infinitos facient gyros circa C.

G. G. LEIBNITII ADDITIO.

PUto in *fig.* 61. ex *Bernoulliana* determinatione arcûs A (*fig.* 60.) etiam duci poſſe determinationem arcuum B, C, D, G, aſſumendo lineæ partem, aut eam producendo, ſed hoc tamen diſtinctè admoneri operæ pretium fuit. Rationi conſentaneum eſt principium determinandæ figuræ Elaſticæ, quòd vires flectentes ſint curvedinibus proportionales; poteſtque ad Hypotheſeos aptæ modum aſſumi, tametſi non prorſus ſit exploratum, quouſque natura eo utatur, cùm fingi poſſint conſtitutiones corporum, ubi res aliter procedat. Præclara ſunt monita de diverſis Iſochronarum paracentricarum ſpeciebus, & conſtitutionibus; omnes tamen mea conſtructione comprehenduntur. Et licet ipſam lineam rectam AD viſus ſim excludere, quia in ea nullus reverâ fit deſcenſus, vel aſcenſus; quia tamen concipi poteſt in ea deſcenſus, vel aſcenſus, ut infinitè parvus ſeu evaneſcens, haberi poteſt pro limite, ſeu ultima harum linearum. Problemata curvarum tranſcendentium ad quadraturas reducere magna quidem ad ſolutionem præparatio eſt; fateor tamen (ſepoſitâ meâ generali conſtructione tractoriâ) præſtare rem reduci ad linearum jam conſtructarum reductiones; quod & ego quoties opus, feci, faciamque.

N°. L.

SPECIMEN DYNAMICUM,

Pro admirandis Naturæ legibus circa Corporum vires, & mutuas actiones detegendis, & ad ſuas cauſas revocandis. Autore G. G. Leibnitio.

Ex Actis Erudit. Lipſ. ann. 1695.

EX quo *Novæ Scientiæ Dynamicæ* condendæ mentionem injecimus, multi Viri egregii variis in locis uberiorem hujus doctrinæ explicationem poſtularunt. Quando igitur librum componere nondum vacat, dabimus hoc loco, quæ lucem aliquam accendere poſſint, fortaſsè etiam ad nos cum fœnore redituram, ſi quidem ſententias eorum eliciamus, qui vim cogitandi cum eloquendi humanitate conjunxerint, quorum judicia etiam grata nobis fore profitemur, & ad profectionem operis profutura ſperamus. In rebus corporeis eſſe aliquid præter extenſionem, imò extenſione priùs, alibi admonuimus, nempe ipſam vim naturæ ubique ab Autore inditam, quæ non in ſimplici facultate conſiſtit, qua ſcholæ contentæ fuiſſe videntur, ſed præterea conatu, ſive niſu inſtruitur, effectum plenum habituro, niſi contrario conatu impediatur. Hic niſus paſſim ſenſibus occurrit, & meo judicio ubique in materia ratione intelligitur, etiam ubi ſenſui non patet. Quod ſi jam Deo per miraculum tranſcribi non debet, certè oportet, ut vis illa in ipſis corporibus ab ipſo producatur, imò ut intimam corporum naturam conſtituat, quando agere eſt character ſubſtantiarum, extenſioque nil aliud, quàm jam præſuppoſitæ nitentis, renitentiſque, id eſt reſiſtentis ſubſtantiæ continuationem, ſive diffuſionem, dicit; tantum abeſt, ut ipſammet ſubſtantiam facere poſſit. Nec refert, quòd omnis corporea actio a motu eſt, motuſque ipſe non eſt niſi a motu ſive in corpore jam antè exiſtente ſive aliunde impreſſo. Nam motus (perinde ac tempus) nunquam exiſtit, ſi rem ad ἀκρίβειαν revoces, quia nunquam totus exiſtit, quando partes coexiſtentes non habet. Nihilque adeo in ipſo reale eſt, quàm momentaneum illud, quod in vi ad mutationem nitente conſtitui debet. Huc igitur redit quicquid eſt in natura corporea præter Geometriæ objectum, ſeu extenſionem. Eaque demum ratione

 ſimul

ſimul & veritati, & doctrinæ veterum conſulitur. Et quemadmodum jam *Democriti* corpuſcula, & *Platonis* ideas, & Stoicorum in optimo rerum nexu tranquillitatem, noſtra ætas a contemtu abſolvit; ita nunc Peripateticorum tradita de Formis, ſive Entelechiis (quæ meritò ænigmatica viſa ſunt, vixque ipſis Autoribus rectè percepta) ad notiones intelligibiles revocabuntur; ut adeo receptam a tot ſeculis Philoſophiam explicare potiùs, ita ut conſtare ſibi poſſit, (ubi hoc patitur) atque illuſtrare porrò, noviſque veritatibus augere, quàm abolere neceſſarium putemus.

Atque hæc ſtudiorum ratio mihi & prudentiæ docentis, & utilitati diſcentium maximè accommodata videtur, ne deſtruendi, quàm ædificandi cupidiores videamur, neve inter perpetuas doctrinæ mutationes, audacium ingeniorum flatibus quotidie incerti jactemur; ſed tandem aliquando humanum genus, refrenata ſectarum libidine, (quam inanis novandi gloria ſtimulat) conſtitutis certis dogmatibus, inoffenſo pede non in Philoſophia minùs quàm in Matheſi ad ulteriora progrediatur. Cùm in ſcriptis præſtantium Virorum veterum, & recentiorum (ſi ea ferè adimas, quibus in alios duriùs dicunt) plurimum eſſe ſoleat veri, & boni; quod erui, & in publicos theſauros digeri meretur. Idque utinam facere mallent homines, quàm cenſuris tempus prodigere, quibus tantùm vanitati ſuæ litant. Nobis certè, quibus in novis, & noſtris quibuſdam ita favit fortuna, ut de his ſolis cogitare non paſſim juberent amici, neſcio quomodo tamen pleraque etiam aliena non diſplicent, & ſuo quodque pretio, etſi diverſo, cenſetur; cujus rei fortaſsè cauſa eſt, quòd plura agitando nihil ſpernere didicimus. Sed nunc in viam redeamus.

Duplex autem eſt *vis Activa* (quam cum nonnullis non malè *Virtutem* appelles) nempe aut *primitiva*, quæ in omni ſubſtantia corporea per ſe ineſt, (cùm corpus omnimodè quieſcens a rerum natura abhorrere arbitrer) aut *derivativa*, quæ primitivæ velut limitatione, per corporum inter ſe conflictus reſultans, variè exercetur. Et primitiva quidem (quæ nihil aliud eſt, quàm ἐντελέχεια ἡ πρώτη) *animæ vel formæ ſubſtantiali* reſpondet; ſed vel ideo non niſi ad generales cauſas pertinet, quæ phænomenis explicandis ſufficere non poſſunt. Itaque illis aſſentimur, qui formas in rerum ſenſibilium cauſis propriis, ſpecialibuſque tradendis adhibendas negant: quod monere operæ pretium eſt, ne, dum eas velut poſtliminio ad fontes rerum aperiendos reducimus, ſimul ad vulgaris ſcholæ battologias redire velle videamur. Interim neceſſaria earum notitia eſt ad rectè philoſophandum, nec quiſquam ſe corporis naturam tenere ſatis putet, niſi animum talibus adverterit; intellexeritque imperfectam, ne dicam falſam, eſſe notionem illam ſubſtantiæ corporeæ craſſam, & ab imaginatione ſola pendentem, ac philoſophiæ corpuſcularis (per ſe egregiæ, veriſſimæque) abuſu ab aliquot annis incautè introductam. Quemadmodum vel hoc argumento conſtat, quod omnimodam ceſſationem, ac quietem

a materia non excludit, nec legum naturæ vim derivativam moderantium, rationes afferre poteſt. Similiter vis quoque paſſiva duplex eſt, vel primitiva, vel derivativa. Et quidem *vis primitiva patiendi* ſeu *reſiſtendi* id ipſum conſtituit, quod *materia prima*, ſi rectè interpreteris, in ſcholis appellatur, qua ſcilicet fit, ut corpus a corpore non penetretur, ſed eidem obſtaculum faciat, & ſimul ignavia quadam, ut ſic dicam, id eſt ad motum repugnatione ſit præditum, neque adeo niſi fracta nonnihil vi agentis impelli ſe patiatur. Unde poſtea *vis derivativa patiendi* variè in *materia ſecunda* ſeſe oſtendit. Sed noſtrum eſt generalibus illis, ac primitivis ſepoſitis, ſuppoſitiſque, quibus ob formam corpus omne ſemper agere, & ob materiam corpus omne ſemper pati, ac reſiſtere docemur, nunc quidem pergere ulterius, & in hac doctrina de *virtutibus & reſiſtentiis derivativis* tractare, quatenus variis niſibus pollent corpora, aut rurſus variè renituntur; his enim accommodantur leges actionum, quæ non ratione tantùm intelliguntur, ſed & ſenſu ipſo per phænomena comprobantur.

Vim ergo derivativam, qua ſcilicet corpora actu in ſe invicem agunt, aut a ſe invicem patiuntur, hoc loco non aliam intelligimus, quàm quæ motui (locali ſcilicet) cohæret, & viciſſim ad motum localem porrò producendum tendit. Nam per motum localem cætera phænomena materialia explicari poſſe agnoſcimus. Motus eſt continua loci mutatio, itaque tempore indiget. Mobile tamen in motu exiſtens, ut in tempore habet motum, ita in quovis momento habet *velocitatem*, quæ tanto major eſt, quanto plus ſpatii percurritur, minuſque impenditur tempus. Velocitas ſumta cum directione *Conatus* appellatur; *Impetus* autem eſt factum ex mole corporis in velocitatem, ejuſque adeo quantitas eſt, quod *Carteſiani* appellare ſolent quantitatem motûs; ſcilicet momentaneam, tametſi accuratiùs loquendo ipſius motûs, quippe in tempore exiſtentis, quantitas ex aggregato impetuum durante tempore in mobili exiſtentium (æqualium, inæqualiumve) in tempus ordinatim ductorum, naſcatur. Nos tamen cum ipſis diſputantes, ipſorum loquendi morem ſecuti ſumus. Quin etiam quemadmodum (non incommodè ad uſum loquendi doctrinalem) ab acceſſu jam facto faciendove diſtinguere poſſumus acceſſionem quæ nunc fit; tamquam incrementum acceſsûs, vel elementum; aut quemadmodum deſcenſionem præſentem a facto jam deſcenſu, quem auget, diſtinguere licet; ita poſſemus præſentaneum, ſeu inſtantaneum motûs elementum ab ipſo motu per temporis tractum diffuſo diſcernere, & appellare Motionem; atque ita *quantitas motionis* dicetur, quæ vulgo motui tribuitur. Et quamquam in verbis faciles ſimus poſt interpretationem habitam, antea tamen nos in iis curioſos eſſe oportet, ne ambiguitate decipiamur.

Porrò ut æſtimatio motûs per temporis tractum fit ex infinitis impetibus, ita viciſſim impetus ipſe, (etſi res momentanea) fit ex infinitis gra-

dibus ſucceſſivè eidem mobili impreſſis; habetque elementum quoddam, quo non niſi infinities replicato naſci poteſt. Finge tubum A C in plano horizontali hujus paginæ certa quadam uniformi celeritate rotari circa centrum C immotum, & globum B in tubi cavitate exiſtentem liberari vinculo, vel impedimento, atque incipere moveri vi centrifugâ; manifeſtum eſt, initio conatum a centro recedendi, quo ſcilicet globus B in tubo tendet versùs ejus extremitatem A, eſſe infinitè parvum, reſpectu impetûs quem jam tum habet a rotatione, ſeu quo cum tubo ipſo globus B, a loco D tendit versùs (D) retenta a centro diſtantia. Sed continuata aliquamdiu impreſſione centrifuga a rotatione procedente, progreſſu ipſo oportet naſci in globo impetum quemdam centrifugum, completum (D) (B) comparabilem cum impetu rationis D (D). Hinc patet duplicem eſſe *Niſum*, nempe elementarem, ſeu infinitè parvum, quem & *ſollicitationem* appello, & formatum continuatione, ſeu repetitione Niſuum elementarium, id eſt impetum ipſum. Quamquam non ideo velim hæc Entia Mathematica reapſe ſic reperiri in natura, ſed tantùm ad accuratas æſtimationes abſtractione animi faciendas prodeſſe.

Hinc *Vis* quoque duplex: alia elementaris, quam & *mortuam* appello, quia in ea nondum exiſtit motus, ſed tantùm ſollicitatio ad motum, qualis eſt globi in tubo, aut lapidis in funda, etiam dum adhuc vinculo tenetur; alia verò vis ordinaria eſt, cum motu actuali conjuncta, quam voco *vivam*. Et vis mortuæ quidem exemplum eſt ipſa vis centrifuga, itemque vis gravitatis, ſeu centripeta; vis etiam qua Elaſtrum tenſum ſe reſtituere incipit. Sed in percuſſione, quæ naſcitur a gravi jam aliquamdiu cadente, aut ab arcu ſe aliquamdiu reſtituente, aut a ſimili cauſa vis eſt viva, ex infinitis vis mortuæ impreſſionibus continuatis nata. Et hoc eſt quod *Galilæus* voluit, cùm ænigmatica loquendi ratione percuſſionis vim infinitam dixit, ſcilicet, ſi cum ſimplice gravitatis niſu comparetur. Etſi autem impetus cum vi viva ſemper ſit conjunctus, differre tamen hæc duo, infra oſtendetur.

Vis viva in aliquo corporum aggregato rurſus duplex intelligi poteſt, *totalis* ſcilicet, vel partialis; & *partialis* iterum vel reſpectiva vel directiva, id eſt vel propria partibus, vel communis. *Reſpectiva* ſive *propria* eſt, qua corpora aggregato comprehenſa poſſunt agere in ſe invicem; *directiva* ſeu *communis* eſt, qua præterea ipſum aggregatum extra ſe agere poteſt. Voco autem directivam, quia directionis totalis vis integra in hac vi partiali conſervatur. Ea autem ſola ſupereſſet, ſi ſubitò aggregatum congelaſcere fingeretur motu partium inter ſe intercepto. Unde ex vi reſpectiva, & directiva ſimul ſumtis componitur *vis totalis abſoluta*. Sed hæc meliùs ex tradendis infra regulis intelligentur.

Veteres, quantum conſtat, ſolius vis mortuæ ſcientiam habuerunt, eaque eſt, quæ vulgo dicitur Mechanica, agens de vecte, trochlea, plano inclinato

inclinato (quo cuneus, & cochlea pertinent) æquilibrio liquorum, & ſimilibus; ubi nonniſi de conatu primo corporum in ſe invicem tractatur, antequam impetum agendo conceperunt. Et licèt leges vis mortuæ ad vivam transferri aliquo modo poſſint, magna tamen cautione opus eſt; ut vel hinc decepti ſint, qui vim in univerſum, cum quantitate ex ductu molis in velocitatem facta, confuderunt, quod vim mortuam in ratione horum compoſita eſſe deprehendiſſent. Nam ea res ibi ſpeciali ratione contingit, ut jam olim admonuimus, quoniam (exempli gratiâ) gravibus diverſis deſcendentibus, in ipſo initio motûs, utique ipſi deſcenſus, ſeu ipſæ quantitates ſpatiorum deſcenſu percurſorum, nempe adhuc infinitè parvæ, ſeu elementares, ſunt celeritatibus, ſeu conatibus deſcendendi proportionales. Sed progreſſu facto, & vi vivâ natâ, celeritates acquiſitæ non ampliùs proportionales ſunt ſpatiis deſcenſu jam percurſis, quibus tamen vim æſtimandam olim oſtendimus, ampliuſque oſtendemus, ſed tantùm earum elementis. *Galilæus* de vi viva (alio licet nomine, imò conceptu) agere cœpit, primuſque explicuit, quomodo acceleratione gravium deſcendentium motus naſcatur. *Carteſius* rectè diſcrevit velocitatem a directione, & vidit etiam in conflictu corporum id ſequi, quo minimè mutantur priora. Sed minimam mutationem non rectè æſtimavit, dum ſolam directionem, vel ſolam velocitatem mutat; cùm contemperata ex ambobus inſtituenda eſſet mutatio: quod quomodo fieri deberet, ipſum fugit; quia res tam heterogeneæ comparari, ac contemperari poſſe, ipſi, modalibus potiùs tunc, quàm realibus intento, non videbantur; ut alios ejus in hac doctrina lapſus taceamus.

Honoratus Fabri, *Marcus Marci*, *Joh. Alph. Borellus*, *Ignatius Baptiſta Pardies*, & *Claudius De Chales*, aliique acutiſſimi viri in doctrina de motu non contemnenda dedere, ſed errores tamen eoſque capitales non vitavere. Primus, quod ſciam, *Hugenius* qui ætatem noſtram præclaris inventis illuſtravit, in hoc quoque argumento ad puram, & liquidam veritatem perveniſſe mihi videtur, & doctrinam hanc a paralogiſmis liberaſſe, regulis quibuſdam olim publicatis. Eaſdem ferè regulas *Wrennus* quoque, *Walliſius*, & *Mariottus*, viri in his ſtudiis diverſa licet ratione excellentes, obtinuere. Sed de cauſis tamen non eadem ſententia eſt; unde neque eaſdem concluſiones egregii in his ſtudiis viri ſemper admittunt. Atque adeo veri fontes hujus ſcientiæ, nondum, quod conſtat, fuere recluſi. Nec ſanè ab omnibus agnoſcitur, quod mihi certum videtur: repercuſſionem, ſive reflexionem non niſi a vi elaſtica, id eſt interni motus reniſu proficiſci. Nec notionem ipſam virium quiſquam ante nos explicavit; quæ res hactenus turbavit *Carteſianos*, alioſque, qui motus, vel impetus ſummam (quam pro virium quantitate habent) poſt concurſum a priore diverſam prodire poſſe, vel ideo capere non potuerunt, quod eo ipſo etiam virium quantitatem mutari crediderunt.

Mihi

Mihi adhuc juveni, & corporis naturam cum *Democrito*, & hujus ea in re ſectatoribus *Gaſſendo*, & *Carteſio*, in ſola maſſa inerte tunc conſtituenti, excidit libellus *Hypotheſeos phyſicæ* titulo, quo Theoriam motus pariter a ſyſtemate abſtractam, & ſyſtemati concretam expoſui: quem ultra mediocritatis ſuæ meritum, multis præclaris viris video placuiſſe. Ibi ſtatui, ſuppoſita tali corporis notione, omne incurrens ſuum conatum dare excipienti, ſeu directè obſtanti, qua tali. Nam cùm in momento incurſus pergere conetur, adeoque ſecum abripere excipiens; conatuſque ille (ob corporis ad motum, quietemve creditam mihi tunc indifferentiam) ſuum effectum omnino habere debeat in excipiente, niſi contrario conatu impediatur; imò etiamſi eo impediatur; quando tantùm diverſos illos conatus inter ſe componi oportet: manifeſtum erat, nullam cauſam reddi poſſe, cur non incurrens effectum, ad quem tendit, conſequatur, ſeu cur non excipiens recipiat conatum omnem incurrentis; adeoque motum excipientis ex priſtino ſuo, & recepto novo, ſeu alieno conatu compoſitum eſſe. Ex quo porrò oſtendebam: ſi ſolæ mathematicæ notiones, magnitudo, figura, locus, horumque mutatio, aut in ipſo concursûs momento mutandi conatus, in corpore intelligerentur; nulla habita ratione notionum metaphyſicarum, potentiæ ſcilicet actricis in forma, & ignaviæ, ſeu ad motum reſiſtentiæ in materia; atque adeo ſi neceſſe eſſet concurſus eventum ſola compoſitione conatuum Geometrica, ut explicuimus, determinari: tunc ſequi debere, ut incurrentis, etiam minimi, conatus toti excipienti, licet maximo, imprimatur; atque adeo maximum quieſcens a quantulocumque incurrente ſine ulla hujus retardatione abripiatur: quandoquidem tali materiæ notione ulla ejus ad motum repugnatio, ſed indifferentia potiùs continetur. Unde non magis difficile foret impellere magnum quieſcens, quàm parvum, eſſetque adeo actio ſine reactione, nullaque fieri poſſet potentiæ æſtimatio, cùm quidvis a quovis præſtari poſſet. Quæ, aliaque id genus multa, cùm ſint ordini rerum adverſa, & cum principiis veræ Metaphyſicæ pugnent; ideò tunc quidem putavi (& verè quidem) ſapientiſſimum rerum Autorem ſtructura ſyſtematis vitaſſe, quæ per ſe ex nudis motûs legibus a pura Geometria repetitis conſequerentur.

Sed poſtea omnia altiùs ſcrutatus, vidi in quo conſiſteret ſyſtematica rerum explicatio, animadvertique hypotheſin illam priorem notionis corporeæ, non eſſe completam; & cum aliis argumentis, tum etiam hoc ipſo comprobari, quòd in corpore præter magnitudinem, & impenetrabilitatem poni debeat aliquid, unde virium conſideratio oriatur; cujus leges metaphyſicas extenſionis legibus addendo, naſcantur eæ ipſæ regulæ motûs, quas ſyſtematicas appellaram; nempe ut omnis mutatio fiat per gradus, & omnis actio ſit cum reactione, & nova vis non prodeat ſine detrimento prioris, adeoque ſemper abripiens retardetur ab abrepto, nec plus,

plus, minuſve potentiæ in effectu quàm in cauſa contineatur. Quæ lex cùm non derivetur ex notione molis, neceſſe eſt conſequi eam ex alia re, quæ corporibus inſit, nempe ex ipſa vi, quæ ſcilicet eamdem ſemper quantitatem ſui tuetur, licet a diverſis corporibus exerceatur. Hinc igitur, præter purè mathematica, & imaginationi ſubjecta, collegi quædam metaphyſica, ſolaque mente perceptibilia, eſſe admittenda, & maſſæ materiali principium quoddam ſuperius, & ut ſic dicam formale, addendum; quandoquidem omnes veritates rerum corporearum ex ſolis axiomatibus logiſticis & geometricis, nempe de magno & parvo, toto & parte, figura & ſitu, colligi non poſſint; ſed alia de cauſa & effectu, actioneque & paſſione, accedere debeant, quibus ordinis rerum rationes ſalventur. Id principium Formam, an ἐντελέχειαν, an Vim appellemus, non refert, modò meminerimus per ſolam virium notionem intelligibiliter explicari.

Quòd verò hodie egregii quidam viri, hoc ipſum videntes, vulgarem nempe materiæ notionem non ſufficere, Deum accerſunt ἀπὸ μηχανῆς, vimque omnem agendi auferunt rebus, quaſi Moſaica quadam Philoſophia (ut *Fluddus* olim vocabat) aſſentiri non poſſum. Tametſi enim præclarè ab ipſis animadverſum concedam, ſubſtantiæ unius creatæ in aliam influxum proprium nullum eſſe, ſi res ad metaphyſicum rigorem exigatur; fatearque etiam libenter omnes res continua ſemper creatione a Deo proficiſci; nullam tamen veritatem naturalem in rebus eſſe puto, cujus ratio immediatè petenda ſit ex divina actione, vel voluntate, ſed ſemper rebus ipſis aliqua a Deo eſſe indita, unde omnia earum prædicata explicentur. Certè non corpora tantùm Deum creaſſe conſtat, ſed & animas, quibus entelecheiæ primitivæ reſpondent. Verùm hæc aliàs ſuis propriis rationibus profundiùs eductis demonſtrabuntur.

Interim etſi principium activum materialibus notionibus ſuperius, & ut ſic dicam vitale, ubique in corporibus admittam; non ideo tamen *Henrico Moro*, aliiſque viris pietate & ingenio inſignibus hìc aſſentior, qui Archæo neſcio quo, aut hylarchico principio etiam ad phænomena procuranda ſic utuntur; quaſi ſcilicet non omnia mechanicè explicari poſſint in natura, & quaſi qui hoc conentur, incorporea tollere videantur, non ſine ſuſpicione impietatis; aut quaſi cum *Ariſtotele* Intelligentias orbibus rotandis affigere neceſſe ſit, aut elementa dicendum ſit ſurſum vel deorſum a forma ſua agi; compendioſâ, ſed inutili docendi ratione: His, inquam, non aſſentior, nec magis iſta mihi Philoſophia, quàm illa quorumdam placuit Theologia, qui Jovem tonare, aut ningere ſic credebant, ut cauſarum propiorum inquiſitores etiam Atheiſmi crimine infamarent. Optimum meo judicio temperamentum eſt, quo pietati pariter, & ſcientiæ ſatisfit, ut omnia quidem phænomena corporea a cauſis efficientibus mechanicis peti poſſe agnoſcamus; ſed ipſas leges mechanicas in univerſum a ſuperioribus rationibus derivari intelligamus; atque ita cauſa efficiente

altiore tantùm in generalibus, & remotis conſtituendis utamur. His verò ſemel ſtabilitis, quoties poſtea de rerum naturalium cauſis efficientibus propinquis, & ſpecialibus tractatur, animabus, aut Entelecheiis locum non demus, non magis quàm otioſis facultatibus, aut inexplicabilibus ſympathiis. Cùm nec ipſa cauſa efficiens prima, atque univerſaliſſima ſpecialibus tractationibus intervenire debeat, niſi quatenus fines ſpectantur, quos divina Sapientia habuit in rebus ſic ordinandis, ne quam laudis ejus, & hymnorum pulcherrimorum canendorum occaſionem negligamus.

Sanè & finales cauſæ (ut ſingulari planè exemplo optici principii, celeberrimo *Molineuſio* in Dioptricis ſuis valdè probante, oſtendi) ſubinde magno cum fructu etiam in phyſicis ſpecialibus adhibentur, non tantùm ut ſupremi Autoris pulcherrima opera magis admiremur, ſed etiam ut divinemus interdum hac via, quæ per illam efficientium non æquè, aut non niſi hypotheticè patent. Quem uſum hactenus fortaſſe Philoſophi nondum ſatis obſervarunt. Et in univerſum tenendum eſt, omnia in rebus dupliciter explicari poſſe: per *regnum potentiæ*, ſeu cauſas *efficientes*, & per *regnum ſapientiæ* ſeu per *finales*; Deum corpora ut machinas more architecti ſecundùm *leges magnitudinis*, vel *mathematicas*, & quidem in uſum animarum; animas verò, ſapientiæ capaces, ut cives ſuos, & ſocietatis cujuſdam cum ipſo participes, more Principis, imò patris ſecundùm *leges bonitatis* vel *morales* ad ſuam gloriam moderante; permeantibus ſeſe ubique ambobus regnis, inconfuſis tamen, & imperturbatis legibus utriuſque; ita ut ſimul & regno potentiæ maximum, & regno ſapientiæ optimum obtineatur. Sed nobis hoc loco regulas generales virium effectricium conſtituere propoſitum eſt, quibus in cauſis ſpecialibus efficientibus explicandis uti deinde poſſimus.

Porrò ad veram virium æſtimationem, & quidem prorſus eamdem, diverſiſſimis itineribus perveni: uno quidem a priori, ex ſimpliciſſima conſideratione ſpatii, temporis & actionis (quod aliàs exponam) altero a poſteriori, vim ſcilicet æſtimando ab effectu quem producit ſe conſumendo. Nam *effectum* hic intelligo non quemlibet, ſed cui vis impendi, ſeu in quo conſumi debet, quem ideo *violentum* appellare poſſis, qualis non eſt ille, quem corpus grave in plano perfectè horizontali procurrendo exercet, quia tali effectu utcumque producto eamdem ſemper vim retinet; quamquam & hoc ipſo *effectu*, ut ita dicam, *innocuo* rectè adhibito, hanc noſtram æſtimandi rationem conſecuti ſimus; ſed nunc a nobis reponetur. Elegi autem effectum ex violentis illum, qui maximè capax eſt homogenei, ſeu diviſionis in partes ſimiles & æquales, qualis eſt in aſcenſu corporis gravitate præditi: nam elevatio gravis ad duos, vel tres pedes, præcisè dupla, vel tripla eſt elevationis gravis ejuſdem ad pedem unum; & elevatio gravis dupli ad pedem unum facta, præcisè dupla eſt elevationis gravis ſimpli ad altitudinem pedis unius; unde elevatio gravis dupli

ad

ad tres pedes præcisè ſextupla eſt elevationis gravis ſimpli ad pedem unum. Suppoſito ſcilicet (ſaltem docendi causâ, etſi aliter fortaſſe in veritate ſe res habeat, ſed inſenſibili tamen hic errore) gravia æquè gravitare in majore aut minore ab horizonte diſtantia. Nam in elaſtro non æquè facilè locum homogeneitas habet. Cùm igitur comparare vellem corpora diverſa, aut diverſis celeritatibus prædita, equidem facilè vidi, ſi corpus A ſit ſimplum, & B ſit duplum, utriuſque autem celeritas æqualis; illius quoque vim eſſe ſimplam, hujus duplam, cùm præcisè quicquid in illo ponitur ſemel, in hoc ponatur bis. Nam in B eſt bis corpus ipſi A æquale & æquivelox, nec quicquam ultra. Sed ſi corpora A & B ſint æqualia, celeritas autem in A ſit ſimpla, & in C dupla, videbam, non præcisè quod in A eſt, duplari in C, cùm dupletur quidem celeritas, non tamen & corpus. Et peccatum hic fuiſſe vidi ab iis, qui ſola iſta reduplicatione modalitatis vim ipſam duplicari credidere; quemadmodum jam olim obſervavi, admonuique, veram, neque hactenus (poſt tot licet *Elementa Matheſeos univerſalis* ſcripta) traditam *æſtimandi artem* in eo conſiſtere, ut denique ad homogeneum aliquid, id eſt accuratam & omnimodam non modorum tantùm, ſed & rerum reduplicationem perveniatur. Cujus methodi non aliud melius illuſtriuſque ſpecimen dari potuit, quàm quod exhibetur in hoc ipſo argumento.

Hæc ergo ut obtinerem, conſideravi an duo iſta corpora A & C magnitudine æqualia, ſed celeritate diverſa, effectus aliquos producere poſſint cauſis ſuis æquipollentes, & inter ſe homogeneos. Ita enim quæ per ſe non facilè poterant, ſaltem per effectus ſuos accuratè compararentur. Effectum autem cauſæ ſuæ æqualem eſſe debere ſumſi, ſi totius virtutis impendio, ſeu conſumtione producatur: ubi non refert, quanto tempore producatur. Ponantur ergo corpora A & C eſſe gravia, & vim ſuam convertere in aſcenſum, quod fiet, ſi eo momento quo celeritates ſuas dictas habent, A ſimplam, B duplam in extremis pendulorum verticalium P, A, E, C exiſtere intelligantur. Conſtat autem e *Galilæi* aliorumque demonſtratis, corpore A celeritate ut 1 ad ſummum aſcendente ſuper horizontem H R ad altitudinem 2 A. H, pedis unius; utique corpus C, celeritate ut 2, aſcendere (ad ſummum) poſſe ad altitudinem 2 C. R, pedum quatuor. Unde jam conſequens eſt, grave habens celeritatem ut 2, potentia quadruplum eſſe habentis gradum celeritatis ut 1. Cùm totius ſuæ virtutis impendio præcisè quadruplum efficere poſſit. Nam libram (id eſt ſe ipſum) attollens ad pedes quatuor, præcisè quater attollit unam libram ad unum pedem. Eodemque modo generaliter colligitur, vires æqualium corporum eſſe ut quadrata celeritatum, & proinde vires corporum in univerſum eſſe in ratione compoſita ex corporum ſimplice, & celeritatum duplicata.

Eadem confirmavi, ad abſurdum (nempe ad motum perpetuum) redigendo

gendo contrariam ſententiam, vulgo, præſertim apud *Carteſianos* receptam, qua vires creduntur eſſe in ratione compoſita corporum, & celeritatum: qua etiam methodo uſus ſum ſubinde, ut duos *ſtatus* virtute *inæquales* definirem a poſteriori, & majorem ſimul a minori certa nota diſtinguerem. Nec cùm alterutrum alteri ſubſtituendo motus oritur perpetuus mechanicus, ſeu effectus potior cauſa, ſtatus illi ſibi minimè æquipollent, ſed ille qui ſubſtitutus eſt alteri, potior fuit, quia majus aliquid præſtari effecit. Pro certo autem aſſumo, naturam nunquam ſibi viribus inæqualia ſubſtituere, ſed effectum integrum ſemper cauſæ plenæ æqualem eſſe; & viciſſim quæ viribus æqualia ſunt, tuto ratiocinio ſibi ſubſtitui a nobis poſſe, liberrima ſuppoſitione, quaſi ſubſtitutionem illam actu effeciſſemus, nulloque adeo perpetui motûs mechanici metu. Quod ſi ergo verum eſſet, quod vulgo ſibi perſuadent, æquipollere inter ſe grave A, ut 2 (ſic enim nunc ſumamus) præditum celeritate ut 1, & grave C ut 1, præditum celeritate ut 2; debet alterutrum alteri impunè ſubſtitui poſſe. Sed hoc verum non eſt. Nam ponamus A ut 2 celeritatem ut 1 acquiſiviſſe deſcenſu 2 A 1 A, ex altitudine 2 A. H unius pedis; jamque ipſo in 1 A ſeu in horizonte exiſtente, ſubſtituamus pro ipſo æquipollens (ut volunt) pondus C ut 1, celeritate ut 2 quod aſcendat uſque ad C, ſeu ad altitudinem 4 pedum. Itaque ſolo deſcenſu ponderis A duarum librarum, ex altitudine unius pedis 2 A. H, ſubſtitutoque æquipollente, effecimus aſcenſum libræ unius ad pedes quatuor, quod eſt duplum prioris. Ergo tantumdem virium lucrati ſumus, ſeu motum mechanicum perpetuum effecimus, quod utique abſurdum eſt. Nec refert, an per motuum leges actu efficere poſſimus hanc ſubſtitutionem; nam inter æquipollentia etiam mente tutò fieri ſubſtitutio poteſt. Quamquam etiam varias rationes excogitaverimus, quibus actu tam prope quàm velis efficeretur, ut vis tota corporis A transferretur in corpus C, antea quieſcens, ſed quod nunc (ipſo A ad quietem redacto) ſit ſolum in motu poſitum. Unde fieret, ut pro pondere bilibri celeritatis ut 1, ſucceſſura eſſet libra una celeritatis ut 2, ſi hæc æquipollerent; unde abſurdum oriri oſtendimus. Neque iſta ſanè inania ſunt, aut in logomachiis conſiſtunt, ſed in machinis, & motibus comparandis maximum uſum habent. Nam ſi quis vim habeat ab aqua, vel animalibus, vel alia cauſa, per quam corpus grave centum librarum in motu conſtanti conſervetur, quo intra minuti temporis quartam partem abſolvere poſſit circulum horizontalem diametri triginta pedum; alius verò ejus loco eodem tempore duplum pondus nonniſi dimidium circulum conſtanter abſolvere præſtet, minore impenſa, idque tibi velut in lucrum imputet; deceptum te, ac dimidia virium parte fruſtratum ſcito. Sed nunc fugatis erroribus, veras, & ſanè admirandas Naturæ leges paulo diſtinctiùs in Schediaſmatis hujus parte ſecunda proponemus, menſe Majo exhibenda.

N°. LI.

N°. LI.

NOTATIUNCULA AD CONSTRUCTIONES

Lineæ in quâ Sacoma, æquilibrium cum pondere moto faciens incedere debet menſe Febr. anni 1695. in Actis datas. (a) Et quædam de Quadraturis.

Ex Actis Erud. Lipſ. ann. 1695.

JUcundiſſimum fuit ſolutionem Dn. Marchionis *Hoſpitalii* egregiam problematis elegantis & utilis, tum Additiones ingenioſiſſimi D. *Joh. Bernoullii* videre, quibus ſolutionem univerſaliorem, & conſtructionem faciliorem reddit, meritoque rem notatu dignam cenſet, quod idem hic & per differentiales, & per methodum Geometriæ communis obtinetur. Cujus rei complura exempla & mihi occurrerunt. Et ſanè in concreto ſæpe oſtenduntur rerum origines, connexioneſque, in abſtractis terminis non æquè apparentes. Conſideratio autem centri gravitatis jam ipſa per ſe compendium differentialium, ſeu ſummationem involvit, unde mirum non eſt, ſi per eam differentiales reſuantur. Quod ut clariùs appareat, oſtendam, quomodo breviſſima illa conſtructio etiam ex differentialibus ſtatim, & recta via ſine interventu centri gravitatis, naſcatur. Nempe ex natura æquilibrii, quod ſemper manere ſupponitur, patet debere (vid. Fig. ad Diſſert. illuſt. March. *Hoſpitalii*) pondus M ductum in elementum ipſius I P, æquari ponderi B ducto in elementum ipſius I H: ita enim non plus deſcendetur quàm aſcendetur, ſeu erunt elementa deſcenſuum, vel aſcenſuum reciprocè ut pondera. Quia ergo M in d. I P æqual. B in d. IH erit ſummando M in I P æqu. B in I H, ſeu M ad B ut I H ad I P, prorſus ut Bernoulliana conſtructio habet. Si intelligatur ipſa trochlea C non fixa manere, ſed lineam durante motu ponderum, & ſacomatum, (nam viciſſim ſibi ſunt pondus, vel ſacoma) deſcribere, eadem tamen methodus locum habebit. Quemadmodum ut in aliis ſimilibus. Pulcherrimum autem eſt, quod notat, lineam a Dn. Marchione *Hoſpitalio* præſcriptam ex genere Epicycloidum eſſe.

(a) Hoc ſchediaſma refertur ad ſolutionem datam in Actis Erud. anni 1695. inſcriptam, *Illuſtris Marchionis Hoſpitalii ſolutio Problematis Phyſico-Mathematici ab erudito quodam Geometro propoſiti.*

Quod verò obſervat ſummationem ordinatarum, quæ ſunt ut $\sqrt{a^4 + x^4}$ pendere ex dimenſione curvæ parabolæ cubicæ; etiam Dn. Marchio me monuerat. Viſus autem mihi ſum, cùm iſta ſub manibus haberem, connexionem videre cum dimenſione curvæ Hyperbolicæ, ſed talia nunc reſumere non licet, quæ aliquando curatiùs tractare ſpero.

De cætero video doctiſſimum Dn. *Joh. Bernoullium* non probare, quod D. *Craigius* tacitè ſuppoſuit in tr. de Quadraturis, quantitatem irrationalem habere ſummatricem etiam irrationalem ſimilem. Et fateor hoc ſine demonſtratione illic fuiſſe poſitum, ſed quoniam mihi methodo ſimili nonnihil, univerſaliore tamen, ni fallor, & breviore, talia tractanti, *principium* innotuit, nondum quod ſciam, in hoc argumento conſideratum, unde demonſtratio ad rem pertinens haberi poteſt, proponere hoc loco placet. Dico igitur terminum ſummandum, & terminum ſummatorem, vel, quod eodem redit, differentiam, & terminum differentiandum (Dni *Bernoullii* integralem vocant) habere eaſdem ambiguitates, ſeu radicum varietates, cùm quævis radix termini det propriam ſeriem, ſuas quoque proprias differentias habentem. Et proinde ſi ſit y, differentia, vel ſummandus, & v ſumma vel differentiandus, ſeu, ſi ſit $\int y\, dx = v$; ſequitur in æquatione, quæ exprimit relationem inter y & x, & in æquatione quæ exprimit eam inter v & x, ipſas y & v aſcendere ad eaſdem dimenſiones. Sequitur etiam irrationalitates ſe ſimili modo habere, quippe quibus itidem varietas radicum indicatur. Certè Cl. *Craigius* non pauca attulit egregia, quæ faciunt, ut incrementa adhuc majora his ſcientiis ab eo ſperem. Multumque ejus ingenuitati debeo, quòd meis meditationibus aliquid debere voluit. Si conſilium ejus ſciviſſem, potuiſſem fortaſsè aliqua ad methodi incrementum ſuppeditare. Utinam tantùm illis abſtinuiſſet, quæ acerbè in Virum excellentis ingenii & doctrinæ dixit, cui, quæ ipſe innuit, imputare, mihi nunquam in mentem venit.

N°. LII.

N°. LII.

RESPONSIO AD NONNULLAS

Difficultates, a Dn. Bernardo Niewentyt circa methodum differentialem ſeu infiniteſimalem motas.

Ex Actis Erudit. Lipſ. ann. 1695.

Egregii Geometræ Batavi Domini *Bernardi Nieuwentyt* tractatus duos novos circa calculum differentialem, & Analyſin infinitè parvis utentem, nuper miſſu alterius, ut apparet, doctiſſimi Geometræ Dn. *I. Makreel*, autoris juſſu accepi. Itaque cùm a me pluribus in locis difficultatum quarumdam ſolutio humaniſſimè petatur, operam reipublicæ literariæ debitam defugere nolui, tametſi ſumma tantùm capita attingere tot aliis diſtractus, nunc quidem poſſim. Ad tria potiſſimum res redit: *methodum meam calculi differentialis, & ſummatorii, laborare communi cum aliis difficultate, quod ſcilicet quantitates infinitè parvæ abjiciantur, quaſi eſſent nihil*; ſecundò, *hanc methodum non poſſe applicari ad curvas, in quarum æquatione indeterminata ingreditur exponentem*: tertiò, *tametſi meus calculus differentialis primi gradûs ſuſtineri poſſit; differentias tamen inferiores, ſecundi, tertii, & aliorum graduum, ut* ddx *ſeu* $d^2.x$, dddx *ſive* $d^3.x$, *& ita porrò, non poſſe conciliari cum principio clariſſimi Autoris*, quo tamen ſolo Geometriam hanc ſtatuminari poſſe arbitratur. Specialia nonnulla, quæ *Hoſpitalianis*, *Bernoullianis* & *meis* objicit, nunc non attingo, cùm illuſtriſſimus Marchio *Hoſpitalius*, & ingenioſiſſimi Fratres *Bernoullii* tot præclara inventa ſua optimè tueri poſſint.

Quod ad *primam objectionem* attinet, clariſſimus Autor hanc in præfatione Conſiderationum ponit enunciationem, quam liquidiſſimæ veritatis eſſe autumat: *Solæ eæ quantitates æquales ſunt, quarum differentia nulla eſt, ſeu nihilo æqualis.* Et in *Analyſi curvilineorum, ſub initium axiom.* 1. *pag.* 2. *Quicquid toties ſumi, hoc eſt per tantum numerum* (etiam infinitum, ſic enim intelligit) *multiplicari non poteſt, ut datam nullam quantitatem, ut ut exiguam, magnitudine ſua æquare valeat, quantitas non eſt, ſed in re Geometrica merum nihil.* Hinc quia in æquationibus pro tangentibus inveſtigan-

dis,

dis, Maximiſque, & Minimis (quam Dn. Autor *Barrovio* tribuit, primus tamen, ni fallor, *Fermatius* uſurpavit) remanent quantitates infinitè parvæ, abjiciuntur autem earum quadrata, vel rectangula; hujus rei rationem ex eo ducit, quòd quantitates ipſæ infinitæ parvæ, ſeu infiniteſimæ ſunt aliquid; quoniam per numerum infinitum multiplicatæ quantitatem datam (id eſt, ordinariam, vel aſſignabilem) efficiunt, ſecus autem ſe habere earum rectangula, vel quadrata, quæ proinde ex axiomate præmiſſo ſint merum nihil. Ego quidem fateor magni me eorum diligentiam facere, qui accuratè omnia ad prima principia uſque demonſtrare contendunt, & in talibus quoque ſtudium non raro poſuiſſe; non tamen ſuadere, ut nimiâ ſcrupuloſitate arti inveniendi obex ponatur, aut tali prætextu optimè inventa rejiciamus, noſque ipſos eorum fructu privemus, quod & olim Patri *Gottignies*, & diſcipulis ejus circa Algebræ principia ſcrupuloſis inculcavi. Cæterùm æqualia eſſe puto, non tantùm quorum differentia eſt omnino nulla, ſed & quorum differentia eſt incomparabiliter parva; & licèt ea Nihil omnino dici non debeat, non tamen eſt quantitas comparabilis cum ipſis, quorum eſt differentia. Quemadmodum ſi lineæ punctum alterius lineæ addas, vel ſuperficiei lineam, quantitatem non auges. Idem eſt, ſi lineam quidem lineæ addas, ſed incomparabiliter minorem. Nec ulla conſtructione tale augmentum exhiberi poteſt. Scilicet eas tantùm homogeneas quantitates comparabiles eſſe, cum *Euclide lib.* 5. *defin.* 5. cenſeo, quarum una numero, ſed finito, multiplicata, alteram ſuperare poteſt. Et quæ tali quantitate non differunt, æqualia eſſe ſtatuo, quod etiam *Archimedes* ſumſit, aliique poſt ipſum omnes. Et hoc ipſum eſt, quod dicitur differentiam eſſe data quavis minorem. Et *Archimedeo* quidem proceſſu res ſemper deductione ad abſurdum confirmari poteſt. Quoniam tamen methodus directa brevior eſt ad intelligendum, & utilior ad inveniendum, ſufficit cognita ſemel reducendi via poſtea methodum adhiberi, in qua incomparabiliter minora negliguntur, quæ ſanè & ipſa ſecum fert demonſtrationem ſuam ſecundùm lemmata a me *Febr.* 1689 communicata. Et ſi quis talem æqualitatis definitionem rejicit, de nomine diſputat. Sufficit enim intelligibilem eſſe, & ad inveniendum utilem; cum ea, quæ alia magis (in ſpeciem) rigoroſa methodo inveniri poſſunt, hac methodo ſemper non minùs accuratè prodire ſit neceſſe. Itaque non tantùm lineas infinitè parvas ut dx, dy pro quantitatibus veris, in ſuo genere aſſumo, ſed & earum quadrata, vel rectangula $dxdx$, $dydy$, $dxdy$, idemque de cubis aliiſque altioribus ſentio, præſertim cùm eas ad ratiocinandum, inveniendumque utiles reperiam. Nec profectò video, quomodo *doctiſſimus Autor* in animum ſuum inducere potuerit, ut ſtatueret, lineam ſeu latus dx eſſe quantitatem, at quadratum, vel rectangulum talium linearum eſſe nihil. Licèt enim hæ quantitates infinities infinitè parvæ, numero infinito primi gradûs multiplicatæ,

plicatæ, non producant quantitatem datam, ſeu ordinariam; faciunt tamen hoc multiplicatæ per numerum infinities infinitum, quem rejicere par non eſt, ſi numerum infinitum admittas; prodibit enim numero infinito primi gradûs ducto in ſe. Quod autem in æquationibus *Fermatianis* objiciuntur termini, quos ingrediuntur talia quadrata, vel rectangula, non verò illi quos ingrediuntur ſimplices lineæ infiniteſimæ; ejus ratio non eſt, quòd hæ ſint aliquid, illæ verò ſint nihil; ſed quòd termini ordinarii per ſe deſtruuntur, hinc reſtant tum termini, quos ingrediuntur lineæ ſimplices infinitè parvæ, tum quos ingrediuntur harum quadrata, vel rectangula: cùm verò hi termini ſint illis incomparabiliter minores, abjiciuntur. Quòd ſi termini ordinarii non evanuiſſent, etiam termini infiniteſimarum linearum non minùs, quàm ab his quadratorum abjici debuiſſent. Adjungi poſſunt Lemmata quædam mea, calculi differentialis fundamentis inſervientia, ex *Actis Eruditorum Lipſienſibus Febr.* 1689. quæ Cl. *Autor* non niſi poſt editas conſiderationes in præfatione tractatûs Analytici ſibi occurriſſe profitetur; ubi jam tum *incomparabilium* conſiderationem adhibui, ad has difficultates præveniendas.

Quod ad *ſecundum* attinet, *doctiſſimus Vir* æquationes exponentiales (ut a me appellantur) ſua methodo tractari poſſe putat, mea non item. Idque tali ratione *cap.* 1. *Analyſ. pag.* 62, *ſeqq.* & *cap.* 8. *p.* 280. per ſuam calculandi rationem oſtendere conatur, quam tamen uſitatis mihi ſymbolis, ratiociniiſque ſic exprimo. Sit æquatio (ad curvam tranſcendentem) $y^{x} \overset{(1)}{=} z$. Unde alia pari jure fiet $\overline{y+dy}^{\,x+dx} \overset{(2)}{=} z+dz$. Itaque differentiando æquationem 1, id eſt æquationem 1 ab æq. 2 ſubtrahendo, ut dz ſeu differentia inter duorum z valores (ipſius nempe z, & ipſius $z+dz$) habeatur, (quod calculi differentialis fundamentum eſt) utique ex 2 & 1, fiet: $\overline{y+dy}^{\,x+dx} - y^{x} \overset{(3)}{=} dz$. ſed $\overline{y+dy}^{\,x+dx} \overset{(4)}{=} y^{x+dx} + x.y^{x+dx-1}dy$. (quia ut olim in his Actis a me generaliter notatum eſt $\underline{\overline{|m|}}\;\overline{y+a}^{\,m} \overset{(5)}{=} y^{m} + \frac{m}{1}y^{m-1}a^{1} + \frac{m.\overline{m-1}}{1.2.}y^{m-2.}a^{2}$ &c. Unde ex ſententia *Autoris*, evaneſcente termino $\frac{m.\overline{m-1}}{1.2.}y^{m-2}a^{2}$ & ſequentibus, quia a eſt infinities infinitè parva, & pro a ſubſtituendo dy, & pro litera m ſubſtituendo $x+dx$ prodit æq. 4.) Itaque ex æq. 3. per æq. 4 fit $y^{x+.dx} + x.y^{x+.dx-1}.dy - y^{x} \overset{(6)}{=} dz$. Verùm hæc ratio exprimendi, maximis laborat difficultatibus, quia non ſervat leges homogeneorum calculi differentialis, & quod caput eſt, non exhibet quæſitum, nempe rationem dx ad dy, ſeu ſubtangentialis ad ordinatam,

in terminis ordinariis expreſſam ; neque adeo ductu linearum aſſignabilium conſtrui poteſt. Imò redit ad identicum. Nam juxta principium meum ſuprà expoſitum, quantitas incomparabiliter minor alteri majori fruſtra additur, &, ſi hoc non evaneſcat (actu, vel virtualiter) ipſamet abjici debet. Itaque in æq. 6, pro dy, dx, dz additis ad alia incomparabiliter majora, ſcribendo o, fiet $y^{x+o} + x.y^{x+o-1}.o. - y^{x} \overset{(7)}{=} o$; hoc eſt abjecto o pariter, & termino per o multiplicato, fiet $y^{x} - y^{x} = o$: quæ æquatio vera quidem, ſed identica eſt, unde talis calculus non prodeſt. Quale quid ego quoque expertus ſum, ut ſi ſit $b^{x} = y$, poſita b conſtante, tunc $b^{x+dx} - b^{x}$ erit $= dy$; & hanc dividendo per b^{x} fit $b^{dx} - 1 = dy : b^{x}$; & pro dx & dy ponendo o, fit $b^{o} - 1 = o : b^{x}$, ſeu $b^{o} - 1 = o$; ſeu $b^{o} = 1$, ut conſtat, ergo fit $1 - 1 = 0$. Sed talis identiciſmus in meo calculo differentiali evitatur. Interim non diffiteor obtuliſſe ſe mihi caſus, ubi iſta quoque calculandi ratio non prorſus negligenda ſit. Verùm ut videat Cl. *Nieuwentyt* meam methodum differentialem ad æquationes quoque, ubi incognita, vel indeterminata ingreditur exponentem, (& quidem utiliter) porrigi, quas ego fortaſsè omnium primus conſiderandas Geometris propoſui, cùm meum Tetragoniſmum Circuli Numericum darem in *Actis Eruditorum anni* 1682, *menſ. Febr.* attingam hoc loco paucis, quod jam a multis annis habui, & ad ſummum Geometram *Chriſtianum Hugenium* dudum perſcripſi; nempe modum differentiandi æquationes exponentiales; quem Algorithmo meo olim publicato inſerere non admodum neceſſe erat, ob talium expreſſionum raritatem, & inſolentiam, quæ, fateor, tanta eſt, ut ipſe *Hugenius* eas ægrè admiſerit. Nec quiſquam mihi notus eſt, præter ingenioſiſſimum *Bernoullium*, qui proprio Marte, me non monente, & ipſe in calculo differentiali huc pervenerit, atque ad hæc penetrarit, quæ *Hugenius* per jocum hypertranſcendentia appellabat. Nempe ſit $x^{v} = y$ fiet $v.\ \log. x = \log. y$; jam $\log. x = \int, dx : x$ & $\log. y = \int, dy : y$. Ergo $v. \int, dx : x = \int, dy : y$: quam differentiando, fit $v\,dx : x + dv.\ \log. x = dy : y$. Porrò v debet dari ex x & y, ambobus, vel ſingulis, ergo ſcribi poteſt $dv = m\,dx + n\,dy$, & m pariter atque n dabuntur ex x & y, & prodibit: $v\,dx : x + \log. x.\ m\,dx = dy : y - \log. x.\ n\,dy$, & fiet dx ad dy (ſeu ſubtang. ad ordinatam) ut y ad $\frac{v}{x} + \overline{m. \log. y}$. Itaque habetur modus ducendi tangentem talis curvæ ex ſuppoſita hyperbolæ quadratura, vel Logarith-

mis;

mis; pro generali autem differentiatione exponentialium ſufficit Algorithmo meo hunc canonem aſcribi: $d.x^{v} = x^{v}, \frac{v}{x}\, dx + dv + dv.\log.x$. Unde ſi v ſit conſtans numerus, ut e, prodit $d.x^{e} = x^{e} \frac{e}{x}\, dx$ id eſt $e.x^{e-1}\, dx$: quod eſt theorema noſtri Algorithmi, pro differentiatione potentiarum, vel radicum, dudum traditum.

Supereſt, ut *tertiam Viri Cl.* difficultatem paucis abſolvam, contra differentiationes ſcilicet ſucceſſivas, ſeu quantitates differentio-differentiales. Itaque ipſas ddx non putat admittendas, nec eſſe quantitates, quia per infinitum numerum multiplicatæ non dent quantitatem ordinariam. Sed ſciendum eſt omnino eam prodire, ut ad primam difficultatem jam monui, ſi numerus multiplicans ſit infinitus altioris gradûs. Et res ſanè etiam aliunde multis modis confici poteſt. Nam quotiens termini non creſcunt uniformiter, neceſſe eſt incrementa eorum rurſus differentias habere, quæ ſunt utique differentiæ differentiarum. Deinde concedit *Cl. Autor*, dx eſſe quantitatem; jam duabus quantitatibus tertia proportionalis, utique eſt etiam quantitas; talis autem, reſpectu quantitatum x & dx, eſt quantitas ddx; quod ſic oſtendo. Sint x progreſſionis Geometricæ, & y arithmeticæ, erit dx ad conſtantem dy, ut x ad conſtantem a. Seu $dx = x\,dy : a$. Ergo $ddx = dx\,dy : a$. Unde tollendo $dy : a$ per æquationem priorem fit $x\,ddx = dx\,dx$: unde patet eſſe x ad dx, ut dx ad ddx. Et continuata progreſſione Geometrica etiam reliquæ differentiæ ulteriores ordine prodeunt. Et generaliter in progreſſione Geometrica non tantùm ſeries differentiarum ejuſdem gradûs, ſed & ſeries tranſitus, ſeu differentiationum, geometricæ eſt progreſſionis. Sed & harum differentiationum ſucceſſivarum veritas uſuſque rebus ipſis confirmatur. Nempe, ut jam aliàs notare memini, quantitas ordinaria, quantitas infiniteſima prima, ſeu differentialis, & quantitas differentio-differentialis, vel infiniteſima ſecunda, ſeſe habent ut motus & celeritas, & ſollicitatio, quæ eſt elementum celeritatis. Motu deſcribitur linea, velocitate elementum lineæ, ſollicitatione (velut initio deſcenſus a gravitate, vel motus a conatu centrifugo) elementum elementi. Et in ipſa Geometria quantitates ordinariæ ſunt pro vulgari algebra, differentiales primi gradûs referuntur ad tangentes, ſeu linearum directiones, ſed differentiales ulterioris gradûs ad oſcula, ſeu linearum curvedines; quod etiam jam notare memini. Finiam, ubi hoc unum adjecero, mirari me, quomodo doctiſſimus *Nieuwentyt* credere potuerit, ex noſtris principiis ſequi hoc abſurdum, quod in omni curva ſubtangentialis ſit ordinatæ æqualis, *Conſid. p.* 19. Sit curvæ elementum dc; erit $dx\,dx + dy\,dy = dc\,dc$, ut conſtat. Ergo differentiando $dx\,ddx + dy\,ddy = dc\,ddc$. Si jam dc conſtans ſit $ddc = 0$, & fit

$dx\,ddx + dy\,ddy = o$, ſed hac differentiali in ſummatricem rurſus verſa ait prodire $\frac{1}{2}dx\,dx = \frac{1}{2}dy\,dy$: adeoque $dx = dy$, quod utique abſurdum eſt. Si talibus uteremur calculis, quomodo eorum ope tot veritates detexiſſemus? Sed reſpondeo ſummando, ſeu verſa differentiali in ſummatricem, prodíturum $\frac{1}{2}dx\,dx + \frac{1}{2}dy\,dy - \beta\,dc = o$, ſeu conſtantem areolam eſſe ſubtrahendam, alioqui fieret non quidem $dx\,dx = dy\,dy$, ſed potiùs $-dx\,dx = dy\,dy$, ſeu $dy = dx\sqrt{-1}$: quæ eſt æquatio impoſſibilis, quod indicat β non debere eſſe o, ſed habere ſignum $-$, & eſſe quantitatem conſtantem, quæ non alia eſt, quàm $\frac{1}{2}dc$, quia ipſam dc, poſuimus conſtantem. Unde redit æquatio initio poſita $dx\,dx + dy\,dy = dc\,dc$; prout oportet. Et ſimili abuſu calculi differentialis laboratur *Conſid. p.* 21; nec mirum eſt hoc modo calculum non eſſe tutum, aut incidere in abſurda. Sic & in ipſo tractatu majore, ſeu *Analyſ. inf. c.* 8, *p.* 283, ponit triangula characteriſtica ejuſdem curvæ, modò numero ſint finita, & ſerie non interrupta ſe ſe conſequantur, eſſe ſimilia inter ſe; unde facilè infert, poſitis elementis abſciſſarum æqualibus, etiam elementa ordinatarum &c. fore æqualia. Sed cùm ubique curva directionis ſuæ inclinationem mutet (alioqui non curva, ſed recta foret) etiam anguli continuè, licet inſenſibiliter ſeu per diſcrimina incomparabiliter parva, mutantur. Qua de re me quoque olim ratiocinationes inſtituere memini. Difficultas quoque objecta *Conſid. p.* 20, contra triangulum, cujus baſis eſt altitudine incomparabiliter minor, ejuſdem eſt commatis: id enim pro iſoſcele habetur, quia differentia inter altitudinem, & hypotenuſam incomparabiliter parva eſt, perinde ac differentia inter radium, & ſecantem anguli infinitè parvi. Sed hæc ſufficere judico, & ipſi *Clmo. Nieuwentyt* ſatisfactura ſpero; qui ſi ingenium & doctrinam magis ad augenda, quàm retractanda hæc ſtudia vertere volet, haud dubiè præclara dare poterit, quemadmodum ex his ipſis ſpeciminibus judicare licet.

ADDENDA AD SUPERIUS SCHEDIASMA.

Ex Actis Erud. Lipſ. anni 1695.

UNum adhuc addere placet, ut omnis de realitate differentiarum cujuſcumque gradûs tollatur diſputatio; poſſe eas ſemper exprimi rectis ordinariis proportionalibus. Nempe ſit linea quæcumque, cujus ordinatæ creſcunt, vel decreſcunt; poterunt ad eumdem axem in iiſdem punctis applicari ordinatæ ſecundæ ad novam lineam terminatæ, proportionales differentiis primi gradûs, ſeu elementis ordinatarum lineæ primæ. Quod ſi jam idem fiat pro ſecundis ordinatis, quod factum eſt pro primis, habebuntur ordinatæ ad lineam tertiam, proportionales primarum ordi-

ordinatarum differentio-differentialibus, ſeu differentiis ſecundis; ſeu, quod idem eſt, ſecundarum ordinatarum differentiis primis. Et eodem modo etiam differentiæ tertiæ, & aliæ quæcumque per quantitates aſſignabiles exponi poſſunt. Modum autem differentiis primi gradûs proportionales exhibendi rectas ordinarias jam tum explicui, cùm primum hujus calculi elementa traderem in Actis Octobris 1684. Nempe inſpiciatur ibi Tabula 6. *Fig.* 29, reperietur dx, elementum abſciſſæ AX vel x, repræſentari per rectam aſſignabilem in figura ſeparatim poſitam, & deinde dy, elementum ordinatæ XY ſeu y, repræſentari per rectam quæ ſit ad dictam dx jam aſſignatam, ut XY ordinata, eſt ad XD interceptam in axe inter tangentem & ordinatam. Ubi corrigendus eſt error, qui illic neſcio qua negligentiâ irrepſit, ut pro XD, XB, XC, XE, interceptis portionibus axis, malè ponerentur YD, VB, WC, ZE portiones tangentis; tametſi correctio ex *p.* 470 ibidem haberi potuerit. Et quoniam eadem opera habetur modus exponendi differentias gradûs ſecundi, per proportionales illis differentias gradûs primi, & in univerſum poſteriores per præcedentes proximas, patet nullum eſſe gradum differentialium, utcumque remotum, qui non per rectas aſſignabiles exhiberi tandem queat. Quòd ſi ſolæ darentur differentiæ primæ, ſequeretur omnes ordinatas creſcere uniformiter, ſeu omnem lineam eſſe rectam. Interdum autem, continuando aliquouſque differentiationes, tandem finiendum eſt, cùm nimirum linea differentiarum repræſentatrix, ſecunda, vel tertia, vel alia ulterior, fit recta. Nempe ſi ordinatæ primæ ſint ut abſciſſæ, tunc linea prima eſt recta, & caret differentiis ſecundis. Si ordinatæ primæ ſint ad parabolam (nempe quadraticam) ſeu ſi ſint ut quadrata abſciſſarum, tunc linea ſecunda erit recta, & linea prima (parabola ſcilicet) carebit differentiis tertiis. Si ordinatæ primæ ſint ad paraboloeidem cubicam, ſeu ſint ut cubi abſciſſarum, tunc linea tertia erit recta, & linea prima (paraboloeides ſcilicet cubica) carebit differentiis quartis, & ita porrò. Idem eſt ſi ordinatæ (primæ ſcilicet) componantur ex ordinatis paraboloeidum dictis, ſive per additionem, ſive per ſubtractionem; tunc enim finientur tandem differentiæ cum altiſſimæ paraboloeidis ingredientibus ordinatis. Sed in cæteris lineis omnibus, differentiationes procedunt in infinitum, quoties ſcilicet in valore ordinatæ abſciſſa in nominatore vel vinculo reperitur. Ex his jam intelligitur, calculum differentialem poſſe concipi, tamquam ſi fieret non niſi in quantitatibus ordinariis; tametſi origo ex inaſſignabilibus petenda ſit, ut abjectionum, ſeu deſtructionum ratio reddatur. Itaque ſi vel ipſa initia calculi a me publicata ſatis meditatus fuiſſet Cl. *Nieuwentyt*, facilè vidiſſet, non magis de ulterioribus quàm de primis differentiis dubitari poſſe, & vel ideo evitatam tunc a me fuiſſe mentionem inaſſignabilium, re ad ordinarias traductâ, ut tales ſcrupuli tollerentur; cæterùm ſi quid notaſſet animadverſione dignum, ſenſiſſet me

eo eſſe ingenio, ut libenter dem veritati manus; quemadmodum nunc re accuratiùs conſiderata, ea quæ celeberrimus *Jacobus Bernoullius* de numero radicum oſculi monuerat, probo, quibus quo minus aſſentirer antea, non alia cauſa fuit, quàm quod diverſæ occupationes cogitationeſque effecerant, ut tardiùs accederem ad rem de integro ſatis conſiderandam. Dum hæc ſcribo, triſtem nuntium mortis Viri incomparabilis, *Chriſtiani Hugenii* accipio. Non poterant majorem jacturam pati literæ illæ ſublimiores, quæ humanæ menti aditum faciunt in arcana naturæ. Ego *Hugenium* ſolo tempore *Galilæo* & *Carteſio* poſtpono. Cùm maxima dederit, expectabantur non minora. Et ſpero inter ſchedas ejus theſaurum quemdam repertum iri, qui nos utcumque ſoletur. Eoque magis orandus eſt frater ejus, vir meritis in rempublicam illuſtris, ut maturata editione communi utilitati pariter, ac fraternæ gloriæ, imò ſuæ conſulere velit. Oblitus eram eorum quæ Dn. *Nieuwentyt* contra notam concavitatis, vel convexitatis a me allatam objicit, inſtantia parabolæ producta. Sed mirum eſt ipſum non animadvertiſſe, tantùm errore, ſive ſcribentis, ſive typothetæ tranſpoſita eſſe verba, & pro concavitate ponendam eſſe convexitatem, ac vice verſâ. Itaque non tam afferri debuerat inſtantia parabolæ (quando in omnibus curvis contrarium fit ejus quod verba inſinuabant) quàm generaliter notari inverſio. Adeoque regula ſic efferenda eſt: ſi creſcentibus ordinatis creſcant etiam ipſarum differentiæ, curva axi obvertet convexitatem, alias concavitatem, poſito ſcilicet æquales inter ſe eſſe differentias abſciſſarum.

N°. LIII.

DE NOVO USU CENTRI Gravitatis ad Dimenſiones, & ſpeciatim pro areis inter curvas parallelas deſcriptas ſeu rectangulis curvilineis; ubi & de parallelis in univerſum.

Ex Actis Erud. Lipſ. anni 1695.

PAPPUS ſubindicaverat, quod GULDINUS expreſſius oſtendit, aream motu debito generatam æquari facto ex ductu mobilis generantis in viam ejus centri gravitatis. Hac regulâ potiſſimum uſi ſunt Geometræ in motu rotationis circa certum quemdam axem pro metiendis ſolidis, ac ſuperficiebus, quæ ſic generantur. Sed non minùs ſuccedit negotium,

gotium, ſi axis, vel centrum continuè mutetur durante motu generantis, ut fit in evolutionibus curvarum & ſuperficierum. Itaque ſi curva A B ope fili D A B evolvatur, tunc pars fili, id eſt initio recta D A, deſcribet aream D A (A) D, vel breviùs deſignando, D (A); duabus curvis parallelis condeſcriptis, D (D) & A (A) comprehenſam, quæ æquabitur rectangulo ſub recta A D, & recta æquali curvæ E (E) (iiſdem parallelæ) a centro ſeu puncto rectæ A D medio, E, deſcriptæ. Quin ampliùs, etiamſi pars ipſius mobilis ſucceſſivè quieſcat, & moveatur, tamen productum ex toto in viam centri gravitatis totius, areæ generatæ æquatur; quod & hìc locum habet. Nempe totius fili D A B centrum gravitatis ſit G, in ſtatu primo; & (G) in ſtatu, ſeu ſitu ultimo, cùm filum totum in rectam B (D) abiit. Sit linea G (G) locus continuus hujus centri, dico B (D) filum, in G (G), æquari D A B (D) D. Horum ut recordarer, fecit elegans theorema Dn. *Joh. Bernoullii*, qui notavit duorum arcuum evolutione condeſcriptorum, ut D (D) & A (A), differentiam, ſi convexitatem vertant ad eaſdem partes, ſummam ſi ad contrarias; æquari arcui A H, ſectoris circularis, intercepti inter duos radios, D A, D H, æquales filo vel regulæ extremis ſuis punctis binos illos arcus deſcribenti, & parallelos ipſis D A, & (D) (A) extremis ſitibus fili. Videantur Acta Auguſti 1695. His cum meo theoremate conjunctis, ſequitur differentiam (vel collatis oppoſitis evolutionibus ſummam) duorum (ut ſic dicam) rectangulorum (bicurvilineorum) condeſcriptorum, velut D (K) & L (A) modò ſint æquialta (nempe ſi D K = L A poſſe menſurari ope dimenſionis circuli. Nam collocetur ipſi D K vel L A æqualis M N in recta D A, medio loco inter D & A; & deſcribantur ſimul parallelæ M (M) & N (N). Jam D L = K A, & D L in M (M) = D (L), & K A in N (N) = K A. Ergo D (L) — K (A) id eſt D (K) — L (A) = D L in M (M) — N (N) = D L in N P, poſito N P eſſe arcum circularem, centro M dicto modo deſcriptum, ſcilicet ut ſit M P parallela, & æqualis ipſi (M) (N). Unum adhuc addam: quæ de parallelis noſtro more, id eſt generaliter acceptis, diximus, tam univerſalia eſſe, ut non tantùm parallelis evolutione deſcriptis, ſed & rectis ac circularibus quadrent. Licèt in circularibus linea evolvenda evaneſcat in punctum, & pro rectis hoc punctum concipiendum ſit infinitè remotum. Generaliter autem *parallelas* definio (lineas vel ſuperficies) quarum intervalla (minima ſcilicet) ubique ſunt æqualia. Et cùm *rectangulum*, (latè ſumtum) figura ſit, quæ ſolos angulos rectos habet; conſequens eſt, figuram hic inter duas parallelas, earumque intervalla extrema (minima) contentam ut D (K) meritò rectangulum appellari. Cæterùm ut hoc quoque adjiciam: *Datæ lineæ* (curvæ vel rectæ) *parallelam ducere lineam*, problema eſt, quod etiam ſine evolutione conſtrui poteſt. Nempe ducatur recta perpendicularis ad lineam

T. XVIII. Fig. 65.

datam,

datam, & ex punćto ejus aliquo tamquam centro, ac pertingente ab eo ad curvam perpendiculari tamquam radio, deſcribatur circulus lineam datam tangens; qui ſi volvatur, ſuper ipſa deſcribet centro ſuo lineam datæ parallelam. In eo tamen præſtat evolutio, quod ejus ope duci poteſt parallela datæ per punćtum datum. Tantum enim opus eſt ex hoc puncto duci tangentem ad generatricem datæ, quæ ſimul & generatrix erit quæſitæ; tangente dućta partem fili faciente.

N°. LIV.

G. G. LEIBNITII NOTATIUNCULA

Ad Ačta Decemb. 1695. pag. 537. & ſeqq.

Ex Actis Erudit. Lipſ. Anni 1696.

INiquus ſim, ſi non agnoſcam, excellentis Mathematici *Jacobi Bernoullii* Baſileenſium Profeſſoris meditationibus plurimum debere ſcientias iſtas profundiores, & me potiſſimùm ipſi pariter, ac fratri ejus ingenioſiſſimo, *Johanni Bernoullio*, nunc apud Groninganos Profeſſori clariſſimo, obſtrićtum eſſe, quod qualiacumque a me jaćta Analyſeos cujuſdam ſuperioris fundamenta ad varios uſus applicuere, ſuiſque inventis mirificè auxere, & ut magis magiſque innoteſcerent, ac celebrarentur effecere. Virum autem celeberrimum *Jacobum Bernoullium*, cujus nupera me ad hoc ſchediaſma invitavere, perſuadere ſibi velim, longiſſimè a me abeſſe animum de meritiſſimis ejus laudibus detrahendi. Gloriam inventarum figurarum Elaſticarum (ex hypotheſi ſcilicet valdè veriſimili) ipſi illibatam relinquo. Theoremata de radiis circulorum oſculantium, etſi mihi non ignota, ne attigiſſem quidem, niſi originem eorum pariter, ac ſimilium aliorum ex ſingulari quodam differentialis calculi genere ſimpliciſſimam exponendam occaſione data putaſſem. Ut iis in Elaſticis figuris uterer, in mentem non venit, quòd figuris illis quærendis nunquam animum adjeciſſem, non quòd res non ſit pulchra, & inquiſitu digna, ſed quòd in tanta agendorum copia, quæ ab illo rećtè ačta putavi, nollem denuò agere, incertus etiam, an poſſem. Itaque non eſt, cur imputet theorematum de oſculis defećtui, cùm ipſe agnoſcat, etiam publicatis illis, nondum vel *Hugenium*, vel me de lineis illis Elaſticis ſatis meditatos fuiſſe. Ac ne nunc quidem, expoſita Analyſi Viri egregii, a me impetrare poſſum, ut hunc campum licèt pulcherrimum ingrediar; cujus rei plures

res habeo rationes, quàm vellem. De cætero video, eum a mea de conſtructionibus ſententia vix diſſentire, optaremque ipſum, ſi vacat, ulteriùs cogitare de conſtructione tranſcendentium, per puncta Algebraicè inventa: id enim magis analyticum fuerit, etſi non æquè ſit in poteſtate hactenus, ac reductio quadraturarum ad Euthynſes. De numero radicum oſculi candidè profeſſus ſum dudum, me re diligentiùs excuſſa ſententiam ipſius amplecti. Quod inſtantiam a me poſtulat curvæ ordinariæ rectificabilis in ſe redeuntis, ſuccurrit nunc Epicycloeidalis, quam punctum deſcribit fixum in circulo provoluto ſuper alio circulo. Hanc rectificabilem eſſe, a celeberrimis Viris, *Hugenio*, & *Tſchirnhauſio* eſt oſtenſum; eſſe autem in ſe redeuntem, hæc conſtructio ipſa monſtrat, cùm circumferentiæ ſunt commenſurabiles. Præclarè facient *Bernoullii* Fratres, ſi conjunctis, vel etiam ſeparatis ſtudiis velariæ figuræ contemplationem cœptam abſolvant. Quod medias directiones attinet, de quibus ego in Ephemeridibus Gallicis Sept. 1693, cùm tendentiæ puncti mobilis ſunt infinitæ, puncta tendentiarum intervallulis æqualibus aſſumi arbitrarium putem. Diverſis autem punctis tendentias exercentibus, ex punctorum progreſſibus habetur, & progreſſus communis centri gravitatis, nempe conferendo ejus ſitum ante progreſſum, cum ſitu proximo poſt progreſſum punctorum elementarem. Quòd ſi punctorum impulſorum tendentias conſideremus, quæ ſæpe ab impellentium tendentia diverſa eſt, tendentia media ab iis recepta eodem modo definietur. Eaque omnia pro re nata ſunt varianda, ſed in his promtè, eleganterque exhibendis à Viro clariſſimo non vulgaria expecto, ac publico eum nomine rogandum cenſeo, ut ſua de fluidorum motibus, aliiſque meletemata præclara diutiùs non premat. Quod controverſias attinet inter D. D. *Hugenium*, & *Renaudum* ingeniarium rei apud Gallos marinæ generalem, ipſe *Hugenius* (cujus certè ſummi viri amiſſi, & ipſe deſiderium tanto fero ægriùs, quanto propiùs mihi cum eo commercium erat, notioreſque maximæ dotes, in quibus vis animi, candorque certabant) me ſententiam rogare dignatus eſt; ſed tunc nondum erant ad manus utrinque agitata. De re ipſa aliàs. Rectè notatur, eumdem ventum magis impellere navem quieſcentem, quàm procedentem, & diſcrimen aliquando non eſſe negligendum. Puto etiam, diverſa venti vi, declinationem, (*dérive*) ſecus quàm D. *Renaudus* ſuppoſuit, non eſſe æqualem, ſed eo majorem quo major eſt venti violentia. Modum generalem conſtruendi tangentium inverſas Auguſto ſuperioris anni *p.* 373, ipſe non niſi pro Mechaniſmo venditavi. Utiliſſima cogitatio eſt, de iiſdem ad quadraturas redigendis, ſeparandiſve ab invicem indeterminatis. Problema de eo præſtando circa æquationem differentialem $a\,dy = yp\,dx + by^n.\,q\,dx$ ſolvere poſſum, & reduco ad æquationem, cujus forma eſt... $dv + \ldots v\,dz + \ldots dz = o$, ubi per punctata intelliguntur quantitates utcunque datæ per z. Talis au-

tem æquatio generaliter per me reducta eſt ad quadraturas, ratione jam dudum amicis communicata, quam hic exponere neceſſarium non puto, contentus effeciſſe, ut acutiſſimus Autor problematis agnoſcere poſſit methodum (ut opinor) non diſſimilem ſuæ. Neque enim dubito, & hoc ipſi innotuiſſe. Et ſunt a me in iſtis multa olim tentata, non pauca etiam præſtita, quæ jacent diſperſa in ſchedis, nec mihi ipſi in numerato habentur, copia inopi, ut ſimul habere videar & non habere. Hæc tamen faciliùs ſuppeditavit memoria, eâ ipsâ die qua Lipſienſia Acta Decembris proximi ſum nactus, id eſt heſterna, in ipſis ſcilicet nundinis Brunſvicenſibus, ubi hæc inter diſtractiones utcumque in chartam conjeci.

N°. LV.

EPISTOLA G. G. LEIBNITII

Ad VAGETIUM, Profeſſorem Mathematum Gieſſenſem 1696.

Ex Otio Hanoverano pag. 59.

QUod de compendio aliquo Arithmetico quæris, cui poſſis in docendo te accommodare, non habeo, quod commendem, & velim ipſe tale conſcribi, ſed in quo παραλλήλως tractetur *Algebra & Arithmetica*: ſunt enim reverâ eadem ſcientia, nec differunt, niſi quòd Arithmetica agit de numero certo, Algebra de incerto. Unde etiam fit ut Algebra vel Arithmetica ſit ipſa matheſis univerſalis, ſeu doctrina de quantitate in genere, quia nihil aliud eſt magnitudo quàm multitudo partium. Itaque ſi quis in manus ſumat compendium Arithmeticæ veteris & aliud Algebræ novæ, & omnia ex oppoſito transferat a numeris ad literas, ſeu à numeris certis ad incertos, & viciſſim, habebit non contemnendum Arithmeticæ compendium ad noſtri temporis guſtum.

Ego ſoleo *ſcientiam de magnitudine*, quam quidam vocant Logiſticam concipere inſtar *Logicæ mathematicæ*. Habet enim terminos ſimplices, enunciationes, conſequentias, & methodum. Termini ſimplices ſunt quantitates, rationes, ſive proportiones numeri, & conflatæ ex ipſis formulæ $a^2 \; a\frac{1}{2} \; r^2 r a^2 \; aa - bb$. Enunciationes ſunt majoritates, minoritates, æquationes, analogiæ ſeu rationum identitates. Nam dicere cc æqu.

$aa - bb$

$aa - bb$ eſt enunciatio, vel dicere $a - b$ eſt ad c ut c ad $a - b$. Conſequentiæ vel ſyllogiſmi ſunt ipſæ operationes effectivæ, additio, ſubtractio, multiplicatio, diviſio, inventio diviſoris communis, extractio radicis puræ vel affectæ, rationum permutatio, inverſio, compoſitio, diviſio, ſectio &c. Methodus denique oſtendit, quomodo oblati theorematis demonſtratio, vel oblati problematis ſolutio ſit aggredienda. Hanc ideam ſi à viro docto bene præſtitam haberemus, haud dubiè vel Arithmetica vel Matheſis univerſalis facilis ſimul & ſolida daretur.

N°. LVI.

COMMUNICATIO SUÆ PARITER,

Duarumque alienarum ad edendum ſibi primum a Dn. *Jo. Bernoullio*, deinde a Dn. Marchione *Hoſpitalio* communicatarum ſolutionum problematis curvæ celerrimi deſcensûs a Dn. *Jo. Bernoullio* Geometris publicè propoſiti, unà cum ſolutione ſua problematis alterius ab eodem poſtea propoſiti.

Ex Actis Erudit. Lipſ. anni 1697.

PRoblemata proponere Geometris dudum uſitatum & publicè utile eſt, cùm non ſit animo ſuos profectus jactandi, ſed alienos excitandi, ut dum quiſque methodos ſuas exercet, ars inveniendi augeatur. Sæpe fit, ut viri eruditi quidem, & in recepta analyſi verſati, ſed nihil altiùs agitantes, dum de iis, quas didicere, methodis nimium ſibi pollicentur, vulgari doctrinæ ſecuri indormiant, magno ſcientiæ detrimento: nam qui ſibi perſuadent, nihil ſupereſſe, quod, ſi modo animum adhibere velint, non ſit in poteſtate, nova non quærunt, & ſuæ ſimul deſidiæ, & vanitati litant. Hi igitur non meliùs veterno ſuo excutiuntur, quàm ſi problemata proponantur, elegantia, vel utilia, præſertim ſi magis ſint artificioſa, quàm laborioſa. Et puto ea re maximè factum fuiſſe, ut methodus infiniteſimalis differentiarum, & ſummarum (cujus calculum differentialem appellare placuit) a me propoſita increbreſceret, & a viris egregiis in uſum transferretur, quod appareret, problematibus inſignibus ſolvendis aptiſſimam eſſe. Cùm enim fortè Dn. Abbati *Catelano*, neſcio quæ contra *Dynamica* mea opponenti, & alioqui *Carteſianis* methodis nimium tribuenti, in Novellis Reipublicæ Literariæ reſponderem, venit in mentem ipſi pariter, aliiſque eadem ſentientibus proponere Problema (non admodum quidem difficile) *Lineæ Iſochronæ*, in qua deſcendens grave uniformiter appropinquaret horizonti. Sed illis ſilentibus, ſolutionem dedit Dn. *Hugenius*, quod elegans ipſi quæſtio videretur. Cumque alia

conſultò

conſultò indicta reliquiſſet, hæc ego ſuppleveram, & demonſtrationem abjeceram in *Actis Eruditorum*: idque magis feceram, ut problemati ultimam manum imponerem, quàm ut aliquem magnoperè fructum inde mihi pollicerer. Verùm uti aliqua eſt rerum omnium concatenatio, fecit hæc mea demonſtratio, ut Dn. *Jacobus Bernoullius*, qui antea calculum differentialem, quem in *Actis* iiſdem dudum communicaveram, minore fructu aſpexerat, majorem inde lucem ſubitò hauriret, & percepto methodi ad quæſtiones Phyſico-mathematicas uſu, problema *Lineæ Catenariæ* a *Galilæo* fruſtrà tentatum mihi proponeret. Quod cùm ego reperiſſem, & publicata ſolutione poſſem qualicunque illa laude ſolus frui, malui tamen alios in partem venire, ut in excolenda pulcherrima methodo adjutores mihi pararem. Certum enim eſt, egregia ingenia laude duci ſolere, & libentiùs ea tractare, in quibus non omnia aliis, ſed multum etiam ſibi debent. Itaque ſignificavi publicè, me ſolutionem *Galilæo* fruſtrà quæſitam reperiſſe, editionem autem in annum differre conſtituiſſe, ut aliis ſpatium daretur, vel ſuas excolendi methodos, vel noſtram meditandi, & ritè adhibendi. Id verò feliciter ſucceſſit. Nam Dn. *Hugenius* (quem nunc ereptum nobis dolemus) ſua quadam methodo ad ſolutionem aliquam, licèt (ut ipſe poſtea ingenuè agnovit) imperfectiorem pervenit. Sed Dn. *Jo. Bernoullius*, meo calculo profundiùs inſpecto, ejus ope optatam ſolutionem obtinuit, problemate, quemadmodum, & a me factum fuerat, ad Hyperbolæ aream reducto, eo tantùm diſcrimine, quod ipſe per Curvæ parabolicæ rectificationem, ego per Logarithmos conſtructionem exhibuiſſem. Hic autem ſucceſſus tam inſignis Dominos *Bernoullios* fratres mirificè animavit ad præclara porrò ope hujus calculi præſtanda, efficiendumque, ut jam non ipſorum minùs quàm meus eſſe videretur; ipſo mox *Hugenio*, qui antea de eo tenuius ſenſerat, utilitatem ejus, & privatim experiente, & publicè prædicante, aliiſque, ſed inprimis Dn. Marchione *Hoſpitalio* in Gallia, & Dn. *Craigio* in Anglia exempla eorum ſequentibus. Et præ cæteris quidem egregia fuere, quæ Dn. *Jac. Bernoullius* Profeſſor Baſileenſis circa *lineam Veli*, & circa *elaſticam* dedit. Sed Dn. Marchio *Hoſpitalius* præcepta ipſa methodi juſto opere nuper expoſuit, multiſque exquiſitis ſpeciminibus mirum in modum illuſtravit.

Tandem noviſſimè Dn. *Bernoullius* Profeſſor Groninganus aliud problema nempe *lineæ breviſſimi deſcenſus*, itidem a *Galilæo* fruſtrà tentatum, problemate *Catenariæ* lineæ pulchritudine, uſque non inferius, examinandum ſibi ſumſit, ſolvitque, & aliis etiam ſolvendum commendavit. Ita duo problemata illuſtria a *Galilæo* pulchrè quidem propoſita, ſed nequicquam ab ipſo, & malè tentata, ope calculi noſtri ſolutionem accepere. Fuit ſanè *Galilæus* Vir ingenii, judiciique maximi, ſed quod ipſius tempore ars analytica nondum ſatis promota eſſet, pars autem ejus ſupe-

rior, ſeu infiniteſimalis adhuc in tenebris jaceret, ſolutiones hujuſmodi ſperare non debuit. Conjecit quidem *Catenariam* eſſe Parabolam, & *Lineam breviſſimi deſcenſûs* eſſe circulum; ſed longiſſimè aberravit, cùm *Catenaria* per Logarithmos, ſeu per arcus parabolicos in rectam extenſos, at linea breviſſimi deſcenſûs per arcus circulares rectificatos determinetur. Sed Dn. *Jo. Bernoullius* melioribus rem auſpiciis aggreſſus, non tantùm primus reperit *lineam breviſſimi deſcenſûs* eſſe Cycloidem, ſed & aliud myſterium in linea hujuſmodi *Brachyſtochrona* latere reperit, radiorum lucis ſcilicet curvaturam in medio continuè difformi, quam ipſe Dn. *Hugenius* in libro de lumine conſideraverat quidem, ſed determinare in ſe non ſuſceperat. Hoc Problema igitur Dn. *Bernoullius* in *Actis Lipſienſibus* intra ſex menſes ſolvendum publicè propoſuit, & privatis literis a me poſtulavit, ut aliquid temporis ei impenderem. Ego verò, velut miſſione dudum impetrata, potuiſſem hoc labore ſuperſedere, dum tot alia urgent, niſi pulchritudo problematis me velut invitum pellaci ſua vi ad ſe traxiſſet. Evenit autem, ut mox feliciter voti fierem compos. Solutione igitur mea *Autori* problematis communicata, agnitoque conſenſu, ſtatim ipſe ſolutionem ſuam mihi tranſmiſit, & ſuo tempore edendam apud me depoſuit. Cùm autem ſex menſes præſtituti fuiſſent elapſi, neque alius quiſquam ſolutionem a ſe repertam ſignificaſſet; potuiſſet Dn. *Joh. Bernoullius* ſolutionem ſuam publicare, & gloriam inventi elegantiſſimi ſibi pene ſoli vindicare; idque ego quoque ipſi ſuaſiſſem, ſi magis laudi noſtræ privatæ, quàm utilitati publicæ velificari voluiſſemus. Cùm verò nobiſcum expenderemus, præſtare ad incrementum ſcientiæ, & rei memoriam, ut plures participes fierent ſucceſſus, placuit ipſi pariter & mihi, ut terminus ad ſex alios menſes prorogaretur; tametſi prævideremus facilè, egoque ipſi in literis meis prædixiſſem, eos ipſos, quos nunc ſolutionem tandem aſſecutos videmus, præſertim anterioribus noſtris inventis, communicatiſque adjutos, ad eam eſſe perventuros, ſi ſatis animum intenderent. Et ſanè notatu non indignum eſt, eos ſolos ſolviſſe hoc problema, quos ſolvere poſſe conjeceram; nec verò niſi illos, qui in noſtri calculi differentialis myſteria ſatis penetravere. Cumque præter Dn. *fratrem Autoris*, tale quid de Dn. Marchione *Hoſpitalio* in Gallia fuiſſem auguratus, adjeceram ex abundanti, me credere Dn. *Hugenium*, ſi viveret, Dn. *Huddenium*, niſi hæc ſtudia dudum ſepoſuiſſet, Dn. *Newtonum*, ſi operam hanc in ſe reciperet, quæſito pares fore; quod ideo repeto, ne excellentes viros contemnere videar, quibus noſtra tractare, aut non licet, aut non vacat. Cæterum Dn. *Joh. Bernoullii* ſolutio ad me fuit miſſa menſe Auguſto anni ſuperioris; Dn. *Jac. Bernoullius* quid, & quo tempore præſtiterit, docebunt ea, quæ ipſemet recta tranſmiſit ad *Acta*. Sed Dn. Marchionis *Hoſpitalii* ſolutio literis menſe Martio hujus anni ad me datis fuit adjecta. Porrò Dn. *Joh. Bernoullius*, præter ſolutionem, etiam

etiam methodum quamdam ſuam publicare voluit, qua ad ſolutionem pervenit: ſed cùm duas habuerit, prodit hic indirecta tantùm, ut ſic dicam, etſi perelegans, nempe ſumta ex conſideratione dioptrica; ſed habet adhuc aliam magis directam, & magis ex ipſis viſceribus ſumtam, quam petentibus non denegabit. Eſt autem in hoc problematum genere, circa *maxima* & *minima* tali modo propoſita, aliquid inuſitatum, & longè ſuperans vulgares de *maximis* & *minimis* quæſtiones, quibus ſolis *Fermatius* (primus aliqualis circa ipſa Methodi Autor) *Carteſius*, *Huddenius*, *Sluſius*, aliique methodos ſuas (de quibus quidem conſtat) aptavere. Nam in ipſorum quæſtionibus res ferè eo redit, ut quæratur maxima, vel minima ordinata alicujus curvæ datæ, quod non niſi corollarium eſt Methodi tangentium vulgaris, ſeu directæ. Sed hoc loco curva ipſa aliquid *optimè* præſtans quæritur, cujus ſæpe adeo recondita eſt natura, ut ex datis conditionibus, ne tangentium quidem proprietas appareat, adeoque nec ad methodum tangentium altiorem, ſeu inverſam facilè quæſtio reduci poſſit. Et ipſum problema *Curvæ Catenariæ* talis naturæ foret, niſi præparatione facta ad methodum tangentium inverſam reducatur. Quæritur enim ibi, quæ ſit forma curvæ inter duo data puncta magnitudine data ſic interceptæ, ut ipſius centrum gravitatis maximè deſcendat. Unde apparet, quàm longè hactenus Analyſis a perfectione abſuerit, quicquid aliqui de Methodis ſuis jactarint. Cæterum ex ſolutione Dn. *Joh. Bernoullii* hunc præterea fructum inſignem capimus, ut problemata duo dioptrica maximi momenti, quæ *Hugenium*, alioſque omnes ipſo difficultatis aſpectu a tentanda ſolutione abſterruere, ſoluta habeamus, & jam curvaturam continuam radiorum lucis, pariterque unde radiationibus formatæ lineam definire poſſimus.

Cæterùm meæ ſolutioni exponendæ non eſt quod immorer, cùm cæteris conſentiat, mihique quæſiti determinatione contento rem porrò illuſtrare non vacaverit. Niſi fortè obſervari operæ pretium videbitur, quod calculus mihi obtulit, lineam quæſitam eſſe figuram ſegmentorum circularium repræſentatricem. Nempe ſi linea ABK talis ſit naturæ (*fig.* 66.) T. XVIII. Fig. 66. ut circulo deſcripto, qui imo ejus puncto K occurrat, & horizontalem per A tangat in G, ductiſque axi verticali AC normaliter occurrentibus in C, & lineæ in M, & circulo in L, & diametro ejus verticali GK in O, ſint ordinatæ CM proportionales ſegmentis circularibus, rectangulumque ſub ſemiradio circuli, & ipſa CM, æquale ſegmento comprehenſo ſub arcu GL & chorda GL; tunc AB, arcus lineæ inter duo data puncta A & B interceptus, erit linea, per quam grave vi deſcenſus a puncto A ad punctum B quàm citiſſimè venire poteſt. Hanc autem figuram ſegmentorum eſſe Cycloidem vulgarem, ita facillimè oſtendi poteſt: quia OC ſemiperipheriæ GLK, & LM arcui KL erit OL + CM = arcui GL. Sumto circuli centro N, jungatur NL; patet rectangulum ſub

ſemi-

ſemiradio & ſub O L + C M æquari ſectori G N L G: rectangulum autem ſub ſemiradio & ſub O L æquatur triangulo G N L, ergo rectangulum ſub ſemiradio, & ſub C M, æquatur ſegmento G L G, reſiduæ ſcilicet parti ſectoris, detracto triangulo G N L.

Quoniam autem Dn. *Jo. Bernoullius* aliud quoque magni momenti problema nuper propoſuit purè Geometricum: invenire lineam, quam recta quævis per punctum fixum tranſiens ita ſecet in duobus punctis, ut ſumma poteſtatum a ſegmentis, interceptis inter punctum fixum, & alterutrum punctum curvæ, æquetur quantitati conſtanti; ideo ſolutionem ejus adſcribere placet, quam didici eamdem prorſus eſſe cum ea, quæ ipſi *Autori* problematis occurrerat, placueratque, etſi ipſe non minùs quàm ego rem aliis adhuc modis infinitis præſtare poſſimus. Solutio autem no-
T. XVIII. ſtra hæc eſt: in *fig.* 67. quæritur linea C E F D, quam recta quæcunque
Fig. 67. A E F per punctum fixum A tranſiens ita ſecet in duobus punctis E & F, ut ſit $AC^{\frac{e}{\cdot}} + AF^{\frac{e}{\cdot}} =$ conſtanti b. Jam A E (vel A F) vocetur x, & E K vocetur y, aſſumtaque recta quadam in vicem unitatis, & conſtante aliqua c, fiat $cy = bx^{\frac{e-1}{\cdot}} - x^{\frac{2e-1}{\cdot}}$ Quæ æquatio exhibebit naturam curvæ quæſitæ, modumque puncta ejus determinandi; quod deſiderabatur.

N°. LVII.

EXCERPTA EX EPISTOLA

G. G. LEIBNITII ad Actorum Eruditorum Collectores.

Ex Actis Erudit. Lipſ. anni 1697.

DN. *Joh. Wallifius*, Vir magnis in Geometriam meritis celeberrimus, occaſione quarumdam ſuarum ad me literarum ſignificavit, nonnulla circa recenſionem Operum ſuorum Actis Junii ſuperioris anni inſertam, monenda occurriſſe. Nempe in ea videri obliquè inſinuari, quaſi noſtrorum inventorum parcius meminerit: ſe verò non potuiſſe dicere de ignotis; quæ autem viderit, candidè retuliſſe. Calculi autem differentialis ne nomen quidem audiviſſe, antequàm abſoluto utroque volumine operum, pro ultimo præfigendæ præfationis folio jam typos poſuiſſent Typothetæ.

Ac

Ac tum demum ab amico, qui peregre fuerat, mentionem ejus apud ſe factam, & typis tranſmotis a ſe inſertam; ſibi autem hac ætate, cùm annum octogeſimum ſuperaverit, condonari poſſe, ſi non omnia ſit ſciſcitatus. *Henricum Oldenburgium*, & *Nicolaum Mercatorem* a ſe non fuiſſe recenſitos inter Anglos, ſed de iis tantum dictum *apud nos*: ſibi perinde eſſe, ex qua quis gente ſit, Tros, Tyriuſve, modò bonus ſit, & bene meritus. Quod Quadraturæ ſuæ, aliquæ ſcilicet, non omnes (paraboloidum credo, & his reciprocarum) jam ante *Fermatio*, *Robervallio*, & *Paſcalio* notæ fuiſſe dicantur, id ſi ita ſit, clam ſe fuiſſe; nec ab illis fuiſſe editum, nedum demonſtratum. *Cavallerium* potiùs fuiſſe nominandum, qui paraboloidum quadraturas (ſed aliquas tantùm) Tract. de uſu indiviſibilium in poteſtatibus Coſſicis antè exhibuerat, & demonſtraverat, ipſo tamen *Walliſio* tunc inſcio, & ex aliis principiis. De proceſſu inductionis abunde a ſe dictum Algebræ c. 78. & 79. & recordandum fuiſſe, ſibi tunc propoſitum fuiſſe, non demonſtrandi, ſed inveſtigandi Methodum novam dare, quæ ipſis adverſariis viſa ſit non contemnenda. Etſi autem in ipſa Arithmetica infinitorum demonſtrationem plenam non dederit, hoc tamen pro aliquibus ſaltem ſeriebus, ſpeciatim quadraticis & cubicis, ſpeciminis ergo poſtea fuiſſe factum Algebræ c. 78, & paradigmata poſita id ipſum faciendi pro aliis ſeriebus. Et licèt inductio non ſit pariter applicabilis ordinatis irrationalibus, verbi gratiâ ſeriei ſubſecundanorum in parabola; huic rei facilè ſubveniri applicando eam ordinatis complementi, quæ in parabola dant ſeriem ſecundanorum. Quod dicatur, Methodum illam ad ſolas figuras integras, non ad earum partes pertinere, id ab autore recenſionis non malo quidem animo, defectu tamen attentionis dictum videri. Altitudinem enim A, pro numero terminorum ſumtam, itemque terminum ultimum etiam in quovis ſegmento intelligi poſſe; & notiſſimum eſſe, quòd non totum ſolummodo ſpatium cycloidale, ſed & quodvis ſegmentum a ſe fuerit quadratum, etſi contrarium dicat recenſio p. 254; idemque de Ciſſoidali verum eſſe. Quod hiſtoriam Cycloidis attinet, ſe quoque ipſius lineæ inventionem *Galilæo*, quàm *Merſenno* tribuere malle: reverâ tamen multo adhuc antiquiorem reperiſſe hanc figuram. Nam inter Cardinalis *Cuſani* opera in codice, qui apud ipſos extet manuſcriptus, circa annum 1454, ipſius *Walliſii* dono in Bibliothecam Savilianam Mathematicam illatus, delineatam reperiri eâdem formâ, qua eſt apud *Dettonvillium*, poſito circulo genitore in ejuſdem altero, vel utroque extremo; ſed in editis exemplaribus perperam deſcribi. Sed & apud *Bovillum* dici, extare circa annum 1510. De invento *Neilii*, qui traditis a ſe Prop. 38. Arithm. Infin. inſiſtens, primus omnium invenit æqualem curvæ rectam: quod dixerat *Hugenius* (eum non procul abfuiſſe, non tamen omnino aſſecutum) id mox ipſum retraxiſſe *Hugenium* in ſuis ad ipſum Dn. *Walliſium* literis, juſſiſſeque, ut id ipſum ite-

rum *Neilio* aſſereret. Num *Neilius* ſtatim ſciverit per omnia, qualis eſſet iſta curva, ſe certò non ſcire, ſed *Brounkerum*, & ſe ſtatim detexiſſe, paraboloidem eſſe, quam ipſe Dn. *Walliſius* nominarit ſemicubicalem. Hæc ſunt Viri præclari monita, quæ mihi pleraque magna ratione dicta videntur, nec recenſioni veſtræ adverſa, ſi verba probè inſpiciantur, & potiùs ad eam illuſtrandam inſervitura. Et puto eſſe errorem typographicum in recenſione p. 254. ubi legendum eſſe *Ciſſoidale*, non Cycloidale, apparet ex contextu. Nam ſegmenta quoque Cycloidalia ipſum quadraſſe, manifeſtiſſimum eſt: ibi verò ſermo eſt de dimenſione Ciſſoidis Hugeniana, quam dicit recenſio Dn. *Walliſium* quoad totum ſaltem ſpatium, methodo inductiva, ſeu per interpolationes inveniſſe: ſed quia ipſe idem de quovis etiam Ciſſoidis ſegmento in ſuis ad me literis viſus eſt affirmaſſe, ideo librum Viri Clmi de Cycloide & Ciſſoide inſpexi, reperique ibi quidem de ſolo toto ſpatio Ciſſoidali, non verò de partibus ejus, tale quid methodo interpolatoria oſtendi; partium tamen dimenſionem, licèt alia ratione, in ejus Mechanicis doceri. Tantum autem eſſe ſcio ipſius acumen, ut, quod opto, ſperem nos ab ipſo adhuc doceri applicationem methodi ejuſdem ad generales, ſeu omnium ſegmentorum dimenſiones; ſiquidem poſſibilis eſt, non obſtante illa, quam ſubeſſe video, difficultate ceſſantis numerorum in unum additionis ad habendas illorum progreſſiones interpolationi aptas. Quod ſupplementum methodi interpolatoriæ, inſigne ſcientiæ incrementum continet.

N°. LVIII.

DE INVENTIONE ARITHMETICÆ

Binariæ a G. G. Leibnitio.

Excerpt. ex Vitâ Leibnitii *a D.* Jaucourt *ſcripta* (a).

» Leibnitius Anno MDCXCVII. nummum memorialem, à ſe de-
» ſcriptum, Duci *Rudolpho Auguſto* ſtrenarum inſtar miſit, cujus in-
» ventio huic debetur Arithmeticæ Binariæ. Explicationem nummi hanc
» habe Leibnitianam ex laudata Epiſtola ad Ser. Ducem, *Rudolphum*
» *Auguſtum.* « Ne hoc articulo temporis vacuus veniſſe videar, mitto emblema

(a) De Arithmeticâ Binariâ, vid. *Leibnitii* judicium in Phil. Sinenſium §. 68. Tom. IV, & Num. 68. hujuſce tomi.

blema quoddam, de quo nuper coram ſermocinari licuit. Forma illius eſt numiſmatis ſymbolici; & quamvis mea delineatio tenuior, atque pro arbitrio emendari adhuc poſſit, tamen ipſa res videtur digna eſſe, quæ in argento ad poſteritatem propagetur, & nummus hujus generis ducali mandato cudatur. Namque unus ex articulis fidei Chriſtianæ fundamentalibus, & quidem ex numero eorum, qui Philoſophis quàm maximè diſplicebant, gentibuſque, a Chriſtiana religione alienis, adhucdum difficillimè perſuadentur, eſt certè Creatio omnium rerum ex nihilo per omnipotentiam Dei. Sed adſeveranter dici poteſt, nihil eſſe in mundo, quod eam feliciùs adumbret, immò quaſi demonſtret, quam originem numerorum, prouti hic repræſentatur, quorum facta expreſſione ſolummodò per notam numeri unius & nullitatis, ſeu nihili, omnes numeri oriuntur. Neque facilè Natura & Philoſophia melius ſuppeditabunt exemplum ad hocce Myſterium adumbrandum; quocirca nummo adpoſui: IMAGO CREATIONIS. Sed non minore conſideratione dignum eſt, quemadmodum ex dictis jam adparet, quòd Deus non omnia ſolùm ex nihilo produxerit, ſed & quòd Deus omnia bona fecerit, & quòd ea omnia, quæ produxit, bona fuerint, uti ex hac creationis imagine etiam oculis cernimus. Nam cùm in communi numerorum deſcriptione nullus ordo, nec certa quædam ſeries in characteribus aut ſignaturis animadvertatur, hic detecta intima eorum origine & radice, mirabilis oſtenditur ordo, & harmonia venuſtiſſima, omni emendatione ſuperior; quandoquidem conſtans in varietate ſua progreſſionum regula præſto eſt, vi cujus etiam ſine calculatione & ſine ſubſidio memoriæ ſcribere numeros poſſis, quouſque velis, modo in prima columna ad dextram, vel in ultimo loco ſemper variato ordine ponatur 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, &c. in proximo autem vel ſecundo loco (a dextris factâ ſupputatione) ordo talis eſſe debet 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 1, &c. in tertio 0, 0, 0, 0; 1, 1, 1, 1; 0, 0, 0, 0; 1, 1, 1, 1; &c. in quarto 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0; 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1; 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0; 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1; & ſic porrò, ut periodus ſemper fiat tanto major. Atque ordo hic harmonicus & elegans repræſentari etiam in tabella numiſmatis poteſt uſque ad notam 16. vel 17. majus enim ſpatium, fortè ad notam 32. excurrens, anguſtia monetæ non capit. Intelligere autem exinde facile eſt, confuſionem, quæ in operibus Dei arguitur, eſſe tantùm adparentem: quodſi verò res ad optices normam ex legitimo puncto adſpiciuntur, ſymmetria earum latere non poteſt. Quo quidem ad laudandam & amandam magis magiſque Summi Boni ſapientiam, bonitatem & pulchritudinem (ab eo enim bonitas & pulchritudo omnis) quàm maximè ſuſcitamur. Hinc etiam in litteris, quas nunc in terras Sinarum ad Patrem *Grimaldi*, Jeſuitam, Tribunalis Mathematici, ibidem florentis, Præſidem, quocum Romæ verſatus ſum, mitto, hanc numerorum delineationem illi offerre placuit, ſpe, fore, ut potentis hujus imperii arbiter,

 quem

quem ipſe mihi ut magnum arithmetices, etiam Europææ, a Patre *Verbieſt*, anteceſſore *Grimaldi*, perceptæ, amatorem laudavit, fortaſſe per repræſentationem hanc Myſterii creationis perducatur ulteriùs ad agnoſcendam Chriſtianæ fidei præſtantiam.

Quo verò id, quod reſtat numiſmate, explicem, loca primaria, videlicet 10. vel 2; 100. vel 4; 1000. vel 8; 10000. vel 16. aſteriſcis notavi; his enim ſaltem obſervatis, adparet ratio reliquorum numerorum; v. gr. cur 1101. ponatur pro 13. ſequens demonſtratio loquitur.

1	1
00	0
100	4
000	8
1101	13

Et hæc ratio eſt reliquorum etiam. Dedi etiam exemplum Additionis & Multiplicationis in nummo ad latus tabellæ, ut ex ea quoque fundamentum operationum, & quo pacto communes calculandi regulæ vel ſpecies hìc adplicentur, perſpici poſſit, quanquam nolim hanc rationem aliter, atque ad conſiderationem & inveſtigationem myſteriorum numericorum adhiberi, nullatenùs verò ad uſum vitæ communem extendi.

Ut autem creatio eo meliùs repræſentetur, nummuſque ipſe non meris numeris conſtet, ſed aliquid adhuc habeat aliud, oculis naturalibus amabile, in eo etiam adumbravi lucem atque tenebras, vel more humanæ delineationis Spiritum Dei ſuper aquis; tenebræ enim erant in profundo, & Spiritus Dei incubabat aquis. Et dixit Deus: Fiat lux, & facta eſt lux. Hoc autem eo magis quadrat, quòd profunditas inanis, & tenebræ vaſtæ ad nullitatem & nihilum; at Spiritus Dei cum ſua luce ad unitatem omnipotentem pertinet.

De vocibus, Symbolo adſcribendis, aliquantiſper cogitavi, tandemque adprobavi huncce verſiculum:

2345 *&c.* 0

OMNIBUS. EX. NIHILO. DUCENDIS. SUFFICIT. UNUM.

quoniam iſte clariſſimè oſtendit, quid totum Symbolum ſibi velit, & cur adlegetur tanquam imago creationis. Sed poteſt etiam verſiculus hic commodè in duas partes dividi, quod & ope diſcriminis in litteris & interjecti ſpatii diſtinctè factum eſt, ut ejus ultima pars: SUFFICIT UNUM, pro principali noemate agnoſcatur, aliquid arguti, quemadmodum in iſtiusmodi dictis requiritur, complectente. Namque iſtud *ſufficit unum*, etſi hic tantùm de numeris, ac repræſentata per eos creatione, propriè dicatur, tamen latiùs patet, & ſpectat ad doctrinam noſtram, complectens primariam vitæ noſtræ, & Chriſtianiſmi regulam, unicum nempe Bonum nobis eſſe ſufficiens, ſi illi graviter adhæreamus. Voci *omnibus* inſcripti ſunt numeri 2. 3. 4. 5. &c. & *nihilo* 0, quo quovis verſiculum eo celeriùs de tabula numerica interpretetur.

N°. LIX.

N°. LIX.

G. G. LEIBNITII EPISTOLÆ

DUÆ AD JOH. CHRIST. SCHULENBURGIUM,

De Arithmeticâ Dyadicâ.

Ex J. C. Schulenburgii libro de methodo indicandi Dies Feſtos &c. German. Imp. Francofurti & Lipſ. ann. 1724.

EPISTOLA I.

ETſi Dominus *Sanderus* plus petierit meo nomine quàm ipſe ego fuiſſem auſus, qui tempore tuo abuti nollem, plurimum tamen lucri inde ad me pervenit, literis à te acceptis humaniſſimis, & muneribus etiam, quibus plurimum ſum delectatus, & gratias debeo ſingulares. Utraque diſſertatio, quam miſiſti, argumenti mihi pergrati eſt. Nam Urnæ repertæ ſub tumulis, de quibus *Blumianæ Theſes*, Antiquitates harum regionum illuſtrant. Calculi verò Mathematici applicatio ad uſum, ac præterea ratiocinia in Metaphyſicis Semi-Mathematica, quæ utraque in *Knolleanis* reperi, planè ſunt ad palatum meum. Velim delineatas haberi Urnas, cæteraque quæ præfatione memoras, & Dominum *Knolleum* pergere optem in his, quæ ornare cœpit, ſtudiis illuſtrandis. Ejus meditatio Metaphyſica habere mihi viſa eſt aliquid pulchri, & profundi, & ſi hoc quoque addere licet, congrui ad ſenſus meos.

Nimirum fines ſeu limites ſunt de eſſentia creaturarum, limites autem ſunt aliquid privativum, conſiſtuntque in negatione progreſſus ulterioris. Interim fatendum eſt, creaturam, poſtquàm jam valorem à Deo nacta eſt, qualiſque in ſenſus incurrit, aliquid etiam poſitivum continere, ſeu aliquid habere ultra fines, neque adeo in meros limites, ſeu indiviſibilia poſſe reſolvi. Ac proinde etiam ex ipſiuſmet theſium autoris (puto) ſententia, *poſtulatum*, ex quo reſolutionem in meros fines, ſeu mera indiviſibilia, infert, ad creaturam cum valore ſumptam applicari non poſſe. Atque hic valor, cùm conſiſtat in poſitivo, eſt quidam perfectionis creatæ gradus, cui etiam agendi vis ineſt, quæ, ut ego arbitror, ſubſtantiæ naturam conſtituit. Adeo ut valor ille à Deo tributus, reverâ ſit vigor,

ſeu vis indita rebus, quam quidam fruſtra negant, non animadvertentes ſeſe ita, præter opinionem, incidere in doctrinam *Spinoſæ*, qui Deum ſolum facit ſubſtantiam, cætera ejus modos.

Atque hæc eſt origo rerum ex Deo, & nihilo; poſitivo, & privativo; perfectione, & imperfectione; valore, & limitibus; activo & paſſivo; forma (i. e. entelechia, niſu, vigore) & materia, ſeu mole, per ſe torpente, niſi quod reſiſtentiam habet. Illuſtravi iſta non nihil origine numerorum ex 0 & 1 à me obſervata, quæ *pulcherrimum eſt Emblema perpetuæ rerum creationis. ex nihilo, dependentiæ quæ à Deo.* Nam adhibita progreſſione ſimpliciſſima, nempe *dyadica*, loca decadicæ, vel quaternariæ, omnes numeri exprimi poſſunt per 0 & 1, ut in Tab. adjecta patebit; in qua geneſi numerorum, quæ maximè naturæ convenit, multa latent mira ad meditationem, imò & ad praxin, etſi non pro uſu vulgari.

0	0
1	1
10	2
11	3
100	4
101	5
110	6
111	7
1000	8

Cæterum rogo, ut Dominum *Knolleum*, datâ occaſione, etiam meo (ſi tanti videtur) nomine horteris, uti in præclaris iſtis meditationibus pergat, qualium ſimiles ſæpe ab ipſo videre velim, ſive in Mathematicis, ſive in Philoſophia illa altiore. Excitandum etiam putem ad colendam illam ſublimiorem Matheſin, quæ continet *Scientiam Infiniti*; cujus elementa quædam à me ſunt prodita, novo calculi genere propoſito, quem *Hugenius*, aliique præſtantes viri, non ſine plauſu, excepere, & quem nunc illuſtrarunt inprimis Domini *Bernoullii* fratres, & peculiari etiam diſſertatione Dominus Marchio *Hoſpitalius*, Gallus. Et compertum eſt, non aliâ meliùs ratione aperiri aditum à Geometria ad Naturam, quæ per infinitos gradus intermedios, in omni mutatione (ut ego arbitror) progrediens, characterem habet Autoris infiniti. Quæ olim mihi de noſtro ſolis incolatu, ex præclari Aſtronomi, Domini *Eimmarti*, placitis indicari curaveras, veriſſima arbitror, ſi intelligamus tellurem eſſe inter planetas, ſeu ſatellites ſolis. Sin altius aliquid ſubeſt, fatebor mentem Autoris mihi non eſſe perſpectam. *Newtonus* Mathematicus excellens aſtrorum vortices tollendos putat; ſed mihi, ut olim in Actis Lipſienſium prodidi, non tantùm conſervari poſſe, ſed etiam pulcherrimè procedere videntur, circulatione harmonica, cujus admirandas deprehendi proprietates.

De obſervatis Eimmartianis vellem aliquando noſſe diſtinctiora, ac tuis etiam doctiſſimis cogitationibus frui; ſed agnoſco occupationes tuas laborioſas, & valetudini etiam parum firmæ indoleo; meliora precatus, ſperanſque, modò in tempore tibi proſpicias; quod faciendum ſuadeo. Vale. *Dabam Hanoveræ, 29. Martii* 1698.

EPIST. II.

EPISTOLA II.

VAlde tibi obſtructus ſum, non minùs pro egregiis diſſertationibus tuis, quàm pro elegantibus delineationibus Urnarum, vellemque viciſſim aliqua re demereri poſſe. Mentem meam circa progreſſionem dyadicam optimè aſſecutus es, & præclarè etiam obſervaſti, quàm pulchra illic omnia ratione procedant. Puto autem, & utilitatem habituram ad augendam ſcientiam, etſi alioqui non ſit transferenda ad communem uſum calculandi. Certa etiam lege procedere deprehendentur notæ, pro variis proprietatibus numerorum. Nam regula generalis eſt: *Ubicumque principia ſunt, ordinata, omnia etiam derivata ordinatè progredi*, de quo jam hic meditari dudum cœpi. Et primum patet numeros naturali ordine diſpoſitos ita procedere, ut nota prima dextra ſit 0 vel 1. &c. Secunda 0 vel 0; vel 1. vel 1. &c. Tertia 0 vel 0, vel 0 vel 0; vel 1 vel 1, vel 1 vel 1. &c. Quarta 00000000 11111111 &c. quinta 0 (ſedecies) 1 (ſedecies) & ita rurſus.

0000	0
0001	1
0010	2
0011	3
0100	4
0101	5
0110	6
0111	7
1000	8
1001	9
1010	10
1011	11
1100	12
1101	13
1110	14
1111	15 &c.

Atque hoc modo apparet in prima ſede periodum, ſemper redeuntem, eſſe binariam 01; in ſecunda eſſe quaternariam 0011; in tertia octonariam; in quarta ſedenariam, & ſic porrò.

Verùm

0000000	0
0000011	3
0000110	6
0001001	9
0001100	12
0001111	15
0010010	18
0010101	21
0011000	24
0011011	27
0011110	30
0100001	33
0100100	36
0100111	39
0101010	42
0101101	45
0110000	48
0110011	51
0110110	54
0111001	57
0111100	60
0111111	63
1000010	66
1000101	69
1001000	72
1001011	75
1001110	78
1010001	81
1010100	84
1010111	87
1011010	90
1011101	93
1100000	96
1100011	99
&c.	

Verùm quod notatu digniſſimum eſt, eadem lex ordinis obſervatur, ſi ſumas non omnes ordine numeros, ſed uno omiſſo alterum quemque; nam tunc proveniunt vel omnes pares, vel omnes impares. Imò ampliùs, ſi ſumas tertium quemque, ſeu omnes ternarios, ſive diviſibiles per 3; itemque in omnibus quaternariis, & quinariis, & ita porrò; ut periodi eædem ſint, quæ naturalium. Ecce *Ternarios* in exemplum; ubi in ſede dextrà prima 01, binaria periodus; Secunda 0110, quaternaria; tertia 0010 1101, octonaria; quarta 00011100 11100011 ſedenaria; quinta 0000001111100000 1111110000011111, & ita porrò.

Eſt notandum, hic dimidiam cujuſque periodi ſemper habere notas oppoſitas notis reſpondentibus alteri dimidiæ ejuſdem periodi. v. g.

00011100 11100011 }
conſtat ex 00011100 } ubi permutatio inter 0 & 1.
& ex 11100011 }

Has aliaſque id genus obſervationes proſequendo, via aperietur ad novas & miras, atque etiam utiles, numerorum proprietates. Et, ut verbo dicam, latet in his quædam novi generis Arithmetica theoretica, quam tecum poſſimus divinam dicere, cujus tantùm primos adhuc aditus videmus. Nec dubium eſt etiam quadratos, & cubos, & alios numeros figuratos, certas quaſdam ſuæ progreſſionis leges eſſe habituros.

Similiter: prima 01. periodus binaria; ſecunda 0011, quaternaria; tertia 01011010. octonaria; quarta 00110110 11001001; ſedenaria &c. &c.

Et ſi hæc, à viginti, ac ampliùs, annis, jam in mente habuerim, ita raró tamen animum huc adjeci, ut de nominibus imponendis non cogitaverim, quia potiùs ſoleo enunciare, ad morem vulgaris Arithmeticæ, 10. per decem; 100. per centum; etſi ſignificent 2 & 4. Obiter adjiciam, ex hac expreſſione, ſine ulla demonſtratione, ſequi. Cur nummi,

mi, & pondera, progreſſionis Geometricæ duplæ, apta ſint, ut, paucisſimis datis, cætera poſſint componi. Ex. gr. quinque ponderibus unciarum, 1, 2, 4, 8, 16, combinatis confici poteſt pondus quodcunque unciarum, infra 32. Hinc monetarum examinatores hac progreſſione, in ponduſculis ſuis, utuntur. Ejus rei rationem varii indagarunt, & *Schotenius*, inter alios, in miſcellaneis, ſed per ambages; hic verum primo obtutu patet, ex. gr. quia 29. eſt 11101. etiam 10000 † 1000 † 100 † 1. erit 16 † 8 † 4 † 1.

Carteſianos præjudicia vetera novis mutaſſe, dubium nullum eſt. Rectè quidem illi omnia phænomena ſpecialia corporum, per Mechaniſmos, contingere cenſent; ſed non ſatis perſpexere, ipſos fontes Mechaniſmi oriri ex altiore cauſa; quanquam interim *Malebranchio*, *Sturmio*, aliisque inſignibus viris, non aſſentiar, putantibus nihil eſſe virtutis, actioniſque, in materia. Scilicet non ſatis percepere, quæ ſit natura ſubſtantiæ, valoriſque, quem Deus contulit rebus, qui in ſe involvit perpetuam actionem. Meo judicio longè aliud eſt in corporea ſubſtantia, quàm extenſio, & loci repletio; nempe cogitandum eſt, quid ſit illud, quod locum replet. Spatium, quemadmodum & tempus, nihil aliud ſunt, quàm ordo poſſibilium exiſtentiarum; in ſpatio ſimul, in tempore ſucceſſivè; realitaſque eorum per ſe nulla eſt, extra divinam immenſitatem, atque æternitatem. Vacuum nullum eſſe pro certo habeo. Interim materiæ, non tantùm extenſionem, ſed & vim ſeu niſum, adſcribo. Latentque in his alia multo majoris momenti. Fateor olim mihi interſtitiola vacua placuiſſe; hodie contrà ſentio; etſi, ut dixi, materiæ naturam non collocem in extenſione. Puto etiam à me monſtratum, non eſſe verum, quod ajunt, corpus eam, quam perdit, quantitatem motûs alteri dare. De potentia tamen motrice id verum deprehendi. Et ſanè potentia aliquid reale eſt; motus verò nunquam exiſtit, cùm nunquam exiſtat totus, non magis quàm tempus. Reveraque etiam ex alio capite imaginaria involvit motus. In quo conſiſtat unio animæ, & corporis, commerciumque diverſarum ſubſtantiarum, problema eſt, quod puto me ſolviſſe. Qua de re aliquando ampliùs. Atque hæc ad tuas diſſertationes volui annotare paucis. Unum hoc addens, cauſam parheliorum ab interſectione halonum, à *Gaſſendo* allatam, mihi quoque placuiſſe. Et in parheliorum explicanda ratione *Carteſium* non rectè verſatum apparebit, credo, quando Dioptrica *Hugenii*, poſthumum opus, prodibit.

Specimina *Calculi infiniteſimalis*, ſive *differentialis*, & *ſummatorii*, à me propoſiti, ante annos complures, extant in Actis Eruditorum. Ubi primùm edidi Anno 1684. Inde *Bernoullii* Helvetii, *Craigius* Scotus, Marchio *Hoſpitalius* Gallus, miro ſucceſſu ſunt ſecuti. *Nieuwentyt* Batavus partim carpere, partim in ſe, mutatis notis, transferre voluit; utrumque fruſtrà: præſertim cùm non ſatis intellexerit, nec aliquid per

ſe in ea re potuerit præſtare. In Germania neminem adhuc ſatis in hæc ingreſſum eſſe, ſum miratus.

Deſunt nobis juvenes ſpei ſingularis; meſſis multa eſt, operarii autem pauci. Et cùm Mathematicæ artes liberaliter alant cultores ſuos, plerique etiam ſe diſcere velle profiteantur, quæ πρὸς τὰ ἄλφιτα faciunt; tamen magis magiſque hæc ſtudia, inter noſtros homines, ſterileſcunt. Credo quòd nunc plerique inania, aut in ſpeciem adornata, ſectantur, quæ delibare ſufficit; à veris autem laboribus, quibus peritus excolendus eſt animus, abhorrent. Sed tuo hortatu, atque exemplo, & paucorum tui ſimilium, meliora in poſterum ſpero. Vale, *Dabam Hanoveræ* 17. *Maii* 1698.

N°. LX.

N°. LX.

ANIMADVERSIO AD DAVIDIS GREGORII Schediaſma de Catenaria, quod habetur in Actis Eruditorum A. 1698.

Excerpta ex Epiſtolâ G. G. LEIBNITII ad ***.

Ex Actis Erud. Lipſ. ann. 1699.

DOctiſſimus Mathematicus *David Gregorius* rem ab aliis jam ante ſeptennium inventam & publicè expoſitam, nempe Catenariæ naturam, & primarias proprietates, ſuo quodam modo demonſtrare aggreſſus eſt in Tranſactis Philoſophicis Anglicanis menſis Auguſti 1697. p. 633. quæ demonſtratio inde translata eſt in Acta Erud. Lipſienſia Julii 1698. p. 305. Et fieret ſanè operæ pretium, ſi res licet cognita dudum, ex novo, ſed ſolido principio derivaretur, quod ab acumine, & doctrina Auctoris expectari poterat. Neſcio quomodo tamen factum, ut principiis ab eo allatis aliquid ad ſoliditatem deſit, quod veritatis amore annotare dignum viſum eſt, ut Geometriæ ſua ſinceritas conſtet. Suffecerit autem attentè conſiderare, quomodo demonſtraverit Dn. Autor propoſitionem primam, & primariam, cui reliquæ ſuperſtruuntur, utemurque figura, & literis Gregorianis, ac verba ipſa fideliter ſequemur.

Proponit ſibi catenam FAD ſuſpenſam ex duobus extremis F & D, T. xix.
cujus imum ſeu vertex ſit A. Deinde ſumto d puncto in curva proximo Fig. 68.
ipſi D, ductaque tangente TDd axi AB occurrente in T, & ordinatis BD, bd, & in hac ſumta δd differentia ordinatarum, & ducta Dδ normali ad bd ſeu parallela ad AB, differentia abſciſſarum; probandum ſuſcipit, eam eſſe naturam curvæ catenariæ, ut ſit δd ad δD, uti conſtans quædam a, ad arcum catenæ AD. Hoc ut demonſtret, poſtquàm quædam ex Mechanicis conſtare dixit, quæ diſtinctiùs enuntiare, atque etiam applicare operæ pretium fuiſſet, ſubjicit: *Si D d exponat gravitatem abſolutam particulæ D d, ut in catena æqualiter craſſa ritè fit*, (id eſt, ſi gravitates partium catenæ ſint ut ipſarum longitudines) *d δ repræſentabit gravitatis partem eam quæ normaliter in D d agit, quaque fit, ut d D, ob catenæ flexilitatem circa d mobilis, in ſitum verticalem ſe componere conetur.* Hæc verà ſunt, ſi hunc habeant ſenſum: pondus π, (*vide figuram 69.*) eſſe ad Fig. 69.

pondus D d ut recta d δ ad rectam D d: ſeu vim, rectæ D d, ubique æqualiter gravi, ac mobili circa d, normaliter applicandam in ejus medio, ut dictam rectam in hoc ſitu ſervet, & versùs ſitum verticalem tendere impediat; adeoque & æqualem ei vi, vel ponderi π gravitationem ipſius rectæ D d, qua ad ſitum illum tendit, eſſe ad abſolutam gravitatem ipſius D d (qua ſcilicet perpendiculariter deſcenderet, ſi libera prorſus eſſet) quemadmodum d δ eſt ad ipſam D d. Pergit Dn. *Gregorius*: *Adeoque ſi* δ *d, ſive fluxio* (vel incrementum, aut elementum) *ordinatæ B D conſtans ſit* (id eſt, ſi ordinata lineæ catenariæ ponatur creſcere uniformiter). *gravitatis actio in partes correſpondentes catenæ D d normaliter exerta, etiam conſtans erit, ſeu ubique eadem*, id eſt, cujuſque rectæ D d, ſeu portionis elementaris in catena aſſumtæ *gravitatio*, qua ſitum verticalem affectat circa punctum ſuperius d, ex quo ſuſpenſa eſt (ſuppoſitum immotum) gyrare conando; erit ad gravitatem abſolutam ejuſdem portionis, ut conſtans quædam recta eſt ad illam ipſam portionem.

Pergit: *Exponatur hæc* (conſtans gravitationis quantitas) *per rectam a.* Sed hic apparet aliqua difficultas, nam hæc *Gravitationis* qua D d ſitum verticalem affectat, expoſitio, vel repræſentatio facta per rectam a, quæ aſſignabilis aſſumitur, vel ordinaria (quoniam infrà dicitur, ipſam erga
Fig. 68. A D catenam debere eſſe in ratione δ d ad δ D ſeu B D ad B T) concedi quidem poſſet, ſi id quod aſſignabilem ad eamdem gravitationem habet rationem, nempe gravitas abſoluta ipſius D d (quæ dicta eſt eſſe ad gravitationem ut D d ad δ d, ſeu ut T D ad B D) etiam exponeretur per rectam aſſignabilem. Verum id non fit, paulo ante enim gravitas illa abſoluta expoſita eſt per ipſam D d, rectam utique infinitè parvam. Alterutra ergo expoſitio rejicienda eſt, nec ſimul ſtare poſſunt. Et præterea, ſi gravitas abſoluta ipſius D d portionis elementaris catenæ, exponenda eſſet per rectam aſſignabilem, utique gravitas ipſius catenæ ex infinitis portionibus, qualis eſt D d, compoſitæ, non poſſet exponi per lineam aſſignabilem (ut mox fieri videtur, dum ejus pondus exprimitur per ipſam ejus curvam) ſed exponenda foret per lineam infinitæ magnitudinis. Et quid opus erat (niſi ad occaſionem propriæ deceptionis) exponere gravitationem illam per rectam conſtantem aſſignabilem a, cùm expoſita jam ſit per inaſſignabilem conſtantem d δ, quippe quæ gravitationem ipſius D d (ſemper eamdem) repræſentat, uti D d exponit, vel repræſentat abſolutam ejus gravitatem ſemper pro magnitudine variantem; & quemadmodum mox (licèt non rectè) dicetur, vim ſecundùm directionem D d exponi per inaſſignabilem D δ.

Pergamus cum Dn. Autore: *Porrò* (inquit) *ex ſuprà citato Lemmate Mechanico, D δ ſive fluxio Axeos A B exponet vim ſecundùm directionem ipſius d D, quæ priori conatui lineæ gravis d D ad componendum ſe in ſitum verticalem æquipolleat, eumque impedire poſſit.* Non ſatis apparet ex verbis Autoris

Autoris vel ſenſus illius Lemmatis mechanici, vel applicatio, ut quod hic affirmatur, inde duci poſſit. Sed aliunde ſatis apparet, aliquid erronei ſubeſſe oportere. Nam quæ hic affertur repræſentatio, vel expoſitio, cæteris poſitis admitti non poteſt. Quoniam enim pondus abſolutum ipſius rectæ gravis D d exponitur per ipſam rectam D d, ut ſuprà a Domino Autore eſt aſſumtum, atque adeo pondus π normaliter ad D d applicatum, (quod æquat gravitationem ipſius D d ſitum verticalem affectantis,) exponitur per rectam d δ, ſeu eſt ad gravitatem abſolutam ipſius D d, ut d δ ad D d; ideo his poſitis ajo pondus Z ſeu vim, quæ ſecundùm ipſius D d directionem impediat gyrationem, ſeu affectationem ſitûs verticalis, non poſſe repræſentari, vel exponi per rectam D δ; pondus enim Z debere eſſe infinitum; cùm quantumcunque ſit, modò finitæ ſit magnitudinis, trahendo in directione ipſa D d non poſſit retinere D d in ſitu præſenti, ut jam ab aliis eſt oſtenſum. Nempe puncto D ſemper nonnihil deſcendente fiet in D angulus aliquis ipſius d D cum filo per quod pondus Z ſuam tractionem exercet; iſque tanto magis obtuſus, ſeu ad rectam accedens, quanto majus eſt pondus Z.

Pergit: *Hæc verò vis oritur a linea gravi D A ſecundùm directionem D d trahente.* Hoc verum eſt, ſed objectionem noſtram confirmat. Nam pondus lineæ D A vel d A, eſt infinitum comparatione ponderis ipſius rectæ D d, quæ non eſt niſi infinitè parva portio ipſius d A. Cùm ergo gravitas abſoluta ſeu pondus ipſius elementaris rectæ D d exponatur per ipſam rectam D d; pondus autem π ſit ad ipſum pondus rectæ D d ut d δ ad D d, erit & ipſum pondus π infinitè parvum. Sed pondus Z, cùm ex Autoris ſententia oriatur ex ipſius catenæ D A pondere, quæ infinities continet D d, utique infinitum erit reſpectu ipſorum ponderum D d & π, adeoque per D δ exponi nequit, ſeu non poteſt eſſe ad pondera D d & π, ut recta D δ ad rectas D d & d δ.

Eſtque proinde (pergit) *cæteris manentibus lineæ D A proportionalis.* Ne hoc quidem ſequitur, ſi quidem ſenſus eſt pondus Z quod retinet rectam D d in ſitu ſuo, directione D d, eſſe ad pondera D d & π ut linea catenæ D A ſe habet ad ipſas lineas, pondera D d & π exponentes vel repræſentantes. Oſtendendum ſcilicet foret, gravitationem catenæ DA qua trahit D d in directione d D, abſolutæ ipſius gravitati eſſe æqualem, ſeu eſſe eamdem, qua traheret, ſi ſuſpenſa eſſet in Z quod non admittetur.

Concludit tandem Dn. Autor his verbis: *Eſt igitur δ d fluxio ordinatæ ad δ D fluxionem abſciſſæ, ſicut conſtans recta a ad D A curvam.* Vera eſt concluſio, ſed nihil minus quàm probata; & mirum eſt, quàm multis opus fuerit aſſumtis erroneis, ut tandem veritas prodiret. Nam, ut cætera taceam, nunc oportuit ponderis infinitè parvi π rationem ad pondus infinitè parvum D d exponi per rectæ ordinariæ *a* rationem ad rectam infinitè parvam D d; nunc contrà oportuit ponderis ordinarii Z rationem ad

pondus infinitè parvum D d exponi per rationem rectæ infinitè parvæ D δ ad rectam itidem infinitè parvam D d, ut tandem deſtruentibus ſeſe erroribus, perveniretur ad modum apparenter concludendi, eſſe duas lineas infinitè parvas δ d, δ D ut duas lineas ordinarias a & D A. Abuſus expoſitionis inaſſignabilium per aſſignabilia (aliàs permiſſæ & utilis) itemque theorematis mechanici, ut alia taceam, ſub ſpecie ſucceſſus blandiente fefellerunt. Credibile eſt, ipſum Doctiſſimum *Gregorium* hoc poſterioribus cogitationibus ingenuè agniturum; aut ſi adhuc dubitat, conſulto ſaltem Celeberrimo *Newtono*, cujus methodum ſequi profitetur, eſſe crediturum.

N°. LXI.

N°. LXI.

G. G. LEIBNITII

RESPONSIO AD DN. NIC. FATII DUILLIERII IMPUTATIONES.

Acceſſit nova Artis Analyticæ promotio ſpecimine indicata; dum Deſignatione per Numeros aſſumtitios loco Literarum, Algebra, ex Combinatoria Arte lucem capit.

Ex Actis Erud. Lipſ. anni 1700.

CUm ad me perveniſſet tractatio Domini *Nicolai Fatii Duillierii* de Curva breviſſimi deſcensûs, Solidoque minimam (in medio) reſiſtentiam habente, nuper Londini edita; miratus ſum non mediocriter, Virum a me nunquam læſum animi tam malè erga me affecti indicia dare. Dubitavi, an quicquam reponerem, cùm ſemper fuerim a litibus literariis alieniſſimus, putarimque unum eſſe honeſtum certamen inter eruditos, imò inter probos, ſi contendant non verbis, ſed rerum argumentis, uter melius poſſit mereri de re publica. Veritus tamen ſum, ne ſilentium meum in contemtum ſui traheret Vir certè minimè contemnendus: deinde publicè intereſſe judicavi, moderationis potiùs, quàm animi exacerbati ſpecimen dari. Occaſione etiam oblatâ admonendos putavi viros doctos, ut pravus ille mos ſeſe invicem impetendi dictis mordacibus, qui literas, literarumque cultores infamat, paulatim antiquetur. Idque conſilium meum Inclytæ Societati Regiæ Anglicanæ cujus ſe membrum in ipſo libri titulo profitetur Dominus *Duillierius*, & in qua idem honor mihi tanto antè fuit delatus, placiturum credidi; nulla enim bene conſtituta Societas probat Socium, præſertim inter ſeniores numeratum, nec ſuo loco habitum indignum, ab alio Socio indignè haberi. Itaque quando factum fieri infectum nequit, ſperavi impoſterum autoritatem Societatis laudatiſſimæ, ſaltem inter ſuos, huic malo obicem ponere poſſe, & laudabile exemplum deinde etiam apud alios pro efficaci ad æquanimitatem exhortatione

tatione futurum. Neque eam ſpem, irritam eſſe, ex literis Dni Secretarii Societatis ad amicum ſcriptis, intellexi.

Fortaſſe erunt qui ſuſpicabuntur, factum a me aliquid, quo jure irritaretur Dominus *Duillierius*. Equidem ſi quid tale per incogitantiam excidiſſet, tantùm admonitione opus erat: eo enim animo ſum, ut fuerim emendaturus ultrò. Sed ipſa Viri verba oſtendunt, nihil aliud habere, quo ſe læſum putet, quàm quòd non fuit nominatus inter eos, a quibus ſolutio problematis de linea breviſſimi deſcensûs a Domino *Johanne Bernoullio* propoſiti, data fuit; aut qui ſimilis argumenti ſpeciminibus effecerant, ut judicari poſſet, facilè daturos fuiſſe, ſi animum illuc adjeciſſent. Sed quî potuit nominari, cùm ipſe ſcribere ſuſtineat, ſe non fuiſſe *dignatum* edere aliquid eorum, quæ in hoc inquiſitionis genere habebat. Ita enim loquitur pag. 5. *Ejuſmodi problemata, quamvis à me non ſemel ſoluta, verbi gratiâ circa catenariam, velariam, harumque linearum identitatem, curvam deſcensûs æquabilis &c. magnopere ſemper averſatus ſum, neque ſolutiones meas publicis ſcriptis unquam dignatus ſum exponere.* Nobis ergo ignoſcenda fuit noſtra de progreſſibus ejus ignorantia.

Videtur deinde publicam cauſam agere velle, accuſatque (dicta pag. 5.) nos affectati Principatûs in Mathematicis, & tantùm non Oſtraciſmum nobis minatur. Sed hic profectò poſſem Apologia ſuperſedere, & judicium lectoribus committere, cùm non unus ex viris præclaris, nuperque doctiſſimus Dominus *Johannes Chriſtophorus Sturmius*, publicè modeſtiam meam commendarit: tantùm intereſt, quo res animo ſpectentur tranquillo, an fluctibus quibuſdam agitato. Sed argumenta tamen videamus, quibus reus peragor. Duo affert: primum proponendorum problematum, quam vocat luxuriem; deinde exiſtimationis, atque ordinis, velut ex ſolio Mathematico, ſingulis Geometris factam diſtributionem. Utrique ſatisfaciam, non tam meâ causâ, quàm utilitatis publicæ, ne mos problemata pulchra, vel utilia proponendi, & eos, qui labores ſuos præclaros impertiti ſunt, publicè laudandi, ſub odioſis nominibus traducatur.

Itaque quod primum attinet, conſtat iis, quibus nota eſt Hiſtoria noſtri temporis literaria, magnam incrementorum ſcientiæ partem problematum propoſitioni deberi: idemque in futurum licet augurari, ſi ſcilicet problemata nondum ſint in poteſtate receptæ analyſeos. Ita enim diſcitur, quæ *deſiderata* ad perfectionem artis ſuperſint, ſimulque ingenia ad *augmenta ſcientiarum* animantur. Certè ut olim Cycloidem, ita nuper Catenariam plurimum profuiſſe conſtat. Neque ego Catenariam ipſe delegi, ſed ab alio mihi propoſitam & confeſtim ſolvi, & propoſui aliis porrò. Nec Dominus *Johannes Bernoullius* in ſuo problemate lineæ breviſſimi deſcensûs diu laboravit: nempe non caſui, ſed methodo ſucceſſum debuimus.

Alterum accuſationis caput non aliud habet fundamentum, quàm quod ſolitus ſum ſtudiosè commemorare merita inſignium virorum in eo argumento

mento quod tracto. Hoc Dominus *Duillierius* vocat ex ſolio mathematico exiſtimationis, atque ordinis diſtributionem: ſed qui amant Hiſtoriam literariam, non aſpernabuntur meam diligentiam ſuum cuique tribuentis: & qui laude digna facere ſtudent, probabunt meritis laudes rependi. Cæterùm cùm notavi, non niſi ab iis datam ſolutionem curvæ breviſſimi deſcensûs, qui noſtrum calculum, aut ei ſimilem tractare norunt, an quicquam dixi falſum? Intereſt ſcilicet eorum, qui ad ſcientiam non vulgarem aſpirant, ut ſciant, qua quidque via pateat. Cumque addidi, quoſdam egregios viros idem præſtituros fuiſſe, ſi huc animum adhibuiſſent, nunquam credidiſſem, mente mea in contrarium verſa, quod æquitatis erat, ſuperbiæ adſcriptum iri. Nec tamen omnes (fateor) nominavi, a quibus talia (præſertim poſt noſtra tunc jam edita) expectare licuiſſet. Poteram exempli causâ inſignis rerum difficillimarum enodatoris *Walliſii*, ut alias, mentionem facere, cui multum omnes debemus. Poteram & ab *Hookio*, & *Halæo* (poſt viſam unius Theoriam Elaſticam, alterius Ratiocinationem de atmoſphæræ expanſione) ſed & a Dn. *Craigio* in his non parum progreſſo aliquid pulchrum ſperare. Sed ſi quis hic ſe jure poſſet queri præteritum, profectò eſſet non *Duillierius*, ſed *Romerus*, Danicæ in re Mathematica laudis conſervator, cujus pulchra interioris Geometriæ ſpecimina tunc, cùm ambo Pariſiis verſaremur, penè ſupra illius temporis captum erant, & quem ab eo tempore multa inveniſſe digniſſima, credi par eſt. Hunc quis dubitet egregium aliquid fuiſſe præſtiturum, ſi ad problemata noſtra animum appuliſſet? Ut de Nobiliſſimo Dno. *de Tſchirnhaus* nunc nihil dicam, a quo maxima quæque expectanda ſæpe ſum profeſſus, nec de Domino *La Hire*, qui utiliter id inter alia agit, ut ſua, alienaque per vias novas inventa, ad morem veterum demonſtret, nec de Domino *Varignonio*, qui & ipſe in his non vulgaria præſtitit. Sed nec omnes contemnuntur, a quibus iſta non expectantur: cùm ſint qui omnia alia agunt, non minus ingenioſa, & egregia, alia tamen. Cæterùm nuſpiam dixi, ſolos potuiſſe problema ſolvere, quorum mentionem nominatim feci; ſed tantùm ſolos, quibus noſtri calculi myſteria patuerint (quibus ſe computat Dn. *Duillierius*) ex quibus quoſdam præ cæteris honoris causâ, & meritorum hujus generis extantiorum nominavi.

Interea vel nunc apparet, quàm utile ſit laudare bene meritos, ut alii quoque ad bene merendum invitentur: & Dominus *Duillierius* medias inter querelas, Apologiam ipſe meam non animadvertens ſcribit, dum ſcilicet præteritus hoc ipſo ſe ſtimulo excitatum tandem fatetur: *cùm videamus* (inquit pag. 4.) *ſilentium noſtrum in nos verti* (id eſt, ſua publico impertiri nolentem ob ignota merita non laudari) *quod hac in re præſtitimus, exponemus.* Rectè, atque ordine. Si qua igitur in hoc genere præclara producet, hanc ex aliqua parte mihi (qui ſilendo ne ſileret admonui)

nui) debebit ipſe gloriam, Reſpublica fructum. Vellem tamen verſari jam tum maluiſſet in re non præoccupata, & perpendiſſet attentiùs, edita circa problemata breviſſimi deſcensûs. Ita enim non habuiſſet, cur quereretur, ex Newtoniana conſtructione ſolidi minimum medio reſiſtentis nullam ſibi lucem affulgere, ſed viam vidiſſet eodem perveniendi, quemadmodum Dominus Marchio *Hoſpitalius*, & Dn. *Johannes Bernoullius* præclarè oſtenderunt, qui etiam optimè animadverterunt, quòd ipſe Dominus *Duillierius* credit, proprietatem Newtonianam eſſe perplexiorem, ſuam verò ex conſideratione oſculi, vel radii curvitatis ſimpliciorem, id contra eſſe; cùm illa conſtructionem per quadraturam hyperbolæ, vel logarithmos facilè præbeat, hæc verò a differentio - differentialibus pendeat, quæ ſunt, ut nos loquimur, tranſcendentia ſecundi gradûs: quod perinde eſt, ac ſi quis problema planum ad ſectiones Conicas, immò altiores referat. Quod ſi det impoſterum Dn. *Duillierius*, quæ novam lucem præbeant, habebit nos candidos laudum ſuarum deprædicatores. Interim mei mentionem faciens aliis, inquit, diſcipulis glorietur, me certè non poteſt. (pag. 18.) Ex his, qui me non aliunde noverit, hominem valdè glorioſum, & valdè quidem ineptè glorioſum putabit. Ego verò contrario ambitionis genere libenter ipſius me Domini *Duillierii* diſcipulum gloriarer, id eſt, valdè vellem aliquid præclari ab eo doceri; quamvis ille ſe nihil a me didiciſſe prædicet: quod vereor ne in nonnullis paulo ſit verius, quàm ipſius interfuiſſet, uti vel hic ipſe libellus ejus oſtendit. Nam niſi noſtra quædam ſpreta prætervidiſſet, animadverſioni prædictæ non fuiſſet locus.

Ait jam anno 1687. proprio ſe Marte inveniſſe fundamenta univerſa, & pleraſque regulas calculi, quem nos differentialem vocamus. Credamus ita eſſe; (ſaltem pro parte, nam ne nunc quidem omnia hujus calculi fundamenta ipſi ſatis nota putem; etſi ea fiducia, tanquam cuncta jam effuderimus, promptior ad provocandum factus fuiſſe videatur) jam manifeſtariam tenemus cauſam animi a me alienioris, quam fortaſſe ipſe non ſatis animadvertit: uti in verſu eſt, non amo te, nec poſſum dicere quare. Neque enim mirum eſt odiſſe pronam, quam vocat (pag. 18.), ſedulitatem meam, qua mea ejuſdem calculi elementa triennio antè, quàm ipſi ſuccurrerent, edens, quas ſe meruiſſe putavit laudes, innocenter præoccupavi; quemadmodum quidam Veterum dicebat: pereant qui ante nos noſtra dixere. Ego nihil malignum ipſi imputo, ſed ea tamen eſt naturæ humanæ infirmitas, ut mirandum potiùs cenſerem, ſi juvenis tunc quidem, & ad præclara tendens, gloriæque cupidus, his ſtimulis non ceſſiſſet. Pauci ad tantam virtutem perveniunt, ut noxiam ſibi virtutem alterius amare poſſint; quanto minùs, ſi (ut ipſe de me) ſuſpiciones ſibi fingant (uti certè ſuſpicax eſt averſus animus) non recta via ſed obliquis artibus alium ad laudem eſſe graſſatum? Libenter enim affectum, quo

quo nudo nobis ipſi diſpliceremus, juſtitiæ zelo velamus. Ego verò, quanto magis intelligo hos animorum receſſus, eo minùs aliquid humani paſſo iraſcor. Interim minùs (credo) feſtinationem meam culpabit, ubi intelliget, ex *Horatii* præcepto nonum in annum, & ampliùs me meditata preſſiſſe, nec cùm aliqua edidi anno 1684, vel gloriam, vel invidiam expectaſſe, id ferè tunc agentem, ut amicis meis Actorum Lipſienſium curatoribus ſatisfacerem, qui aliquid a me ſubinde poſtulabant: rei famam caſus deinde potiùs dedit, quàm ratio, aut ſtudium meum.

Hactenus Dominus *Duillierius* vel ſuam, vel publicam, ut putabat, rem egit: nunc verò cùm eminentis Geometræ *Iſaaci Newtoni*, aliorumque etiam cauſam, tamquam contra me ſuſcipit; ignoſcet mihi, ſi non ad omnia reſpondeo, donec mandatum procuratorium tum a cæteris, tum maximè a Domino *Newtono* oſtendat, cum quo nulla mihi ſimultas fuit. Certè Vir egregius aliquoties locutus amicis meis ſemper bene de me ſentire viſus eſt, neque unquam, quod ſciam, querelas jecit: publicè autem ita mecum egit, ut iniquus ſim, ſi querar. Ego verò libenter ejus ingentia merita oblatis occaſionibus prædicavi, & ipſe ſcit unus omnium optimè, ſatiſque indicavit publicè, cùm ſua Mathematica Naturæ Principia publicaret anno 1687, nova quædam inventa Geometrica, quæ ipſi communia mecum fuere, neutrum luci ab altero acceptæ, ſed meditationibus quemque ſuis debere, & a me jam decennio antè expoſita fuiſſe. Certè cùm Elementa calculi mea edidi anno 1684, ne conſtabat quidem mihi aliud de inventis ejus in hoc genere, quàm quod ipſe olim ſignificaverat in literis, poſſe ſe tangentes invenire non ſublatis irrationalibus, quod *Hugenius* quoque ſe poſſe mihi ſignificavit poſtea, etſi cæterorum iſtius calculi adhuc expers: ſed majora multo conſecutum *Newtonum*, viſo demum libro Principiorum ejus, ſatis intellexi. Calculum tamen differentiali tam ſimilem ab eo exerceri, non antè didicimus, quàm cùm non ita pridem magni Geometræ *Johannis Walliſii* operum volumina primum & ſecundum prodiere, *Hugenius*que curioſitati meæ favens locum inde deſcriptum ad *Newtonum* pertinentem mihi maturè tranſmiſit. Cæterum etſi poſt tanta jam beneficia in publicum collata, iniquum ſit aliquid a Domino *Newtono* exigere, quod novum quærendi laborem poſtulet, non poſſum tamen mihi temperare, quin hac oblata occaſione maximi ingenii Mathematicum publicè rogem, ut memor humanorum caſuum, & communis utilitatis, diutiùs ne premat præclaras reliquas, ac jam paratas meditationes ſuas, quibus cùm ſcientias mathematicas, tum præſertim naturæ arcana porrò illuſtrare poteſt. Quòd ſi nulla movet tantarum gloria rerum (quamquam vix quicquam ei, quam nactus eſt, addi poſſit) illud ſaltem cogitet, generoſum animum nihil magis ad ſe pertinere putare, quàm ut optimè de humano genere mereatur.

Unum tantùm ſupereſt, in quo video Apologiâ aliquâ mihi eſſe opus.

Cùm Dominus *Johannes Bernoullius* programma, quo invitabantur Geometræ ad quærendam lineam breviſſimi deſcensûs, ſpeciatim ad Dominum *Newtonum* miſiſſet, ſparſæ ſunt voces in Anglia, *Newtonum* a me fuiſſe provocatum: eaque ſententia etiam Domini *Duillierii* eſſe videtur, tamquam ego ſuaſor mittendi, atque impulſor fuerim. Sed inſcio planè me factum, ipſe Dominus *Bernoullius* teſtabitur. Quòd ſi Domino *Duillierio* credimus, ægrè illud tuliſſe *Newtonum*, (uti certè fatendum, immunitatem ei ab hoc laboris genere pleniſſimam deberi) ſaltem, ut ſpero, me non ægrè nunc abſolvet. Itaque nec ad me pertinet, quod queri videtur Dominus *Duillierius*, invitationem nullam ad ſe perveniſſe, cùm ait pag. 4, ſe quoque ſi qua invitatione dignus viſus fuiſſet literis, ſuas dudum ſolutiones fuiſſe exhibiturum. Sed habet nunc quoque campum in quo ſe exerceat, & verò ſi propriis meditationibus tantùm ſe profeciſſe perſuaſum cupit omnibus, problemata aggredi poteſt Domini *Johannis Bernoullii*, de quibus poſt editas jam ſolutiones curvæ breviſſimi deſcensûs in Actis Eruditorum, Diarioque Gallico (vid. *Journal des Savans*, *A.* 1697, *pag.* 395, *edit. Pariſ.*) facta mentio eſt, ſed ita, quemadmodum nondum extant ſolutiones: ut ſcilicet pro Parabolis, vel pro Ellipſibus ordinatim datis, quarum mentio fit in Diario Gallico loco dicto, intelligantur curvæ quæcumque ordinatim datæ, etiam quæ non ſint ſimiles inter ſe, & ſolutio detur ſaltem ex ſuppoſitis quadraturis: cùm in iſta inquiſitione ſit adhuc aliquid, quod noſtra etiam edita tenentem morari poſſit. Quale etiam eſt problema a Domino *Joh. Bernoullio* propoſitum in Actis Erud. Lipſ. Maii 1697. pag. 211, invenire curvam, aut ſaltem proprietatem tangentium curvæ, quæ curvas etiam tranſcendentes ordinatim datas ſecet ad angulos rectos. Nam ſi ea tantùm producit, quorum jam datæ ſunt a nobis methodi, ſatis intelligit, quantum proprio Marte conſequi potuerit, hinc non probari. Si quid in Phyſicis Theoriæ Gravitatis Newtonianæ adjecit, uti quidem pag. 18. inſinuat, pariet hoc ipſi alterius generis laudem.

Quod alios quoſdam attinet de quibus me pariter, ac de ſe non bene meritum ait Dn. *Duillierius* pag. 19, nihil adderem (cùm neminem de me querentem norim) niſi ſpeciatim de Theorematibus quibuſdam Domini *Moyvræi* circa ſeries infinitas mentionem injeciſſet. Equidem talia hunc edidiſſe Theoremata ignorabam, donec nuper amicus ex Anglia redux ſecum attulit volumen poſtremum Tranſactorum Philoſophicorum. Memini cùm alios, tum Dominum *Newtonum* & me quoque, in iſtis ſeriebus ante multos annos verſari, ut in iis hoſpes Domino *Duillierio* videri non debeam. Interim Domino *Moyvræo* gratias agendas, quòd hunc laborem perutilem, & valdè ingenioſum velut pro derelicto habitum, in ſe ſuſcepit, rogandumque etiam cenſeo, ut in eo genere pergat, ubi multa adhuc reſtant. Diu enim eſt, quòd complura Theoremata ampla ſatis ipſe, tam pro *finitis* ſeu *indefinitis*, quàm pro *infinitis* formulis fabricans conſideravi,

ravi, ſi proſequerentur hoc ſtudium, qui poſſunt, & intelligunt, habituros nos quaſdam *Canonum* utiliſſimorum velut *tabulas*, præſtituras in *analyticis* aliquid illis uſibus ſimile, quos in Geometria practica tabulæ ſinuum, aliorumve numerorum præbent: ſcilicet ut calculos ſemel factos non ſemper repetere neceſſe ſit, uti defectu Canonum quotidie facimus. Sic optarem haberi generales Canones pro ſublatione irrationalium, itemque pro inventione maximi communis diviſoris, ac ſublatione literarum, reductioneque æquationum plurium plures incognitas habentium ad pauciores incognitarum pauciorum, ac denique ad unam unius.

Sed hæc nihil habent commune aut ſimile cum illis Methodis noſtris, quibus problemata catenariæ, aut lineæ breviſſimi deſcensûs, aliaque id genus interioris Geometriæ ſolvimus; ut adeo non poſſim in animum inducere meum, ipſi Domino *Moyvræo* videri injurioſum, quòd nulla ipſius mentio facta eſt, cùm de hujuſmodi problematibus ageretur, quod tamen Dominus *Duillierius* inſinuat; qui cùm me ignarum in illo ſolio Mathematico collocaſſet, unde, ſi Diis placet, exiſtimationem ſingulis Geometris diſtribuo, hæc pag. 19. ſubjicit: *ſed ignoſcendum viro, ſi minùs de me, aliiſque, ſaltem de Mathematicis rebus optimè merito: aliis dico, qua enim æquitate, ut cæteros taceam, lineæ breviſſimi deſcensûs inventio, ſubtilis quidem illa, & egregia, opponetur eximiis illis Theorematis usûs prorſus infiniti, quæ Dominus* de Moyvre *in Tranſactionibus Philoſophicis communicavit?* Equidem credo nemini præter Dominum *Duillierium* in mentem veniſſe, ut opponat inter ſe res toto adeo cœlo diverſas. Interim conſiderandum relinquo, qua ipſa æquitate diſſimulet, aut qua animi præventione oblivifcatur, non hic de problemate aliquo particulari lineæ breviſſimi deſcensûs, ſed de Methodo ſummi momenti, valdeque diffuſa circa maxima, & minima fuiſſe actum: quam ante Dominum *Newtonum*, & me, nullus, quod ſciam, Geometra habuit; uti ante hunc maximi nominis Geometram nemo ſpecimine publicè dato, ſe habere probavit; ante Dominos *Bernoullios* & me nullus communicavit: cùm tamen conſtet, eſſe Methodi de maximis & minimis partem ſublimiorem, & in applicatione Geometriæ ad Mechanicen, naturamque ſummè utilem, cùm ex omnibus figuris poſſibilibus eligitur ad aliquid præſtandum aptiſſima. Magnum ſanè Geometram *Huddenium* de his jam cogitaſſe apparet; ſed quid conſecutus ſit, non conſtat. *Hugenius* certè (quamvis & ipſe in Geometria ante detectum a me Calculum recepta, ſummus) tamen narrante Domino *Duillierio*, tale quid fruſtrà tentavit: haud dubiè quòd nondum tunc ſatis uſum noſtrarum artium perſpexiſſet, quem ubi tandem agnovit, mirè illis & Methodis, & (quæ Dominus *Duillierius* adeo averſatur) problematis, eſt delectatus, candideque faſſus, publicè ac privatim, jam apertum ad illa aditum, quæ alia ratione vix ſperari poſſe videbantur.

Poſtremò ne vacua ſit hæc Apologia, occaſione Theorematis Moyvreani

Zz 3 noſtrum

noſtrum infinities generalius ſubjicere placet; adhibendo ***novum deſignationis genus***, cujus magnum in re analytica, & combinatoria uſum reperimus, de quo aliàs fuſiùs. Nempe modum damus extrahendi radicem, ſeu valorem quantitatis cujuſcunque ut Z, ex æquatione generaliſſimè determinante ipſam Z, per aliam quamcumque, Y. Nempe æquatio data generaliſſima relationis Z ad Y ſic exprimetur $0 = (01\,Y + 02\,Y^2 + 03\,Y^3$ &c.$) + (-10 + 11\,Y + 12\,Y^2 + 13\,Y^3$ &c.$)\,Z^1 + (20 + 21\,Y + 22\,Y^2 + 23\,Y^3$ &c.$)\,Z^2 +$ &c. Ubi hoc Calculi commoditatem, ut valores quæſitorum fiant affirmativi, ideo ipſi 10 præfiximus ſignum —. Quæritur jam valor ipſius Z, ſeu quæritur, in æquatione $Z = 101\,Y + 102\,Y^2 + 103\,Y^3 + 104\,Y^4 + 105\,Y^5 +$ &c. qui ſint valores *numerorum* quæſitorum *aſſumtitiorum* 101, 102, 103 &c. (quos *majuſculos* hic vocabimus) per numeros aſſumtitios æquationis datæ (quos vocabimus *minuſculos*) nempe per ipſos 01, 02, 03, &c. 10, 11, 12, &c. 20, 21, 23, &c. &c. Dico fore $101 = 01 : 10$. Et $102 = 02 + 11.\,101 + 20.\,101^2,: 10$. Et $103 = 03 + 11.\,102 + 12.\,101 + (2)\,20.\,101.\,102 + 21.\,101^2 + 30.\,103^3,: 10$. Et $104 = 04 + 11.\,103 + 12.\,102 + 13.\,101 + (2)\,20.\,101.\,103 + (2)\,21.\,101.\,102 + 22.\,101^2. + (3)\,30.\,101^2.\,102 + 31.\,101^3 + 40.\,101^4,: 10$. Eodemque modo habebuntur 105, 106, &c. hac *regula generali*, ut denominator cujuſque valoris ſit 10, numerator verò conſtet ex omnibus membris poſſibilibus in unum additis *lege combinationis* ſequenti formatis, & multiplicatis reſpectivè per *numeros tranſpoſitionum* formæ, in membro ex majuſculis conflatæ convenientes, qui *numeri* ſunt *veri*, parentheſibus incluſi. Porrò in Minuſculis ut 01, 02, 03, 10, 11, 12, 20, 21, 22, &c. nota prior ſignificat ad quam potentiam ipſius Z, nota poſterior ad quam potentiam ipſius Y, numerus minuſculus pertineat in æquatione data. In Majuſculis (ut 101, 102, 103, &c.) nota prima (hoc loco 1) nihil aliud eſt quàm nota majuſculi; nota verò ultima indicat ad quam Majuſculus pertineat potentiam ipſius Y in æquatione quæſita, ſeu valore ipſius Z. Jam *Lex Combinationis* hæc eſt; notæ ultimæ *numerorum ſuppoſititiorum* vel aſſumtitiorum membri cujuſque formanto eamdem ſummam, æqualem notæ ultimæ majuſculi, cujus membra ingrediuntur valorem: & in membro quolibet minuſculus non eſto niſi unicus, majuſculi autem tot, quot nota prior in minuſculo habet unitates: ita ſimul omnia cujuſque valoris membra poſſibilia determinantur. Ex hoc jam theoremate habetur non tantùm extractio radicis definitæ ex æquatione unius incognitæ finita vel infinita; ſed etiam valor indefinitus, qualis exempli gratiâ deſideratur, cùm quæritur valor generalis ordinatæ ad Curvam aliquam,

ſive

ſive Algebraicam ſive tranſcendentem. Theorema verò Dni *Moyvræi* hujus noſtri eſt caſus ſpecialis qui prodit, ſi omnes minuſculi ſint æquales nihilo, præter ſolos, primi ordinis, 01, 02, 03, &c. & 10, 20, 30 &c. ita ut ſolis curvis applicari id poſſit, in quarum æquatione duæ coordinatæ in ſe invicem non ducuntur. Non tamen dubitem, & ad hæc, & ad alia abſtruſiora eum pervenire potuiſſe, aut poſſe, ſi ut jam rogavimus, pergere in tam utili inquiſitione velit. Videbunt autem intelligentes *novam Analyticæ promotionem* in hac noſtra *deſignatione per Numeros loco literarum*, qui adeo fictitii, ſeu ſuppoſititii ſunt, contineri. Nam cùm mens noſtra ſæpiſſimè pro rebus cogitandis notas adhibere debeat, & *characteriſtica* ſit maximum meditandi ſubſidium, conſequens eſt, tanto utiliores eſſe notas, quanto magis exprimunt rerum relationes. Unde porrò ſequitur, litteras Algebraicas indiſcriminatim adhibitas non ſatis eſſe utiles, quia ob vagam generalitatem ſuam non admonent mentem relationis, quam ex prima ſuppoſitione ſua habent inter ſe invicem. Hinc ut nonnihil ſuccurramus defectui, ſolemus interdum (imprimis cùm multæ adhibendæ ſunt) in ordine earum ſubſidium quærere. Sed ubi magna eſt, nec ſimplex varietas, utiliſſimum reperi ad numeros recurri, cùm & ipſæ literæ apud multas gentes ordine ſuo numeros ſignificent. Numeros autem intelligo fictitios, pro literis ſtantes, etſi interdum tali arte adhibere liceat, ut ſimul haberi pro veris, & examen calculi novenarium, vel aliud ſubire poſſint. Hæc autem deſignatio quantæ utilitatis ſit ad Canones novos, utiles, & latè fuſos, cùm ex præſenti theoremate judicari poteſt, tum progreſſu temporis, ubi eæ, quas opto, *Canonum Analyticorum Tabulæ* condentur, magis apparebit. Atque ita demum per Characteriſticam ex Combinatoria arte, Algebra ei ſubordinata perficitur. Combinatoriam autem (quam animo complexus ſum) ex ea, quam penè puer conſcripſi, & anno 1666 edidi (me inconſulto ante annos aliquot recuſam) nolim æſtimari; tametſi jam tum quaſdam meditationes non pœnitendas, nec momenti nullius aſperſerim.

N°. LXII.

N°. LXII.

G. G. LEIBNITII DECLARATIO,

Occaſione Epiſtolæ a Dn. *Jac. Bernoullio* ad Dn. *Johannem* Fratrem ſcriptæ, & typis editæ, expreſſa.

Ex Actis Erudit. Lipſ. anni 1701.

Miſit mihi Dn. *Jacobus Bernoullius* Baſileenſis Profeſſor Epiſtolam ſuam ad Dn. *Johannem Bernoullium* Profeſſorem Groninganum, qua ſanè non obſcurè neceſſitatem aliquam interloquendi imponere voluiſſe videtur. Ego ambos in tantum æſtimo, in quantum æſtimari profundiſſimum in Mathematicis ingenium poteſt; debeo utrique plurimum, ſed reſpublica magis, quòd eorum potiſſimum tum occaſionibus, tum inventis ſparſa ſemina Methodi meæ tantum bonæ frugis dedere; itaque ambos mihi peramicos habeo, voloque, & licèt crebrius mihi cum juniore literarum commercium ſit, pluſque adeo ille ea ratione me juverit; non ideo vel ipſe poſtulat, vel ego præſtarem, ut cùm de veritate & juſtitia agitur, detrimento earum videar alterutri vel minimum faviſſe. Neque ego judicis officium aut in me recepi unquam, aut recipiam ſolus. Interea diſſimulare diutiùs nec poſſum, nec debeo, Dn. *Joh. Bernoullium* maturrimè, ut ipſe publicè ſignificavit, ad me miſiſſe ſolutiones fraternorum problematum, atque etiam analyſin ipſam, eamque duplicem, directam & indirectam: legi tunc ſtatim & probavi; non tamen legi ea attentione animi, qua opus eſſet ad controverſiam inter duos egregios viros dijudicandam, quod addo, ne quis me ideo judicis perſonam ſumere putet. Addam in fidem verba excerpta ex literis tunc a me Groningam datis.

26. *Maii* 1697.

Mitto quæ in Actis Maii de curva Brachyſtochrona variorum ſolutiones editæ ſunt .... volui ut ſtatim acciperes, quoniam Dn. Frater tuus tibi potiſſimum nova problemata proponit termino & præmio ſtatuto.

15. *Junii ejuſdem anni.*

Primo Curſore tuas Dn. *Menkenio* miſi, ut maturè publicetur, te ſolu-

ſolutiones fraternorum problematum breviſſimo tempore dediſſe.

29. *Jul.*

Magna cum voluptate vidi Methodum maximi .... pulchrè a te in rem præſentem iſoperimetrarum uſurpatam.

Hæc olim ſcripta repeto, ne nunc videar aliquid alterutri dare. Analyſis nuperrima edita Baſileæ (ut ex catalogo Francofurtano didici) nondum ad me pervenit.

De cætero valdè opto, atque etiam rogo, ut par nobile Fratrum æmulationem interioris Matheſeos ſtudiis quantumvis utilem, ita moderetur, ne ſequius homines judicent de ſcientiis, ſi videant ingenio tanto, tamque profundo viros, & quod caput eſt, fratres, in cauſa non gravi, imperare affectibus non potuiſſe.

N°. LXIII.

MEMOIRE DE M^R. G. G. LEIBNIZ

Touchant ſon ſentiment ſur le Calcul différentiel.

Tiré des Mémoires pour l'Hiſtoire des Sciences &c. (*Journal de Trevoux*) *année* 1701.

UN des Journaux de Trevoux contient quelque méthode de Mr. *Jaques Bernoulli*, & y méle des réflexions ſur le calcul des différences, où j'ai tant de part. L'Auteur de ces réflexions ſemble trouver le chemin par l'infini, & l'infini de l'infini pas aſſez ſûr, & trop éloigné de la méthode des Anciens. Mais il aura la bonté de conſidérer que ſi les découvertes ſont conſidérables, la nouveauté de la méthode en reléve plutôt la beauté. A l'égard de la ſureté du chemin, le livre de Mr. le Marquis *de l'Hoſpital* lui pourra donner ſatisfaction. J'ajoûterai même à ce que cet illuſtre Mathématicien en a dit, qu'on n'a pas beſoin de prendre l'infini ici à la rigueur, mais ſeulement comme lorſqu'on dit dans l'optique, que les rayons du Soleil viennent d'un point infiniment éloigné, & ainſi ſont eſtimés parallèles. Et quand il y a pluſieurs degrés d'infini, ou infiniment petits, c'eſt comme le globe de la Terre eſt eſtimé un point à l'égard de la diſtance des fixes; & une boule que nous manions eſt encore un point en comparaiſon du ſemidiamétre du globe de la Terre.

De ſorte que la diſtance des fixes eſt un infiniment infini, ou infini de l'infini, par rapport au diamétre de la boule. Car au lieu de l'infini ou de l'infiniment petit, on prend des quantités auſſi grandes, & auſſi petites qu'il faut pour que l'erreur ſoit moindre que l'erreur donnée : de ſorte qu'on ne différe du ſtile d'*Archimède* que dans les expreſſions, qui ſont plus directes dans nôtre méthode & plus conformes à l'art d'inventer.

N°. LXIV.

EXTRAIT D'UNE LETTRE DE Mr. LEIBNIZ

A Mr. VARIGNON,

Contenant l'explication de ce qu'on a rapporté de lui dans les Mémoires de Trevoux des mois de Novembre & Décembre de l'année 1701.

Tiré du Journal des Savans de l'année 1702.

JE vous ſuis bien obligé, Monſieur, & à vos Savans, qui me font l'honneur de faire quelque réflexion ſur ce que j'avois écrit à un de mes amis, à l'occaſion de ce qu'on avoit mis dans le Journal de Trevoux contre le Calcul des Différences & des Sommes. Je ne me ſouviens pas aſſez des expreſſions dont je puis m'être ſervi; mais mon deſſein a été de marquer qu'on n'a pas beſoin de faire dépendre l'Analyſe Mathématique des controverſes Métaphyſiques, ni d'aſſurer qu'il y a dans la nature des lignes infiniment petites à la rigueur, en comparaiſon des notres, ni par conſéquent qu'il y a des lignes infiniment plus grandes que les notres. C'eſt pourquoi afin d'éviter ces ſubtilités, j'ai crû que pour rendre le raiſonnement ſenſible à tout le monde, il ſuffiſoit d'expliquer ici l'infini par l'incomparable, c'eſt-à-dire, de concevoir des quantités incomparablement plus grandes ou plus petites que les nôtres, ce qui fournit autant qu'on veut de degrés d'incomparables, puiſque ce qui eſt incompablement plus petit, entre inutilement en ligne de compte à l'égard de celui qui eſt incomparablement plus grand que lui. C'eſt ainſi qu'une parcelle de matiére magnétique, qui paſſe à travers du verre, n'eſt pas comparable avec un grain de ſable, ni ce grain avec le globe de la Terre,

ni ce globe avec le Firmament. Et c'eſt pour cet effet que j'ai donné un jour des Lemmes des incomparables dans les Actes de Leipſic, qu'on peut entendre comme on veut, ſoit des infinis à la rigueur, ſoit des grandeurs ſeulement qui n'entrent point en ligne de compte les unes au prix des autres. Mais il faut conſidérer en même tems, que ces incomparables communs mêmes, n'étant nullement fixes, ou déterminés, & pouvant être pris auſſi petits qu'on veut dans nos raiſonnemens Géométriques, font l'effet des infiniment petits rigoureux, puiſqu'un adverſaire voulant contredire à notre énonciation, il s'enſuit par notre calcul, que l'erreur ſera moindre qu'aucune erreur qu'il pourra aſſigner; étant en notre pouvoir de prendre cet incomparablement petit, aſſez petit pour cela, puiſqu'on peut toujours prendre une grandeur auſſi petite qu'on veut. C'eſt peut-être ce que vous entendez, Monſieur, en parlant de l'inépuiſable; & c'eſt ſans doute en cela que conſiſte la démonſtration rigoureuſe du calcul infinitéſimal, dont nous nous ſervons, & qui a cela de commode, qu'il donne directement, & viſiblement, & d'une maniére propre à marquer la ſource de l'invention, ce que les Anciens comme *Archimède* donnoient par circuit dans leurs réductions *ad abſurdum*; ne pouvant pas, faute d'un tel calcul, parvenir à des vérités, ou ſolutions débarraſſées, quoiqu'ils poſſédaſſent le fondement de l'invention; d'où il s'enſuit que ſi quelqu'un n'admet point les lignes infinies & infiniment petites à la rigueur métaphyſique & comme des choſes réelles, il peut s'en ſervir ſurement comme de notions idéales, qui abrégent le raiſonnement; ſemblables à ce qu'on appelle Racines imaginaires dans l'Analyſe commune, (comme par exemple $\sqrt{--2}$). Leſquelles, toutes imaginaires qu'on les appelle, ne laiſſent pas d'être utiles, & même néceſſaires à exprimer analytiquement des grandeurs réelles; étant impoſſible, par exemple, d'exprimer ſans l'intervention des imaginaires, la valeur analytique d'une droite néceſſaire à faire la triſection de l'angle donné. Tout comme on ne ſauroit établir notre calcul des Tranſcendantes ſans employer les différences qui ſont ſur le point d'évanouïr, en prenant tout d'un coup l'incomparablement petit, au lieu de ce qu'on peut aſſigner toujours plus petit à l'infini. C'eſt encore de la même façon qu'on conçoit des dimenſions au delà de trois, & même des puiſſances dont les expoſans ne ſont pas des nombres ordinaires; le tout pour établir des idées propres à abréger les raiſonnemens, & fondées en réalités.

Cependant il ne faut point s'imaginer que la ſcience de l'infini eſt dégradée par cette explication, & réduite à des fictions; car il reſte toujours un infini ſyncatégorématique, comme parle l'Ecole; & il demeure vrai, par exemple, que 2 eſt autant que $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} +$ &c. Ce qui eſt une *Séries* infinie, dans laquelle toutes les fractions, dont les Numerateurs ſont l'unité, & les Dénominateurs de progreſſion Géométrique

double, ſont compriſes à la fois ; quoiqu'on n'y employe toujours que des nombres ordinaires ; & quoiqu'on n'y faſſe point entrer aucune fraction infiniment petite, ou dont le dénominateur ſoit un nombre infini. De plus les Racines imaginaires ont leur *fundamentum in re*, de ſorte que feu M. *Huygens*, lorſque je lui communiquai que $\sqrt[2]{1+\sqrt[2]{-3}} + \sqrt[2]{1-\sqrt[2]{-3}}$ eſt égal à $\sqrt[2]{6}$, le trouva ſi admirable, qu'il me répondit qu'il y a là dedans quelque choſe qui nous eſt incompréhenſible. On peut dire de même, que les infinis & infiniment petits ſont tellement fondés, que tout ſe fait dans la Géométrie, & même dans la nature, comme ſi c'étoient de parfaites réalités : Témoins non-ſeulement notre Analyſe Geométrique des Tranſcendantes, mais encore ma loi de la continuité, en vertu de laquelle il eſt permis de conſidérer le repos comme un mouvement infiniment petit, (c'eſt-à-dire, comme équivalent à une eſpèce de ſon contradictoire,) & la Coincidence comme une diſtance infiniment petite, & l'égalité comme la derniére des inégalités &c. Loi que j'ai expliquée & appliquée autrefois dans les Nouvelles de la République des Lettres de M. *Bayle*, à l'occaſion des Regles du mouvement *de Deſcartes* & du R. P. *de Malebranche*, & dont je remarquai depuis (par la ſeconde édition des Règles de ce Père, faites après) que toute la force n'avoit pas été aſſez conſidérée. Cependant on peut dire en général, que toute la continuité eſt une choſe idéale, & qu'il n'y a jamais rien dans la nature, qui ait des parties parfaitement uniformes : Mais en récompenſe le réel ne laiſſe pas de ſe gouverner parfaitement par l'idéal & l'abſtrait ; & il ſe trouve que les Règles du fini réuſſiſſent dans l'infini, comme s'il y avoit des Atomes (c'eſt-à-dire, des élémens aſſignables de la matiére,) quoiqu'il n'y en ait point, la matiére étant actuellement ſous-diviſible ſans fin, & que *vice verſâ* les Règles de l'infini réuſſiſſent dans le fini, comme s'il y avoit des infiniment petits Métaphyſiques, quoiqu'on n'en ait point beſoin, & que la diviſion de la matiére ne parvienne jamais à des parcelles infiniment petites. C'eſt parce que tout ſe gouverne par raiſon, & qu'autrement il n'y auroit point de ſcience ni de Règle ; ce qui ne ſeroit point conforme avec la nature du ſouverain Principe.

N°. LXV.

N°. LXV.

SPECIMEN NOVUM ANALYSEOS

Pro Scientia Infiniti, circa Summas & Quadraturas.

Ex Actis Eruditorum anni 1702.

UT in Algebra reciprocæ ſibi ſunt *Potentiæ & Radices*, ita in calculo infiniteſimali *Differentiæ & Summæ* : & uti in Algebra, ſeu ſcientia generali finitæ magnitudinis, potiſſimus ſcopus eſt *extrahere radices* formularum, ita in ſcientia infiniti *invenire ſummas* ſerierum ; quæ cùm ex terminis conſtant continuè, ſeu elementariter creſcentibus, nihil aliud ſunt, quàm quadraturæ, vel areæ figurarum. Et quemadmodum aliæ radices *puræ* ſunt, cùm valores ex ſolis cognitis habentur ; aliæ *affectæ*, cùm ipſæ earum potentiæ valorem ipſarum ingrediuntur : ita quæ ſummanda ſunt, aut purè & planè ſunt cognita, aut rurſus implicant ſummam quæſitam, ut ſi ſit $dy - ayxdx :, ax + yy$, ubi y ſumma quæſita ingreditur valorem ſummandi dy. Et utrobique artis eſt (nondum abſolutæ, quantum quidem in publicum conſtet) reducere affectas expreſſiones ad puras; quod in calculo infiniteſimali eſt *reducere æquationes differentiales* cujuſcumque gradûs (nempe differentiales, differentio-differentiales &c.) *ad quadraturas* ; atque adeo ſuppoſitis quadraturis ex data *tangentium* aut *oſculationum* cujuſcumque gradûs proprietate lineam invenire. In ipſis autem rurſus *quadraturis* magni res momenti foret, *quod nunc agimus*, reducere compoſitas ad ſimpliciores. Atque hæc eſt analyſis Tetragoniſtica, in qua nonnullos a multis annis progreſſus feci. Nempe cùm vix quadraturam meam Arithmeticam inveniſſem, per reductionem tetragoniſmi circularis ad quadraturam rationalem, comperto ſcilicet $\int dx : (1 + xx)$ pendere ex quadratura circuli ; mox animadverti, omnes quadraturas, quæ reductæ ſunt ad ſummationem formulæ rationalis, eo ipſo ad certa tandem capita ſimpliciſſimarum ſummationum revocari poſſe. Quod qua ratione fieri debeat, oſtendemus novo genere Reſolutionis, *Producto* ſcilicet *ex multiplicatione converſo in Totum conflatum ex additione* ; nempe transformatione fractionis denominatorem habentis multiplicatione radicum ſuarum continua ut-

cumque exaltatum, in aggregatum ex fractionibus ſimplices tantùm denominatores habentibus. *Rationalem* autem quantitatem, vel formulam hìc voco, cùm indeterminata quantitas, velut hoc loco x, non ingreditur vinculum; nam conſtantes utrum rationales ſint, an ſurdæ, non curatur.

Sit formula quæcumque finita rationalis, $\frac{\alpha + \beta x + \gamma\, xx + \delta x^3 + \ldots}{\lambda + \mu x + \xi\, xx + \pi x^3 + \ldots}$ Hanc demptis integris puris ajo poſſe oſtendi æqualem aggregato fractionum, quarum Numerator ſit conſtans, ſeu ſine x, denominator autem ſit ſimplex; ita ut quævis harum fractionum ſit qualis $\frac{h}{x + b.}$ quod qui fieri poſſit, ſic oſtendo. Primum ex Algebra ſuppono, diviſores ſimplices cujuſque formulæ rationalis integræ utcumque cognitos; ſunt enim iidem cum radicibus æquationis, quæ prodirent, ſi formula pro æquatione haberetur. Exempli gratiâ, formula $xx = \frac{ax}{b} + ab$ habet diviſores $x - a$ & $x - b$; & eadem ſi eſſet æquatio, ſeu æqualis nihilo, haberet has ipſas radices nihilo æquales, ita ut x valeret a vel b. Itaque ex ſuppoſitis reſolutionibus æquationum Algebraicis, habentur diviſores formularum, & noſtra hæc Analyſis infiniteſimalis Analyſin Algebraicam, ut ſuperior inferiorem, ſupponit. Propoſitam nunc formulam denominatoris, nempe $\pi x^3 + \xi xx + \mu x + \lambda$ vel aliam altiorem, dividendo per π, ſi opus, faciemus $x^3 + \frac{\xi}{\pi} xx + \frac{\mu}{\pi} x + \frac{\lambda}{\pi}$. Hujus diviſores ponamus eſſe $x + b$, $x + c$, $x + d$ &c. eoſque per compendium vocemus l, m, n, &c. Itaque propoſita fractio $\frac{\frac{\alpha}{\pi} + \frac{\beta}{\pi} x + \frac{\gamma}{\pi} xx + \frac{\delta}{\pi} x^3}{x^3 + \frac{\xi}{\pi} xx + \frac{\mu}{\pi} x + \frac{\lambda}{\pi}}$ divelli poterit in ſequentes $\frac{\alpha : \pi}{lmn} + \frac{\beta x : \pi}{lmn} + \frac{\gamma xx : \pi}{l\,m\,n} + \frac{\delta x^3 : \pi.}{l\,m\,n}$ Ajo jam, quamvis harum reduci poſſe ad talem, qualis eſt prima $\frac{\alpha : \pi}{lmn}$. Igitur primùm hanc reſolvemus, deinde quomodo cæteræ ad hanc revocentur, oſtendemus.

Neglecto igitur Numeratore conſtante, qui nihil in ſummationibus turbat, aggredimur reſolutionem fractionum $\frac{1}{lm}$, $\frac{1}{lmn}$, $\frac{1}{lmnp}$, &c. vel generalius, fractionis $\frac{1}{lmnpq}$, poſito ut dixi eſſe $l = x + b$; $m = x + c$;

* NB. Ƀ, pag. 375.

Regulæ univerſales pro Fractionibus Numeratoris indeterminati, non involventibus Integros indeterminatos; Reſolvendis in Fractiones Numeratoris conſtantis.

Series exhibentes Regulas pro Fractionibus Numeratoris indeterminati involventibus Integros indeterminatos; Reſolvendis in ſuos Integros, & in Fractiones Numeratoris conſtantis.

$$l = x + b \qquad m = x + c \qquad n = x + d \qquad p = x + e$$

$$\frac{x}{l..} = \frac{1}{..} - \frac{b}{l..}$$

$$\frac{xx}{lm..} = \frac{1}{..} - \frac{b+c}{m..} + \frac{bb}{lm..}$$

$$\frac{x^3}{mn..} = \frac{1}{..} - \frac{b+c+d}{n..} + \frac{bb+cc+bc}{mn..} - \frac{b^3}{lmn..}$$

$$\frac{x^4}{mnp..} = \frac{1}{..} - \frac{b+c+d+e}{p..} + \frac{\begin{array}{c} bb+cc+dd \\ bc+bd+cd \end{array}}{np..} - \frac{\begin{array}{c} b^3 \;\; +c^3 \\ bbc+bcc \end{array}}{mnp..} + \frac{b^4}{lmnp..}$$

&c.

$$\frac{xx}{l} = x - b + \frac{bb}{l}$$

$$\frac{x^3}{lm} = x - \frac{b+c}{1} + \frac{bb+cc+bc}{m} - \frac{b^3}{lm}$$

$$\frac{x^4}{lmn} = x - \frac{b+c+d}{1} + \frac{\begin{array}{c} bb+cc+dd \\ bc+bd+cd \end{array}}{n} - \frac{\begin{array}{c} b^3 \;\; +c^3 \\ bbc+bcc \end{array}}{mn} + \frac{b^4}{lmn}$$

&c.

$$\frac{x^3}{l} = xx - bx + bb - \frac{b^3}{l}$$

$$\frac{x^4}{lm} = xx - \frac{b+c}{1}x + \frac{bb+cc+bc}{1} - \frac{\begin{array}{c} b^3 \;\; +c^3 \\ bbc+bcc \end{array}}{m} + \frac{b^4}{lm}$$

&c. &c.

&c.

Puncta.. hìc ſignificant literas ſupplendas, ut, ſi opus, hæ pro illis poni poſſint. Exempli causâ, ſi pro $\frac{x}{l..}$ daretur $\frac{x}{lmn}$ foret $\frac{x}{lmn} = \frac{1}{mn} - \frac{b}{lmn}$.

Seriei cujuſque, ſerierumque ipſarum inter ſe progreſſus in infinitum apparet ex aſpectu, præſertim columnarum. In membro unoquoque Numerator conſtans eſt Formula plena ſui gradûs, ex literis ſibi competentibus formata, tam ſimplex, ut nullis coefficientibus varietur. Ita $bb+cc+dd+bc+bd+cd$, eſt formula plena ſecundi gradûs, ex literis b, c, d, formata, carens coefficientibus, adeoque conſtans ex aggregato quadratorum, & rectangulorum.

$+c$; $n = x + d$; $p = x + e$; $q = x + f$; & ita porrò. His poſitis reperi quod quiſque jam experiundo facilè demonſtrare poterit, eſſe :

$$\frac{1}{lm} = \frac{1}{c-b,l} + \frac{1}{b-c,m}$$

$$\frac{1}{lmn} = \frac{1}{c-b,d-b,l} + \frac{1}{b-c,d-c,m} + \frac{1}{b-d,c-d,n}$$

$$\frac{1}{lmnp} = \frac{1}{c-b,d-b,e-b,l} + \frac{1}{b-c,d-c,e-c,m} + \frac{1}{b-d,c-d,e-d,n} + \frac{1}{b-e,c-e,d-e,p}$$

Et ita porrò : nam ex aſpectu patet progreſſus in infinitum, uniformis, & regularis. Ut autem, qui volet, veritatem experiundo comprobare facilè poſſit, ſufficit præiri exemplo caſus primi,

$\frac{1}{c-b,l} + \frac{1}{b-c,m} = \frac{bm - cm + cl - bl}{2bc - bb - cc - lm}$. Jam pro ipſis l, m, ſubſtituendo in numeratore valores $x+b$, $x+c$, fiet $bm - cm + cl - bl = bx + bc - cx - cc + cx + cb - bx - bb =$ (deſtructis membris, in quibus eſt indeterminata x) $2bc - bb - cc$. Ergo erit $\frac{bm - cm + cl - bl}{2bc - bb - cc, lm} = \frac{2bc - bb - cc}{2bc - bb - cc, lm} = \frac{1}{lm}$ prout afferebatur. Jam omnes Fractiones $\frac{x:}{lmn..}$, $\frac{xx:}{lmn..}$, $\frac{x^3}{lmn..}$, quarum numerator non eſt conſtans, reducemus ad fractiones numeratoris, qualis eſt $\frac{\infty}{lmn..}$. Reperi igitur rurſus, quæ ſequuntur :

* NB. b, pag. 375.

Quod ſi quis ſublatis l, m, n, p, &c. reſtituere velit valores ipſarum, $x+b$, $x+c$, $x+d$, $x+e$, &c. Theoremata præcedentia ſtabunt, quemadmodum patet in exemplis hìc ſubjectis :

$$\frac{1}{\begin{array}{lllll} x^4 & + b x^3 & + bc xx & + bcd x & + bcde \\ & \;\; b & \;\; bd & \;\; bce & \\ & \;\; d & \;\; be & \;\; bde & \\ & \;\; e & \;\; cd & \;\; cde & \\ & & \;\; ce & & \\ & & \;\; de & & \end{array}}$$

idem

idem eſt quod

$$\frac{1}{c\text{-}b, d\text{-}b, e\text{-}b, x+b} + \frac{1}{b\text{-}c, d\text{-}c, e\text{-}c, x+c} + \frac{1}{b\text{-}d, c\text{-}d, e\text{-}d, x+d} + \frac{1}{b\text{-}e, c\text{-}e, d\text{-}e, x+e}$$

Et

$$\frac{x^3}{x^4 + \begin{array}{c} b \\ c \\ d \\ e \end{array} x^3 + \begin{array}{c} bc \\ bd \\ be \\ cd \\ ce \\ de \end{array} xx + \begin{array}{c} bcd \\ bce \\ bde \\ cde \end{array} + bcde}$$

idem eſt quod

$$\frac{1}{x+e} - \frac{b+c+d}{xx + \begin{array}{c} d \\ e \end{array} x + de} + \frac{bb+cc+bc}{x^3 + \begin{array}{c} c \\ d \\ e \end{array} xx + \begin{array}{c} cd \\ ce \\ de \end{array} x + cde} - \frac{b^3}{x^4 + \begin{array}{c} b \\ c \\ d \\ e \end{array} x^3 + \begin{array}{c} bc \\ bd \\ be \\ cd \\ ce \\ de \end{array} xx + \begin{array}{c} bcd \\ bce \\ bde \\ cde \end{array} x + bcde}$$

Operæque pretium foret, quamlibet fractionem valoris hujus, qualem dat exemplum poſterius, reſolvere rurſus in valorem ex fractionibus ſimplicibus compoſitum, ad modum valoris, quem dat exemplum prius, eoque modo novam Theorematum ſeriem dare pro valoribus ipſarum fractionum, ut $\frac{1}{lmnp..}$, ita $\frac{x}{lmnp..}$, $\frac{xx}{lmnp..}$, $\frac{x^3}{lmnp..}$, &c. exhibendis per aggregatum ex ſimplicibus fractionibus conflatum, ſi locus iſte pateretur.

Ex his ergò patet, omnem Fractionem Rationalem reduci poſſe ad Fractiones ſimplices rationales conſtantis Numeratoris; rationales, inquam, quoad indeterminatam x, quæ extra vinculum eſſe debet. Itaque ſi daretur fractio aliqua reſolvenda, velut $2xx + x\sqrt{2} + \sqrt{5}, :, xx + 2x + \sqrt{3}$, vel aliqua fractio ſimplex inter reſolvendum occurrens, ut fractio $\sqrt{2} :, x + \sqrt{3}$; ea in hoc Analyſeos genere habetur pro rationali, quia Analyſin hanc ſummationum non moratur irrationalitas, quæ indeterminatas non involvit. In quo commodior hoc loco eſt reductio irrationalium ad rationales, quàm in calculo Numerorum Figuratorum *Diophanteo*. Hinc ſequitur, etſi irrationales ſint Radices, modò ſint reales, non verò imaginariæ, in ſeriebus quidem Numericis rationalibus ſummandis, quæ ſunt determinati gradûs, ſeu ubi indeterminata non ingreditur exponentem, rem ſemper poſſe reduci ad ſummam numerorum progreſſionis Harmonicæ, aut

aut potentiarum ab ipſis, aut his deſtructis ad quantitatem conſtantem, ſeu ſummam abſolutam; vel ſaltem ad ſeriem integrorum, quæ in rationalibus tertii gradûs ſemper ſummari poteſt, pro parte ſeriei finita. In ſeriebus verò linearum ordinatarum rationalibus ſummandis, ſeu in quadraturis Figurarum Algebraicarum rationalium omnia ſemper, cùm radices ſunt reales, reduci ad Quadraturam Hyperbolæ. Hinc (ut id priùs explicem) in ſeriebus Numericis ſummandis res redit ad ſummandas omnes $\frac{1}{y}$ vel omnes $\frac{1}{yy}$ vel omnes $\frac{1}{y^3}$ &c. poſito $y = x + e$, vel $x + 2$, vel $x + \sqrt{3}$, aliterve, ut placet. Nam ſi x ſit 1, vel 2, vel 3, &c. & e conſtans, ſit 2, ſeries numerorum $\frac{1}{x+e}$, ſeu $\frac{1}{y}$ erit $\frac{1}{1+2}$; $\frac{1}{2+2}$; $\frac{1}{3+2}$; $\frac{1}{4+2}$ &c. Sin x ſit 1, vel 3, vel 5, vel 7 &c. & conſtans e ſit $\sqrt{3}$, tunc ſeries omnium $\frac{1}{y}$ erit $\frac{1}{1+\sqrt{3}}$; $\frac{1}{3+\sqrt{3}}$; $\frac{1}{5+\sqrt{3}}$; $\frac{1}{7+\sqrt{3}}$, &c. id eſt, ſi x aut y ſint progreſſionis Arithmeticæ, ſive naturalis, ſive alterius cujuſcumque, ipſæ $\frac{1}{y}$ erunt progreſſionis harmonicæ, itaque $\int \frac{dy}{y}$ erit in Numeris ſumma progreſſionis Harmonicæ, & $\int \frac{dy}{yy}$; $\int \frac{dy}{y^3}$, &c. erunt ſummæ potentiarum a terminis progreſſionis Harmonicæ. Ad has ergo res redit, ſi ſeries numericæ rationales determinati gradûs, finitæ, vel, cùm id fieri poteſt, infinitæ ſummandæ intelligantur, & formula fractionis non habeat niſi radices reales. Et licet ſeries Harmonica infinita numero terminorum, etiam magnitudine ſit infinita, ſummarique adeo non poſſit, (quod ſecus eſt in ſeriebus potentiarum ab harmonicis terminis) differentia tamen inter duas ſeries harmonicæ progreſſionis licet infinitas, finitam magnitudinem conſtituere poteſt. Et, quod eximium cenſeo, cùm abſoluta habetur ſummatio, independens ab harmonicis terminis, horumque potentiis ſummandis, hac analyſi noſtra deſtruuntur harmonicæ, aliæque ſeries minùs tractabiles, & ſeſe ſponte oſtendit ſumma. Exempli gratiâ $\frac{1}{3} + \frac{1}{8} + \frac{1}{15} + \frac{1}{24} + \frac{1}{35}$ &c. ſeu $\int \frac{dx}{xx-1}$, poſito x eſſe 2 vel 3 vel 4 &c. eſt ſeries quæ tota in infinitum ſumta ſummari poteſt, & dx quidem hoc loco eſt 1. In numericis enim differentiæ ſunt aſſignabiles. Et $\frac{1}{xx-1}$ per regulam noſtram (ob valorem ipſius $\frac{1}{lm}$, quia l hoc loco $= x + 1$,

& $m = x - 1$, adeoque b eſt 1, & c eſt -1) erit $\frac{1}{-2, x + 1} + \frac{1}{2, x - 1}$, ſeu $\frac{1}{2}, \overline{\frac{1}{x - 1} - \frac{1}{x + 1}}$. jam

$$+ \tfrac{1}{2} \int \frac{dx}{x - 1} \text{ eſt} = \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{1} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} + \&c.$$

$$- \tfrac{1}{2} \int \frac{dx}{x + 1} = \tfrac{1}{2}, * * - \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{5} + \&c.$$

$$\text{Ergo } \int \frac{dx}{xx - 1} \text{ erit} = \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{1} + \tfrac{1}{2} * * * * = \tfrac{3}{4}$$

Tandemque erit $\frac{3}{4} = \frac{1}{3} + \frac{1}{8} + \frac{1}{15} + \frac{1}{24} + \frac{1}{35} +$ &c. quam ſummationem jam olim cum Quadratura Arithmetica edere memini. Similique methodo cæteræ ſummationes ſerierum rationalium, determinati gradus realiter reſolubilium inveniuntur, aut ad harmonicas, earumque potentias rediguntur. De imaginaria reſolutione, quæ & ipſa prodeſt, mox dicetur. Eademque ſubinde etiam pro ſeriebus rationalibus indeterminati gradus ſervire poſſunt.

Quod ſi x vel y eſſent non termini diſcreti, ſed continui, id eſt non numeri intervallo aſſignabili differentes, ſed lineæ rectæ abſciſſæ, continuè ſive elementariter, hoc eſt per inaſſignabilia intervalla creſcentes, ita ut ſeries terminorum figuram conſtituat; patet eodem modo omnes ſummas fractionum rationalium gradûs conſtantis, hoc eſt omnes Quadraturas figurarum rationalium Algebraicarum, ſupponendo *Radices* formulæ denominatorem conſtituentis eſſe *reales*, poſſe vel abſolutè inveniri, vel ad Quadraturam Hyperbolæ reduci. Nam quia præter integros ſummandos, ut $\int dx, \int x\,dx, \int xx\,dx$, &c. res reducitur ad ſummationes ſimplices, poſito $y = x + e$, quales $\int \frac{dy}{y}; \int \frac{dy}{yy}; \int \frac{dy}{y^3}$ &c. in quadraturis autem ſemper habentur $\int \frac{dy}{yy}, \int \frac{dy}{y^3}$ &c. Hinc patet, ſolam ſupereſſe $\int \frac{dy}{y}$, id eſt, Hyperbolæ Quadraturam. Verùm enim verò, tenacior eſt varietatis ſuæ pulcherrimæ Natura rerum, æternarum varietatum parens, vel potiùs Divina Mens, quam ut omnia ſub unum genus compingi patiatur. Itaque elegans & mirabile effugium reperit in illo Analyſeos miraculo, idealis mundi monſtro, pene inter Ens & non-Ens Amphibio, quod radicem imaginariam appellamus. Hinc quoties denominator Fractionis Rationalis habet radices imaginarias, quod infinitis modis contingit, Hyperbola quoque, cujus opus eſſet Quadratura, fieret imaginaria, conſtruique nullo modo poſſet.

poſſet. Sed quia quævis Radices imaginariæ ſuas compares habent, oriuntur enim extrahendo radicem quadraticam ex quantitate privativa, extractio autem quadratica omnis duplex eſt, ut notæ ejus $\sqrt[2]{}\ldots$ præfigi poſſit + vel —; hinc ex radicum imaginariarum debito invicem ductu oritur productum reale, quod vel erit ipſe denominator, eoque caſu (ſi ad numeratorem conſtantem reducta ſit fractio, tollaturque, ſi placet, terminus ſecundus Formulæ) quadratura propoſita non poteſt hìc reduci ad ſimpliciorem; vel producitur realis aliquis diviſor denominatoris, ejuſque ope quadratura propoſita ab alia ſimpliciore pendet, qualis eſt circuli quadratura. Exempli gratiâ ſit fractio $\frac{1}{x^4 - 1}$: patet, denominatoris radices eſſe $x + 1, x - 1, x + \sqrt{-1}, x - \sqrt{-1}$, quæ in ſe invicem multiplicatæ producunt $x^4 - 1$. & erit per regulam,

$$\left.\begin{array}{l} +\dfrac{1}{-1-1, +\sqrt{-1}-1, -\sqrt{-1}-1, x+1} + \dfrac{1}{+1+1, +\sqrt{-1}+1, -\sqrt{-1}+1, x-1} \\ +\dfrac{1}{+1\cdot\sqrt{-1}, -1\cdot\sqrt{-1}, -\sqrt{-1}\cdot\sqrt{-1}, x+\sqrt{-1}} + \dfrac{1}{+1+\sqrt{-1}, -1+\sqrt{-1}, +\sqrt{-2}, x-\sqrt{-1}} \end{array}\right\} = \frac{1}{x^4-1}$$

$$= -\frac{1}{4, x+1} + \frac{1}{4, x-1} + \frac{1}{4\sqrt{-1}, x-\sqrt{-1}} - \frac{1}{4\sqrt{-1}, x-\sqrt{-1}}$$

ubi $\int\frac{dx}{x+1}$ vel $\int\frac{dx}{x-1}$ pendent ex Quadratura Hyperbolæ, ſed $\int\frac{dx}{x\sqrt{-1}-1}$ vel $\int\frac{dx}{x\sqrt{-1}+1}$ non poſſunt ad Hyperbolam niſi imaginariam revocari. Jungendo ergò tot radices imaginarias inter ſe, quot ad expreſſionem realem obtinendam neceſſe eſt, id eſt hoc loco in unum aggregando duas poſteriores fractiones, nempe $\frac{1}{4x\sqrt{-1}-4} - \frac{1}{4x\sqrt{-1}+4}$ prodibit $\frac{x\sqrt{-1}+1 - x\sqrt{-1}+1}{4, x\sqrt{-1}-1, x\sqrt{-1}+1}$ id eſt $-\frac{1}{2, xx+1}$. Si vellemus ſimiliter in unum congregare $-\frac{1}{4, x+1} + \frac{1}{4, x-1}$ fieret inde $\frac{1}{2, xx-1}$, & aggregando in unum $\frac{1}{2, xx-1} - \frac{1}{2, xx+1}$ redibit $\frac{1}{x^4-1}$ quod adeo eſt $= \frac{1}{4, x-1} - \frac{1}{4, x+1} - \frac{1}{2, xx+1}$. Unde patet pendere $\int\frac{dx}{x^4-1}$ vel etiam $\int\frac{dx}{1-x^4}$ ex Quadratura Hyperbolæ & circuli ſimul. Nam $\int\frac{dx}{x-1}$ & $\int\frac{dx}{x+1}$, adeoque

deoque & $\int \frac{dx}{xx - 1}$ pendere ex Quadratura Hyperbolæ, dudum conſtabat. Sed $\int \frac{dx}{xx + 1}$ pendere ex Quadratura Circuli a me primum, cum Quadratura mea Arithmetica, eſt inventum. Atque hinc duxi, quod initio Actorum Lipſienſium edidi Theorema, Quadrato diametri exiſtente 1, Aream Circuli eſſe $\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7}$ &c. Ex his ſequitur, omnium Figurarum Algebraicarum Rationalium, ubi Denominator in valore ordinatæ diviſores reales habet primi gradûs, ut $x + e$, reduci poſſe ad Quadraturam Hyperbolæ. Cùm verò diviſores reales habet planos, ſeu ſecundi gradus, (qui ſcilicet ipſimet non habent radices æquales, alioqui ducturi ad quadraturas abſolutas) ut $xx + fx + ag$ vel (ſublato ſecundo termino) ut $xx \pm ae$, pendere ex Quadratura Hyperbolæ, vel Circuli, vel utriusque.

Hic jam ordo nos ducit ad maximi momenti Quæſtionem, utrum omnes Quadraturæ rationales ad Quadraturam Hyperbolæ, & Circuli reduci poſſint, quæ huc redit in noſtra hac Analyſi: utrum omnis Æquatio Algebraica, ſeu formula realis integra quoad indeterminatam rationalis, poſſit reſolvi in diviſores reales ſimplices, aut planos. Verùm comperi, qui hoc ſtatueret, eum naturæ copias arctiùs contracturum quàm par ſit. Eſto $1 : (xx + aa\sqrt{-1})$ ducendum in $1 : (xx - aa\sqrt{-1})$ prodibit $1 : (x^4 + a^4)$ cujus denominator utique eſt formula realis, ſed reſolvendo hanc formulam non pervenitur ad diviſores planos reales. Nam $xx - aa\sqrt{-1}$ reſolvi poteſt in $x + a\sqrt{-1}$, & $x - a\sqrt{-1}$, & $xx + aa\sqrt{-1}$ in $x + a\sqrt{(\sqrt{-1})}$ & $x - a\sqrt{(-\sqrt{-1})}$. Itaque formula $x^4 + a^4$ prodit ducendo invicem $x + a\sqrt{-1}$, $x - a\sqrt{-1}$, $x + a\sqrt{(-\sqrt{-1})}$, $x - a\sqrt{(-1\sqrt{-1})}$ ſed quamcumque inſtituamus duarum ex his radicibus quatuor combinationem, nunquam conſequemur, ut duæ invicem ductæ dent quantitatem realem, ſed diviſorem realem planum. Itaque $\int dx : (x^4 + a^4)$ neque ex Circuli neque ex Hyperbolæ Quadratura per Analyſin hanc noſtram reduci poteſt, ſed novam ſui generis fundat. Et optarem (quod alias etiam me innuere memini,) ut $\int dx : (x + a)$ ſeu Quadraturam Hyperbolæ conſtat dare Logarithmos, ſeu *Sectionem Rationis*; & $\int dx : (xx + aa)$ *Sectionem Anguli*; ita porrò continuari poſſe progreſſionem, conſtareque cuinam problemati reſpondeant $\int dx : (x^4 + a^4)$; $\int dx : (x^8 + a^8)$ &c. Cæterùm, ut obiter addam, $\int x^{e-1} dx : (x^{2e} \pm a^{2e})$ verbi gratiâ $\int x\,dx : (x^4 \pm a^4)$ & $\int xx\,dx : (x^6 \pm a^6)$ & $\int x^3\,dx : (x^8\ a^8)$ & ita porrò; pendent ex Quadratura Circuli, ſi $\pm$ ſignificet $+$, & ex Quadratura Hyperbolæ, ſi ſignificet $-$; Uti facilè agnoſcit peritus calculi differentialis, quamquam & ex præſenti Analyſi deduci poſſet.

Unum

Unum jam potiſſimum ſupereſt quærendum, Utrum jam, & quomodo Figuræ, quæ Ordinatas habent irrationales, ad alias Figuras rationales Homometras (id eſt ut data quadratura unius, abſolutè, vel rationaliter detur quadratura alterius) reduci, noſtræque huic Analyſi ſubjici poſſint. Quo in genere multa quidem tentavi, nec ſine ſucceſſu, nondum tamen quicquam ſatis univerſale, aut inſigne auſim polliceri, & ut verum fatear, rem pro dignitate tractare non vacavit. Itaque diſtuleram editionem Methodi, donec in reductione irrationalium ſummandarum ad ſummandas rationales, majores progreſſus facere liceret: totamque hanc doctrinam ſervabam Operi meo *Scientiæ infiniti.* Sed cùm viderem, hac mora differri progreſſum artis, neque dum ſatis de tempore meo ſtatuere poſſem, malui publicæ utilitati velificari, ea ſpe fretus, fore qui latiùs ſpargant ſemina novæ doctrinæ, uberioreſque fructus colligant: præſertim ſi incumbatur diligentiùs, quàm factum eſt hactenus in Amplificationem Algebræ *Diophanteæ*, *Carteſii* diſcipulis ferè neglectæ, quod uſum in Geometria parum perſpexiſſent. Ego verò aliquoties innuere memini (quod mirum videri poterat) progreſſum Analyſeos noſtræ infiniteſimalis circa quadraturas pendere bona ex parte ab incrementis ejus Arithmeticæ, quam primus, qui nobis quidem notus ſit, profeſſâ operâ tractavit *Diophantus.* Et ſpero, quæ nunc damus, facta oculata fide, efficacioris ad hæc porrò excolenda adhortamenti loco fore.

Nº. LXVI.

CONTINUATIO ANALYSEOS

QUADRATURARUM RATIONALIUM.

Ex Actis Erudit. Lipſ. anni 1703.

QUam nuper edidi Analyſin Summatoriam Rationalium, ſive in Numeris, ſive in Quadraturis, mirificè intelligentibus placere video. Nam (ut de ſummis Numerorum nunc taceam) Analyſis tranſcendens linearum, ubicumque hæc Methodus locum habet, deducitur ad ſuam perfectionem, quia tunc ſemper pro æquationibus differentialibus ſubſtitui poſſunt exponentiales. Sciendum enim, quod dudum notavi, expreſſionem lineæ per Æquationem differentialem hoc habere incommodi, quod non prodeſt pro æquatione locali, neque propriè ad unum punctum refertur. Unde fit, ut per eam interſectio curvæ cum alia linea haberi, in-

cognitave tolli non poſſit: atque adeo tunc demum in talibus æquatio differentialis prodeſſe poteſt, cùm conſtat, duas lineas non tantùm occurrere ſibi, ſed & ſe tangere. At æquatio curvæ tranſcendens, exponentialis, omnes perfectè uſus analyticos recipit, ejuſque ope non tantùm determinari concurſus, ſed & incognitæ tolli poſſunt, ſimulque eadem opera apparet, quodnam problema deprimatur ex tranſcendenti ad commune; quotiens nempe quantitates indeterminatæ exeunt de Exponente, aut planè evaneſcunt. Ex. gr. ſi prodeat $b^{\frac{xx+yy}{\cdot}} = c^{\frac{aa}{\cdot}}$ fiet $xx + yy = aa\,log.\,c.\,log.\,b$: quæ æquatio eſt ad Circulum; &, ſi Logarithmorum ipſius b, & ipſius c, ratio aliunde data ſit, conſtructus erit circulus communi more; ſin minùs, ſaltem obtentum eſt, quod debuit obtineri. Et verò ſciendum eſt, quoties in ſolis conſtantibus hæret difficultas, ut Algebraicè exprimi nequeant, tunc non ampliùs incertum eſſe gradum, neque adeo Problema ampliùs eſſe tranſcendens. Exempli gratiâ ſit $\sqrt{}^{e}\,2$ quantitas non ordinaria, veluti ſi e ſit numerus irrationalis, $\sqrt{}\,2$; tamen nec tranſcendens a me dicetur, ſed interſcendens, nam cadit inter gradus uſitatos.

Sed hæc obiter dicta ſunto, ut præſtantia hujus Analyſeos meliùs intelligatur. Fractio quacumque rationalis quoad indefinitam, poteſt facta concipi hujus formæ; poſito t eſſe numerum integrum rationalem.

$$\frac{\frac{\alpha}{\pi} + \frac{\beta}{\pi}x + \frac{\gamma}{\pi}xx + \frac{\delta}{\pi}x^3 + \&c.}{x^{t}. + \frac{\xi}{\pi}x^{\frac{t-1}{\cdot}} + \frac{\mu}{\pi}x^{\frac{t-2}{\cdot}} + \frac{\lambda}{\pi}x^{\frac{t-3}{\cdot}} + \&c.}$$

Hinc primum detrahentur integra pura, ut x^0, x^1, x^2, &c. quantum fieri poteſt, quod fit dividendo Numeratorem per Denominatorem, quando nempe hic non eſt altior illo. Quo facto habebitur & quotiens integer, & reſidua fractio, ubi Denominator eſt altior Numeratore, quæ jam rurſus tractanda, ut mox dicetur. Nunc ſi ponamus, Denominatorem eſſe formulam, quæ nullas habeat radices æquales, dico Fractionem, quæ ſupereſt, divelli poſſe in tot fractiones quot ſunt radices, quarum fractionum quælibet ſit hujus formæ $\frac{A}{X+B}$, ita ut A & B ſint quantitates conſtantes. Atque adeo ſi detur figura, cujus abſciſſa exiſtente X, ordinata ſit æqualis dictæ fractioni; figuræ quadratura habebitur per Logarithmos veros, cùm radices denominatoris ſunt reales, vel per accedentes Logarithmos imaginarios, cùm quædam radices ſunt imaginariæ. Logarithmi autem

tem veri coincidunt cum quadratura Hyperbolæ, Logarithmi imaginarii primi gradûs coincidunt cum quadratura Circuli. Sed quia dantur Logarithmi imaginarii infinitorum graduum altiorum, ut in Schediaſmate Maji (a) ſuperioris ſpecimine dato oſtendimus: hinc etiam totidem dantur Quadraturarum gradus, a quadraturis Circuli, & Hyperbolæ, independentes, atque ita magna quæſtio deciſa eſt, quæ hactenùs in Analyſi Tranſcendente negotium faceſſivit.

Ponamus denominatoris radices eſſe $x+b$, $x+c$, $x+d$, $x+e$, $x+f$, &c. totidem, quot in t ſunt unitates; quas radices per compendium vocabimus l, m, n, p, q. &c. patet

$$\frac{1}{x^{t} + \frac{\xi}{\pi} x^{t-1} + \frac{\mu}{\pi} x^{t-2} + \frac{\lambda}{\pi} x^{t-3} + \&c.}$$

idem fore quod $\frac{1}{lmnpq}$.. Reperi autem per Regulam generalem ſatis pulchrè procedentem fore.

$$\frac{1}{lmnp}$$

idem quod eſt ſequens ſumma

$$\frac{1}{c-b, d-b, e-b, l} + \frac{1}{b-c, d-c, e-c, m} + \frac{1}{b-d, c-d, e-d, n} + \frac{1}{b-e, c-e, d-e, p}$$

idemque eſt in altioribus, nam lex generalis attendenti patet. Et ita generaliter fractio denominatoris compoſiti divelli poteſt in fractiones denominatoris ſimplicis.

Quodſi poſt diviſionem initio factam in reſiduæ fractionis numeratore manſiſſet indefinita; veluti ſi reſidua foret formula

$$\frac{\theta + \rho x + \varpi xx + \varphi x^3}{lmnp}$$

divellatur in tot partes, quot ſunt membra in numeratore; quæ erunt $\frac{\theta}{lmnp} + \frac{\rho x}{lmnp} + \frac{\varpi xx}{lmnp} + \frac{\varphi x^3}{lmnp}$, ubi ut numeratores liberentur ab indefinito, reperimus (omiſſis conſtantibus, ρ, ϖ, φ, &c.) fore

$\frac{x}{lmnp}$

(a) Vid. Num. LXV.

$$\frac{x}{lmnp} = \frac{1}{mnp} - \frac{b}{lmnp}$$

$$\frac{xx}{lmnp} = \frac{1}{np} - \frac{b+c}{mnp} + \frac{bb}{lmnp}$$

$$\frac{x^3}{lmnp} = \frac{1}{p} - \frac{b+c+d}{np} + \frac{bb+cc+bc}{mnp} - \frac{b^3}{lmnp}$$

His addamus adhuc unum exemplum, ut meliùs appareat Lex:

$$\frac{x^4}{lmnpq} = \frac{1}{q} - \frac{b+c+d+e}{pq} + \frac{\begin{matrix}bb+cc+dd\\bc+bd+cd\end{matrix}}{nbq} - \frac{\begin{matrix}+b^3+c^3\\+bbc+bcc\end{matrix}}{mnpq} + \frac{b^4}{lmnpq}$$

Equidem diverſæ prodire poſſunt expreſſiones, prout mutatur ordo literarum, l, m, n, p, &c. aut conſtantium in ipſis quantitatum b, c, d, e, &c. Sed ſi ipſæ jam a numeratoribus indefinitis liberatæ fractiones, ut $\frac{1}{pq}$, $\frac{1}{npq}$, $\frac{1}{mnpq}$, aliæve hujuſmodi rurſus reſolvantur in fractiones denominatorem habentes ſimplicem, more jam præſcripto; diverſæ illæ viæ tandem deſinent in idem; poteruntque ita adhuc nova theoremata perpulchra condi. Idem aliter ſic conſequemur: Eſto fractio habens potentiam ipſius x in numeratore, & denominatorem compoſitum, velut $\frac{x^4}{lmnp}$; reſolvemus primam Fractionem in fractiones denominatorum ſimplicium, modo jam præſcripto; & ita res hoc loco redit ad quatuor fractiones, quales $\frac{x^4}{l}, \frac{x^4}{m}, \frac{x^4}{n}, \frac{x^4}{p}$, omiſſis coefficientibus conſtantibus. Jam quando in Numeratore eſt x vel ejus potentia quævis, denominator autem eſt ſimplex, poteſt res reduci ad integros puros, aut fractiones numeratoris conſtantis ſimul, ſimplicisque denominatoris, hoc modo:

$$\frac{x}{l} = 1 - \frac{b}{l}$$

$$\frac{xx}{l} = x - b + \frac{bb}{l}$$

$$\frac{x^3}{l} = xx - bx + bb - \frac{b^3}{l}$$

$$\frac{x^4}{l} = x^3 - bxx + bbx - b^3 + \frac{b^4}{l}$$

Nunc ſupplendi ſunt caſus, quos in præcedenti ſchediaſmate non attigimus,

gimus, quando nempe radices æquales cæteris admiſcentur; ibi enim regulæ propoſitæ non quadrant. Neque etiam ſoli Logarithmi, aut quaſi-logarithmi occurrunt; ſed interveniunt etiam Hyperboloidum quadraturæ, quales ſunt, quarum ordinatæ ſunt $\frac{1}{xx}$, $\frac{1}{x^3}$, $\frac{1}{x^4}$, &c. Tales autem Hyperboloides omnes Quadraturam ordinariam recipere conſtat. Sed ut hæ quadraturæ diverſi generis ex ſe invicem evolvantur; ponamus $h = x + a$; & ſit fractio $\frac{1}{h^4 lmnp}$, hæc per regulam præſcriptam reſolvi poteſt in totidem tales $\frac{1}{h^4 l}$, $\frac{1}{h^4 m}$, $\frac{1}{h^4 n}$, $\frac{1}{h^4 p}$. Dico quamvis harum rurſus reſolvi tali modo, ut poſito $\omega = l - h$, id eſt $\omega = b - a$, conſtante, (quoniam $h = x + a$, & $l = x + b$, unde $l - h = b - a$) fiat

$$\frac{1}{h^4 l} = \frac{1}{\omega h^4} - \frac{1}{\omega\omega h^3} + \frac{1}{\omega^3 hh} - \frac{1}{\omega^4 h} + \frac{1}{\omega^4 l}$$

Eodemque modo habebitur & $\frac{1}{h^4 m}$, tantùm pro l ponendo m, & pro $l - h = \omega$ ſeu $b - a$ conſtante, ponendo conſtantem $m - h$ ſeu $c - a$, idemque eſt in cæteris.

Quidſi diverſæ ſimul occurrant radices æquales? Veluti ſi ſit fractio $\frac{1}{h^4 l^3 mnp}$, patet eam produci ex his duabus $\frac{1}{h^4 l^3}$ & $\frac{1}{mnp}$. Dico priorem reſolvi poſſe in fractiones conſtantes ex unius tantùm ſpeciei radicibus æqualibus, quæ fractiones ſi ſingulæ deinde multiplicentur per $\frac{1}{mnp}$, habebimus totidem novas fractiones ſimiles huic $\frac{1}{h^4 lmnp}$, quas jam reſolvere docuimus. Supereſt ergo, ut reſolvamus fractionem qualis $\frac{1}{h^4 l^3}$; dico, poſito $b - a = \omega$, & $a - b = \psi$ fore.

$$\frac{1}{h^4 l^3} = \begin{cases} \frac{1}{\omega^3 h^4} - \frac{3}{\omega^4 h^3} + \frac{6}{\omega^5 hh} - \frac{10}{\omega^6 h} \\ \frac{1}{\psi^4 l^3} - \frac{4}{\psi^5 ll} + \frac{10}{\psi^6 l} \end{cases}$$

Sed operæ pretium eſt adſcribere theorema generale, quia hìc Lex non

 æquè

æquè facilè ac in prioribus, de exemplorum inſpectione fabricari poteſt. Nempe poſito t & v eſſe numeros conſtantes rationales integros, dico fore:

$$\frac{1}{h^{t}.\, l^{v}}$$

idem quod duæ ſummæ ſequentes ſimul

$$\frac{1}{\omega^{v}\, h^{t}} - \frac{\frac{v}{1}}{\omega^{v+1}\, h^{t-1}} + \frac{\frac{v.\overline{v+1}}{1.2}}{\omega^{v+2}\, h^{t-2}} - \frac{\frac{v.\overline{v+1}.\overline{v+2}}{1.2.3}}{\omega^{v+3}\, h^{t-3}} + \&c. \text{ uſque ad } \frac{\frac{\cdots\cdots}{}}{\cdots\cdots h^{1}}$$

$$\frac{1}{\psi^{t}.\, l^{v}} - \frac{\frac{t}{1}}{\psi^{t+1}\, l^{v-1}} + \frac{\frac{t.\overline{t+1}}{1.2.}}{\psi^{t+2}\, l^{v-2}} - \frac{\frac{t.\overline{t+1}.\overline{t+2}.}{1.2.3.}}{\psi^{t+3}\, l^{v-3}} \quad \frac{\frac{\cdots\cdots}{}}{\cdots\cdots} \text{ uſque ad } \cdots\cdots l^{1}$$

Hinc ſi verbi gratiâ v eſſet 1 ſeu $l^{v} = l$ retineretur ſolùm terminus $\frac{1}{\psi^{t}.\, l^{v}}$, ſequentibus in quibus l aliàs occurreret omiſſis. Quòd ſi tres vel plures ſpecies radicum æqualium concurrerent; nihilominùs patet ex præſcripta jam Methodo, omnia ad fractiones unius tantùm literæ indeterminatæ, quæ hoc loco ſunt ſimpliciſſimæ, reduci poſſe. Eſto enim $\frac{1}{h^{5}\, l^{4}\, m^{3}}$ patet produci ex $\frac{1}{h^{5}\, l^{4}}$ per $\frac{1}{m^{3}}$ jam $\frac{1}{h^{5}\, l^{4}}$ reſolvatur in fractiones ſimplices more præſcripto. Harum quælibet ducatur $\frac{1}{m^{3}}$, habebuntur totidem fractiones, quæ non niſi binas habebunt ſpecies radicum; has autem poſſe reſolvi in ſimplices, jam eſt oſtenſum. Reducuntur ergo binæ ſpecies ad unam, ternæ ad binas, quaternæ ad ternas; & ita porrò, quæ hìc perſequi non eſt illud neceſſe. Unde jam cuncta eſſe in poteſtate apparet; quamquam ea quoque canonibus, ſeu theorematibus complecti conveniens foret.

Poſtremò cùm Mathematicus ingenioſiſſimus, ſi quiſquam, Dn. *Johannes Bernoullius* oſtenderit, ſe quoque jam ab aliquo tempore tali quadam Analyſi uti, & ideo problema tranſmiſerit Actis inſerendum, verbis

bis ſequentibus, illud ſubjicietur. Ubi tamen ab eo diſſentire cogor, quòd omnia ad quadraturam Circuli & Hyperbolæ (præter ordinarias quadraturas) hìc reduci putat: cùm in ſpecimine ſupradicto, Actis Maii inſerto, demonſtratum a me ſit, alias ſine fine aliis altiores quadraturarum rationalium tranſcendentium ſpecies ordine dari, a ſe invicem independentes; Quadraturaſque Hyperbolæ & Circuli ex illis omnibus primas & ſimpliciſſimas eſſe.

N°. LXVII.

REMARQUE

Sur un endroit des nouveaux Elémens d'Algébre de Mr. Ozanam.

Tirée du Journal des Savans année 1703.

L'Algébre de Mr. *Ozanam*, que je viens de recevoir, me paroit bien meilleure que la plûpart de celles qu'on a vûes depuis quelque temps, qui ne font que copier *Deſcartes* & ſes Commentateurs. Je ſuis bien aiſe qu'il faſſe revivre une partie des préceptes de *Viete*, inventeur de la *Spécieuſe*, qui méritoient de n'être point oubliés. On y trouve de plus quelques adreſſes très utiles dans les problêmes à la mode de *Diophante*. C'eſt fort bien fait auſſi qu'il cherche de pouſſer les diviſions, qui ſe doivent faire par des Polinomes irrationels, ou d'ôter l'aſymmetrie du Dénominateur d'une fraction, en le multipliant auſſi-bien que le Numerateur, par une formule, laquelle, avec le Dénominateur, fait un produit rationel, & par conſéquent de réſoudre ce problême très utile: *Trouver une formule, par laquelle multipliant un Polinome irrationel donné, le produit devienne rationel.* Mais il s'eſt arrêté en beau chemin, ayant crû (p. 77.) que cela n'alloit que juſqu'aux Quadrinomes dans les racines quarrées. C'eſt pourquoi je veux en donner la ſolution, dans le Pentanome, ou Quinome, comme il l'appelle, afin de l'encourager, ou quelqu'autre qui en aura le loiſir, à achever cette recherche, qui le mérite aſſez.

Soit un Quinome $a+b+c+d+e$, où j'entends par ces lettres des quantités dont les quarrés ſont rationels; par exemple $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}+\sqrt{7}+\sqrt{11}$. Multiplions le Quinome propoſé par $a+b+c-d-e$, & il vient $2ab+2ac+2bc-2de+mm$, ſuppoſant $mm=aa$

 $+bb$

$+ bb + cc - dd - ee$. Il eſt vrai que ce produit eſt encore un Quinome en effet; mais nous corrigerons ce défaut dans la ſuite. Multiplions ce produit par $2ab + 2ac + 2bc + 2de - mm$; & il proviendra $-n^4 + 4mmde + 8abc(a + b + c)$, ſuppoſant $n^4 = m^4 - 4aabb - 4aacc - 4bbcc + 4ddee$. Ainſi ce produit nous eſt venu en multipliant le Quinome propoſé par $a + b + c - d - e$, & en multipliant ce qui en vient, encore par $2ab + 2ac + 2bc + 2de - mm$; ou en multipliant le Quinome propoſé tout d'un coup par $(a + b + c - d - e)(2ab + 2ac + 2bc + 2de - mm)$. Mais ſi au lieu de cela on multiplioit le Quinome propoſé par $(a + b + c - d - e)(2ab + 2ac + 2bc + 2de - mm) - 8abc$; il eſt viſible qu'il proviendroit $-n^4 + 4mmde + 8abc(a + b + c) - 8abc(a + b + c + d + e)$, c'eſt à-dire, $-n^4 + 4mmde - 8abc(d + e)$. Ce qui eſt un Quadrinome, & nous avons gagné. Mais qui plus eſt, ce Quadrinome a l'avantage de pouvoir être réduit d'abord au binome, en employant la ſeule multiplication par ſon contraire, ſans paſſer par le trinome: & ainſi nous rattrappons ce que nous avions été obligés de perdre au commencement par une multiplication qui n'avançoit pas d'abord. Car multipliant ce produit par $-n^4 + 4mmde + 8abc(d + e)$, il nous viendra $p^8 + 8q^6de$, ſuppoſant $p^8 = n^8 + 4mmddee - 64aabbcc(dd + ee)$, & $q^6 = mmn^4 + 16aabbcc$. Et ce produit étant enfin multiplié par $p^8 + 8q^6de$, nous aurons une quantité délivrée de l'aſymmetrie, qui eſt $p^8 - 64q^{12}ddee$. Ce qu'il falloit faire. Et ce produit nous vient en multipliant le Quinome $a + b + c + d + e$ par le produit de ces trois quantités: $(a + b + c - d - e)$, $(2ab + 2ac + 2bc + 2de - mm) - 8abc$, $-n^4 + 4mmde + 8abc(d + e)$, $p^8 + 8q^6de$.

Il y a démonſtration, que tout polynome, quel que puiſſe être le nombre, & quelle que puiſſe être l'eſpèce des racines, pourra toûjours être multiplié par une telle formule, que le produit ſoit rationel. Et en pouſſant le calcul des canons, on y trouvera une progreſſion réglée qui nous épargnera la peine d'aller plus loin. J'appelle Canons, des formules générales, qui donnent d'abord ce qu'on demande. Par exemple, à l'égard des racines quarrées, il y aura

dans le Binome $a + b$, $a - b = aa - bb$

$$\begin{array}{lllll} \text{dans le Trinome } a+b+c, & a^3 - aab + 2abc & = & a^4 - & 2aabb \\ & b^3 \quad abb & & b^4 & 2aacc \\ & c^3 \quad aac & & c^4 & 2bbcc \\ & \quad\;\; acc & & & \\ & \quad\;\; bbc & & & \\ & \quad\;\; bcc & & & \end{array}$$

Et

Et on pourra calculer des canons ſemblables pour le Quadrinome, Quinome, &c. ce qui donnera enfin la règle de la progreſſion, qui eſt le canon des canons. J'ai coutume de me ſervir d'expreſſions abrégées; par exemple, en diſant dans le trinome, a, $\underline{a}^3 \,\underline{-}\, \underline{a}\,\underline{a}\,\underline{b} \,\underline{+}\, 2\,\underline{a}\,\underline{b}\,\underline{c} = a^4 - 2\,aabb$.

N°. LXVIII.

EXPLICATION
DE
L'ARITHMETIQUE BINAIRE,

Qui ſe ſert des ſeuls caractères o. & 1: avec des Remarques ſur ſon utilité, & ſur ce qu'elle donne le ſens des anciennes figures Chinoiſes de *Fohy*. (a)

Tirée des Mémoires de l'Académie des Sciences de Paris ann. 1703.

Le calcul ordinaire d'Arithmétique ſe fait ſuivant la progreſſion de dix en dix. On ſe ſert de dix caractères, qui ſont 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. qui ſignifient zero, un, & les nombres ſuivans juſqu'à neuf incluſivement. Et puis allant à dix, on recommence, & on écrit *dix*, par 10; & dix fois dix, ou *cent*, par 100; & dix fois cent, ou *mille*, par 1000; & dix fois mille par 10000. Et ainſi de ſuite.

Mais au lieu de la progreſſion de dix en dix, j'ai employé depuis pluſieurs années la progreſſion la plus ſimple de toutes, qui va de deux en deux; ayant trouvé qu'elle ſert à la perfection de la ſcience des Nombres. Ainſi je n'y employe point d'autres caractères que 0 & 1, & puis allant à deux, je recommence. C'eſt pourquoi *deux* s'écrit ici par 10, & deux fois deux ou *quatre* par 100; & deux fois quatre ou *huit* par 1000; & deux fois huit ou *ſeize* par 100000, & ainſi de ſuite. Voici *la Table des Nombres* de cette façon, qu'on peut continuer tant que l'on voudra.

(a) Voyez le Num. 58.

On

On voit ici d'un coup d'œil la raiſon d'une *propriété célèbre de la progreſſion Géométrique double* en Nombres entiers, qui porte que ſi on n'a qu'un de ces nombres de chaque degré, on en peut compoſer tous les autres nombres entiers au-deſſous du double du plus haut degré. Car ici, c'eſt comme ſi on diſoit par exemple, que 111 ou 7 eſt la ſomme de quatre, de deux. Et que 1101 ou 13 eſt la ſomme de huit, quatre & un. Cette propriété ſert aux Eſſayeurs pour peſer toutes ſortes de maſſes avec peu de poids, & pourroit ſervir dans les monnoyes pour donner pluſieurs valeurs avec peu de piéces.

100	4
10	2
1	1
111	7

1000	8
100	4
1	1
1101	13

Cette expreſſion des Nombres étant établie, ſert à faire très facilement toutes ſortes d'opérations.

0 0 0 0 0 0	0
0 0 0 0 0 1	1
0 0 0 0 1 0	2
0 0 0 0 1 1	3
0 0 0 1 0 0	4
0 0 0 1 0 1	5
0 0 0 1 1 0	6
0 0 0 1 1 1	7
0 0 1 0 0 0	8
0 0 1 0 0 1	9
0 0 1 0 1 0	10
0 0 1 0 1 1	11
0 0 1 1 0 0	12
0 0 1 1 0 1	13
0 0 1 1 1 0	14
0 0 1 1 1 1	15
0 1 0 0 0 0	16
0 1 0 0 0 1	17
0 1 0 0 1 0	18
0 1 0 0 1 1	19
0 1 0 1 0 0	20
0 1 0 1 0 1	21
0 1 0 1 1 0	22
0 1 0 1 1 1	23
0 1 1 0 0 0	24
0 1 1 0 0 1	25
0 1 1 0 1 0	26
0 1 1 0 1 1	27
0 1 1 1 0 0	28
0 1 1 1 0 1	29
0 1 1 1 1 0	30
0 1 1 1 1 1	31
1 0 0 0 0 0	32
&c.	

Pour l'*Addition* par exemple.

110	6	101	5	1110	14
111	7	1011	11	10001	17
1101	13	10000	16	11111	31

Pour la *Souſtraction.*

1101	13	10000	16	11111	31
111	7	1011	11	10001	17
110	6	101	5	1110	14

Pour la *Multiplication.*

11	3	101	5	101	5
11	3	11	3	101	5
11		101		101	
11		101		1010	
1001	9	1111	15	11001	25

Pour la *Diviſion.*

15	+ + 1 1		101	5
3	+ + + 1		*S*	
	+ 1			

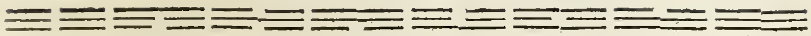
Et toutes ces opérations ſont ſi aiſées, qu'on n'a jamais beſoin de rien eſſayer ni deviner, comme il faut faire dans la diviſion ordinaire. On n'a point beſoin non plus de rien apprendre par cœur ici, comme il faut faire dans le calcul ordinaire, où il faut ſavoir, par exemple, que 6 & 7 pris enſemble font 13, & que 5 multiplié par 3 donne 15, ſuivant la Table *d'une fois*

un

un eſt un ; qu'on appelle Pythagorique. Mais ici tout cela ſe trouve & ſe prouve de ſource, comme l'on voit dans les exemples précédens ſous les ſignes ↄ & ⊙.

Cependant je ne recommande point cette maniére de compter, pour la faire introduire à la place de la pratique ordinaire par dix. Car outre qu'on eſt accoutumé à celle-ci, on n'y a point beſoin d'y apprendre ce qu'on a déja appris par cœur : ainſi la pratique par dix eſt plus abregée, & les nombres y ſont moins longs. Et ſi on étoit accoutumé à aller par douze ou par ſeize, il y auroit encore plus d'avantage. Mais le calcul par deux, c'eſt-à-dire, par 0 & par 1, en récompenſe de ſa longueur, eſt le plus fondamental pour la ſcience, & donne de nouvelles découvertes, qui ſe trouvent utiles enſuite, même pour la pratique des nombres, & ſur-tout pour la Géométrie ; dont la raiſon eſt que les nombres étant reduits aux plus ſimples principes, comme 0 & 1, il paroit partout un ordre merveilleux. Par exemple, dans la *Table* même des *Nombres*, on voit en chaque colonne régner des périodes qui recommencent toujours. Dans la premiére colonne c'eſt 01, dans la ſeconde 0011, dans la troiſiéme 00001111, dans la quatriéme 0000000011111111, & ainſi de ſuite. Et on a mis de petits zeros dans la Table pour remplir le vuide au commencement de la colonne, & pour mieux marquer ces périodes. On a mené auſſi des lignes dans la Table, qui marquent que ce que ces lignes renferment revient toujours ſous elles. Et il ſe trouve encore que les Nombres Quarrés Cubiques, & d'autres puiſſances ; item les Nombres Triangulaires, Pyramidaux & autres nombres figurés, ont auſſi de ſemblables périodes : de ſorte qu'on en peut écrire les Tables tout de ſuite, ſans calculer. Et une prolixité dans le commencement, qui donne enſuite le moyen d'épargner le calcul, & d'aller à l'infini par règle, eſt infiniment avantageuſe.

Ce qu'il y a de ſurprenant dans ce calcul, c'eſt que cette Arithmétique par 0 & 1 ſe trouve contenir le myſtère des lignes d'un ancien Roi & Philoſophe nommé *Fohy*, qu'on croit avoir vécu il y a plus de quatre mille ans, & que les Chinois regardent comme le Fondateur de leur Empire & de leurs ſciences. Il y a pluſieurs figures linéaires qu'on lui attribue, elles reviennent toutes à cette Arithmétique ; mais il ſuffit de mettre ici *la Figure de huit Cova* comme on l'appelle, qui paſſe pour fondamentale, & d'y joindre l'explication qui eſt manifeſte, pourvû qu'on remarque premiérement qu'une ligne entière ——— ſignifie l'unité ou 1, & ſecondement qu'une ligne briſée — — ſignifie le zero ou 0.



000	001	010	011	100	101	110	111
0	1	10	11	100	101	110	111
0	1	2	3	4	5	6	7

Les Chinois ont perdu la ſignification des *Cova* ou Linéations de *Fohy*, peut-être depuis plus d'un millenaire d'années; & ils ont fait des Commentaires là-deſſus, où ils ont cherché je ne ſçai quels ſens éloignés. De ſorte qu'il a fallu que la vraie explication leur vint maintenant des Européens; voici comment: Il n'y a guères plus de deux ans que j'envoyai au R. P. *Bouvet* Jéſuite François célébre, qui demeure à Pekin, ma maniére de compter par 0 & 1; & il n'en fallut pas davantage pour lui faire reconnoitre que c'eſt la clef des figures de *Fohy*. Ainſi m'écrivant le 14. Novembre 1701, il m'a envoyé la grande figure de ce Prince Philoſophe qui va à 64, & ne laiſſe plus lieu de douter de la vérité de notre interprétation; de ſorte qu'on peut dire que ce Père a déchiffré l'énigme de *Fohy*, à l'aide de ce que je lui avois communiqué. Et comme ces figures ſont peut-être le plus ancien monument de ſcience qui ſoit au monde, cette reſtitution de leur ſens, après un ſi grand intervalle de tems, paroitra d'autant plus curieuſe.

Le conſentement des figures de *Fohy* & de ma Table des Nombres, ſe fait mieux voir lorſque dans la Table on ſupplée les zéros initiaux, qui paroiſſent ſuperflus, mais qui ſervent à mieux marquer la période de la colonne, comme je les y ai ſuppléés en effet avec des petits ronds pour les diſtinguer des zéros néceſſaires, & cet accord me donne une grande opinion de la profondeur des méditations de *Fohy*. Car ce qui nous paroit aiſé maintenant, ne l'étoit pas tant dans ces tems éloignés. L'Arithmétique Binaire, ou Dyadique, eſt en effet fort aiſée aujourd'hui, pour peu qu'on y penſe, parce que notre maniére de compter y aide beaucoup, dont il ſemble qu'on retranche ſeulement le trop. Mais cette Arithmétique ordinaire par dix ne paroit pas fort ancienne, au moins les Grecs & les Romains l'ont ignorée, & ont été privés de ſes avantages. Il ſemble que l'Europe en doit l'introduction à *Gerbert*, depuis Pape ſous le nom de *Sylveſtre II*, qui l'a eue des Maures d'Eſpagne.

Or comme l'on croit à la Chine que *Fohy* eſt encore auteur des caractères Chinois, quoique fort altérés par la ſuite des tems, ſon eſſai d'Arithmétique fait juger qu'il pourroit bien s'y trouver encore quelque choſe de conſidérable par rapport aux nombres & aux idées, ſi l'on

 pouvoit

pouvoit déterrer le fondement de l'écriture Chinoiſe, d'autant plus qu'on croit à la Chine, qu'il a eu égard aux nombres en l'établiſſant. Le R. P. *Bouvet* eſt fort porté à pouſſer cette pointe, & très capable d'y réuſſir en bien des maniéres. Cependant je ne ſçai s'il y a jamais eu dans l'écriture Chinoiſe un avantage approchant de celui qui doit être néceſſairement dans une Caractériſtique que je projette. C'eſt que tout raiſonnement qu'on peut tirer des notions, pourroit être tiré de leurs Caractères par une maniére de calcul, qui ſeroit un des plus importans moyens d'aider l'eſprit humain.

N°. LXIX.

N°. LXIX.

DE LINEÆ SUPER LINEA INCESSU,

Ejuſque tribus ſpeciebus, motu radente, motu provolutionis, & compoſito ex ambobus.

Ex Actis Erud. Lipſ. ann. 1706.

L*Inea ad lineam incedit*, ſi illa ſpectata ut mota, hac ut quieſcente, altera alteram durante motu contingat; & quieſcens dicetur *Baſis*.

Si linea eodem modo ſemper puncto ſuo ſuper alia incedat, non niſi *radere* ipſam dicitur, velut ſi ſuper linea A B C D incedat linea L M N, puncto M in baſi A B C D perſiſtente. Abradet enim eminentiolas, ſi quæ ponuntur baſi adhærere; cùm alias linea, quæ continuè ſuum mutat punctum contactûs, adeoque *provolvitur*, eatenus non tam abradat has eminentiolas, quàm deprimat; & cùm linea ſuper linea tantùm provolvitur, dici poteſt alteram ab altera *lambi*. Tab. XIX. Fig. 70.

Si linea radens angulum L M C vel N M B ad baſin A B C faciat aſſignabilem, fieri poteſt, ut inter radendum circa punctum radens M tamquam centrum titubet, adeoque non incedat ſibi parallela, veluti ſi L M N ſitu ad priorem parallelo emota ponatur inter procedendum, punctum tamen M in Baſi remaneat.

Sed ſi Linea radens K L M N P angulum nullum aſſignabilem faciat ad baſin A B C D, id eſt, ſi ambo polygona conſtituant curvas in puncto M radente ſe mutuo contingentes, neque plus quàm unam in puncto contactûs rectam tangentem habentes, neceſſe eſt, lineam radentem ſuis veſtigiis ubique parallelam incedere. Ponamus enim punctum radens eſſe M, in quo baſis pars B C tangatur. Et quoniam ambæ lineæ A B C, & L M N ſunt curvæ, quæ ſe mutuò tangunt, habebunt etiam eamdem rectam tangentem, eamque ex hypotheſi unicam, quæ adeo ad curvam angulum aſſignabilem non faciet. Itaque & curvæ ad ſe invicem angulum aſſignabilem non conſtituent. Hinc verò ſequitur, curvam K L M N puncto eodem M per baſin A B C incedentem non poſſe nutare, ſeu angulum inter ambas curvas factum aſſignabilem variare, adeoque nec angulos earumdem plani lineæ mobilis rectarum in alium locum tranſeuntium, quibus immotam F G H reſpiciebant, hac tranſlatione aſſignabiliter

ter diverſos fieri ab iis, qui fuere in priore ſitu. Sit enim in plano curvæ radentis, quòd una cum ipſa moveatur, punctum I, & jungatur recta IK. Dico, hanc ſibi manere parallelam durante motu. Aſſumatur enim immobilis recta HG in plano immobili, per quod ipſum planum mobile ſemper incedat. Producta recta KI, uſque dum ipſi HG (productæ, ſi opus) occurrat in F, dico ſi motus ſit radens angulum HFK non poſſe variari, licèt KLMP aliorſum transferatur. Nam curvas rursùs concipiamus, ut Polygona, immobile ABCD, mobile KLMP. Cùm ergò totum. KLMP rigidum cenſeri poſſit, non poteſt nutare, ſeu rotari circa M, niſi alius fiat angulus LMC. Sed cùm is ſit infinitè parvus, non ſufficiet ad aſſignabilem nutationem, ut LM ſe ſe convertens circa M applicetur ad CB, ſed ulteriori rotatione opus erit. Ita verò ſi ponas ampliùs nutare lineam radentem, neceſſe eſt, ut punctum M erigatur a baſi, punctis L & K ſucceſſivè ad baſin depreſſis, quibus & ſucceſſivè tamquam ſuſtentantibus centris innitetur radens linea, ac circa ea gyrabit: Cùm tamen ſuppoſuerimus, punctum M continuè baſi manere applicatum. Idem eſt, ſi rotatio fieri ponatur in contrariam partem, ut non L, ſed N ad baſin deprimatur. Utroque igitur modo angulus LMC, vel NMB aſſignabiliter mutari nequit, quantumcumque duret motus, modo punctum M ſemper in baſi manere debeat, adeoque non recta KI ipſi lineæ radenti rigidè connexa, ſeu cum ea mobilis ad rectam HG (ipſi immobili lineæ ABCD rigidè connectibilem, ſeu cum ea immobilem) angulum KFH aſſignabiliter variare poteſt.

Hactenùs de motu radente potiſſimum diximus. Sed, ſi iiſdem poſitis curva KLM ſuper curva BCD velut baſi ea lege incedat, ut punctum M dictam lineam KLM ſuſtentans, (ſeu quo ea baſin tangit,) non idem incedat per plura baſeos puncta, ſed mutetur, alio continuè puncto curvæ mobilis ad aliud punctum baſis, parsque, aliaque parte mobilis ad aliam partem baſis applicata; neceſſe eſt, ut curva KLM rotetur circa prius punctum ſuſtentans M, donec aliud, nempe L, baſin attingat. Ita hoc jam erit punctum ſuſtentans novum, ſuper quo facta gyratione prius M a baſi elevabitur in alteram partem. Hoc motu continuato dicetur curva ſuper baſi nonniſi *provolvi*, dicetur etiam altera alteram lambere, & tunc continget partes baſeos, ac partes mobilis curvæ, quæ provolutione jam defunctæ ſunt, inter ſe æquari; pars enim parti, latus polygoni, lateri alterius polygoni congruit, nec una pars unius pluſquàm uni alterius congruenter applicatur. Inſuper ſi punctum aliquod conſtans, exempli gratiâ, curvæ provolutæ in eodem plano annexum ponatur, illud deſcribet *Trochoidem* I (*i*) cui normalis erit recta MI a puncto ſuſtentante ad punctum deſcribens ducta. De quo motus genere jam multa apud Geometras habentur potiſſimæque ejus ſpecies ſunt, quæ dant lineas *Cycloidales*, & *Epicycloidales*.

Denique

Denique Curva mobilis K L M ſuper baſi B C D incedere poteſt *motu compoſito ex radente, & provolvente*, ſi dum M procedit in B C versùs D, ſimul L M N nutet, & gyretur circa M, donec L attingat B C D, & loco ipſius M ſubeat puncti ſuſtentantis vicem, & mox itidem (ut prius fecerat M) ſimul, & procedat in baſi, & tamen centrum ſit gyrationis Curvæ K L M, per quam nunc M a baſi elevetur. Et ratio inter celeritates gyrationis, & motus radentis, ſeu paralleli determinabit ſpeciem hujus inceſſûs, in quo nec motus eſt parallelus, ut in puro radente, neque arcus baſeos, & Curvæ mobilis contactu defuncti inter ſe ſunt æquales, ut in puro provolvente: nam quantitas motûs radentis inceſſui huic immiſti eſt longitudo, qua arcus curvæ incedentis deficit ab arcu baſeos percurſo. Punctum autem conſtans in plano Curvæ mobilis deſignatum ut J, non jam Trochoidem deſcribet, ſed lineam factam compoſitione ex motu parallelo, ſeu æquali cum motu radente puncti ſuſtentantis (qui motus toti plano mobili communis eſt) & ex proprio motu gyrationis, quem exercet punctum deſcribens J circa punctum ſuſtentans; qui motus nonniſi eis plani punctis communis eſt, quæ tantumdem a puncto ſuſtentante abſunt.

Hic motus plerumque a rotis exercetur, cùm ſimul trahuntur, & volvuntur, quod fit præſertim cùm axis non ſatis eſt lubricatus, quæ cauſa eſt aliquando, ut penè tanta ſit difficultas in gyrando, quanta in procedendo: unde etiam rotæ non ſunt fidum ſatis medium longitudinem itineris ſuis converſionibus menſurandi. Ideoque etiam ſi quis puram provolutionem deſideret, id eſt ſi quis Cycloidem accuratè deſcribere velit, vel Epicycloidem (cùm circulus ſuper circulo volvitur, vel etiam Trochoidem, aliam quamcumque; non ſufficit rotam liberè incedere, ſed neceſſe eſt filum, vel catenulam rotæ circumdari; quæ inter provolvendum evolvatur, & extenſa remaneat in baſi. Veluti ſi rotæ pars T V provoluta per Q R ibi reliquerit funis Q R X partem Q R, dum pars R X adhuc rotæ ſit affixa; continuata verò provolutione ſimiliter applicari debeat dicta pars R X baſi reliquæ R S. Tab. XX. Fig. 71.

Porrò curva, quæ baſin nonniſi radit, adeoque veſtigiis ſuis parallela incedit, ſingulis punctis plani ſui mobilis deſcribet lineas baſi ſimiles, & æquales, ſeu congruentes. Nam rectæ 1 N 2 N, 2 N 3 N, reſpectivæ parallelæ, & æquales ſunt ipſis 1 M 2 M, 2 M 3 M, id eſt, rectis AB, B C, idemque eſt de motu puncti L, quod de motu punctorum M & N. Et ſi quis agnoſcat, quævis plani mobilis puncta ut L & N deſcribere lineas congruas inter ſe, idem ei dicendum erit de puncto ſuſtentante M, nempe deſcribere lineas prioribus congruas, cùm punctum N ipſi inaſſignabiliter vicinum aſſumi poſſit, adeoque in ipſam tandem incidere intelligatur. Quia autem M deſcribit baſin, utique lineæ a punctis L & M deſcriptæ, Baſi congruent. Tab. XX. Fig. 72.

T. XIX. Fig. 70. Mechanicè efficiemus, ut Curva in baſi non incedat, niſi radente motu, ſi ex puncto I recta I λ educta ſit, quæ ipſi H G normaliter occurrant ad β; craſſitie ipſius rectæ materialis H G F radente infra planum paginæ, & craſſitie ipſius I λ cadente ſupra: & præterea ex recta rigida I λ exeat normaliter alia recta rigida, ſeu regula β α, cadens ſemper inter ipſas rigidas immobiles G H, γ μ, inter ſe parallelas, per H γ connexas, nec magis invicem remotas, quàm ut β α exactè inter eas labi ſeu ultro citrove ire poſſit. Ponamus regulam β α, ſervato angulo recto, poſſe aſcendere & deſcendere in ipſa I λ. Ita β α libertatem habebit duplicis motûs unius horizontalis (ſi placet) quo incedit ſecundum ipſam G H alterius verticalis, quo prorſum & retrorſum ire poteſt in recta I λ. Quum ergo recta α β maneat ſemper ſibi in directum, & recta I λ ſit ſemper ei normalis, utique recta I L ſemper ſuis veſtigiis parallela erit, adeoque, & Curva K L M N motu parallelo movebitur; dumque interim ſemper applicatur baſi, radet eam eodem ſemper puncto M. Si baſis eſſet circulus, figura ſuper baſi incedens radendo moveretur eo motu, quem *Hobbius* olim vocavit circularem ſimplicem, & de quo quædam ingenioſè jam tum obſervavit in *Elementis de Corpore*, & in *Problematibus*, & inter alia, quòd dum quælibet recta in plano ſic moto deſignata, manet ſuis veſtigiis parallela, neceſſariò durante motu quævis puncta plani deſcribant lineas inter ſe æquales, & ſimiles. Sed nos addimus eumdem eſſe hunc motum cum motu curvæ aliam uno puncto ſuo radentis.

Cæterùm ſive motus ſit purè radens, ſive purè provolutorius, ſive ex utroque compoſitus, nihil refert utrum ſit obradens, an ſubradens; obvolutorius, an ſubvolutorius; id eſt utrum curva mobilis convexam, an concavam faciem Curvæ immobilis radat, vel lambat. Convexa autem facies Curvæ ab alterius curvæ convexa, & concava, ſed concava, & recta non niſi a convexa tangi poteſt, adeoque & radi, vel lambi.

Porrò notandum eſt, motum *evolutionis*, quem excogitavit *Hugenius*, & motum *coevolutionis*, quem addidit Dn. *de T*, & cujus utilitates ad conſtruenda optica, & alia problemata ego primus oſtendi, eſſe caſus ſpeciales motûs *puræ provolutionis*. Nam idem eſt, ac ſi ponas rectam rigi-
Tab. XX. Fig. 71. dam ſuper baſi volvi, ſimulque filo affixo regi, ne radere poſſit baſin. Ponamus filum Q R X extremo quidem X curvæ T V X affixum eſſe, extremo autem Q rectæ Q R S ſeu regulæ W Q R S; Curvam autem (contra quam ante) eſſe baſin immobilem, ſupra qua incedat recta rigida, ſeu regula W Q R S. Hæc primùm in ſitu (W) (Q) (R) (S) poſita tangat baſin in puncto X, in quo incidit (S), filo toto adhuc exiſtente in regula, quæ deinde volvatur ſuper baſi curvilinea X V T, per arcum ejus X V, donec puncto ſuo R eam tangat in puncto ejus V, relicta parte fili X R in dicto baſis arcu X V, reliqua fili parte R Q manente in Regula Q S. His poſitis manifeſtum eſt, dum regula ſuper baſi circulari

circulari provolvitur, ſimul huic ipſi Baſi obvolvi filum, eumque motum obvolutionis eſſe tantum contrarium motui evolutionis, & punctum in regula ſumtum ut W, hac provolutione regulæ, vel obvolutione fili deſcribere curvam W (W): quæ eadem curva etiam per evolutionem deſcribetur, dum (remota regula, vel manente, ut lubet) filum WQ continuò tenſum, & curvam VS tangens, ita movetur, ut portio ejus RX à curva VX devolvatur. Pro motu autem *coëvolutionis* ſimili ratione repræſentando opus eſt duas regulas rigidas, filum inter ſe partiri, ita tamen ut de una in aliam tranſire poſſit, ſed ope ſtyli ad ambas regulas in puncto, ubi ſe ſecant, implicitum teneatur. Et quamvis duæ rigidæ rectæ ſe propriè ſecare (ſua nempe craſſitie) non poſſint, æquivalens tamen effici poteſt, dum una ſub alia tranſit, & ſuperioris ima, inferioris ſumma recta pro ipſa regula rigida aſſumuntur, filumque ſemper ad duarum iſtarum rectarum interſectionem ſtylo applicitum tenetur.

Poſtremò, quotieſcumque una, eademque linea rigida movetur in eodem plano, diverſiſque ſuis ſitibus tamquam totidem curvis concurrentibus, intelligitur formare novam curvam omnes illos ſitus tangentem; perinde eſt ac ſi curva rigida mobilis incedat ſuper ea, quam ſuorum ſituum concurſibus format, tamquam baſi, motuſque erit modò purè radens, modò purè provolvens, modò denique, ut plerumque fit, compoſitus prout conditiones a nobis præſcriptæ obſervabuntur.

Si fingeretur curva mobilis KLMN dentibus interciſa, baſi verò eſſet obvoluta fili loco catena, cujus articuli dentibus reſponderent, ita ut inter volvendum dentes articulis infererentur, catenula ſolo motu radente volutioni admiſſo propelleretur, vel potiùs traheretur in baſi: quod etſi ad Mechaniſmum accuratum non ſit aptum, inſervit tamen ad diſtinctionem motûs radentis, & provolutorii meliùs intelligendam. Pars enim baſeos, quam extremitas catenulæ protractæ percurrere intelligitur, detracta a toto arcu baſeos, dabit arcum baſeos, arcui curvæ mobilis inceſſu jam defuncto æqualem, modò ab extremo catenæ inceperit inceſſus. Tab. XIX. Fig. 70. Hæc dudum meditata, ut ederemus, occaſio invitavit.

N°. LXX.

N°. LXX.

EXCERPTUM EX EPISTOLA AUCTORIS,

Quam pro ſua Hypotheſi phyſica motus planetarii ad amicum ſcripſit (a).

Ex Actis Erud. Lipſ. anni 1706.

VIR doctus, qui ante aliquot annos in opere ſuo Aſtronomico Hypotheſin meam impugnavit, vim ejus, atque utilitatem non ſatis animo complexus eſt. Habet enim ea commodum hoc inſigne, ut corpora ſolida harmonicè circulantia in fluido ſimiliter circulante perinde moveantur, ac ſi non niſi ſuo impetu, ſuaque gravitate in medio tamquam vacuo (id eſt, non reſiſtente) circularentur; & contrà ut fluidum circulans à ſolidi illius circulatione non turbetur, perinde ac ſi ſolidum non adeſſet, vel non niſi pars fluidi eſſet; quod alia quæcumque circulatio efficere nequit. Itaque etſi circulationibus non conſpirantibus moverentur fluidum, & ſolidum, tandem tamen longo temporis tractu ad circulationem harmonicam conſpirantem reducerentur, quo minùs ſibi obſtent, aut a ſe invicem turbentur. Unde etiam intelligitur, objectiones hujus Autoris contra vortices, ſeu orbes fluidos deferentes, hanc circulationis ſpeciem non ferire.

Cæterùm illud facilè colligitur, legem circulationis harmonicæ ab ipſo fluido exercendæ non niſi in eodem orbe ſervari, ad orbis conſonantiam cum ſuo planeta obtinendam; idque eo facilius eſt, quòd unius orbis, intra quem ſcilicet verſatur planeta, ſi cum toto vortice planetario conferatur, exigua eſt craſſitudo. Sed in toto vortice, diverſos planetas conferendo inter ſe, ubi motus medius planetæ tamquam in circulo pro toto ejus per orbem motu elliptico aſſumi poteſt; dicendum eſt, obtinere legem Keplerianam temporum Periodicorum: quæ etiam ex conſonantia ipſa motûs liberi, & vorticoſi naſci debet; cùm & liberi impetus hoc ferat cum gravitate compoſitio, & ipſum æquilibrium motûs vorticoſi, ut aliàs fuſiùs explicabitur.

Obſervandum tamen eſt, etſi nihil in ipſa re, tamen aliquid in enunciatione noſtra in melius mutari debere, quo veritatum concentus appareat abſolutius. Nempe dicendum eſt, impreſſionem novam paracentricam planetæ

(a) Vid. Num. 24.

planetæ harmonicè circulantis, ſimulque ad Solem, vel aliud centrum gravitantis, conſtare ex conflictu gravitationis, & conatus centrifugi, ſimpli ſcilicet; non dupli, qui mihi ex incommoda Termini acceptione emerſerat, cujus emendationem utilem puto, ut verba rebus quàm optimè conſentiant. Certè gravitatio novam ſollicitationem accedendi ad centrum, at conatus centrifugus circulantis novam ſollicitationem recedendi a centro conſtituit, variantibus ambabus pro diſtantia a centro: & ipſe conatus totalis inde reſultans, in horum conatuum differentia conſiſtit, ſequiturque directionem prævalentis. Porrò *conatus centrifugus circulantis* dupliciter accipi poteſt: vel pro eo, quem mobile exercet, ſi motus proximè præcedens concipiatur in tangente circuli, vel pro eo, quem mobile exercet, ſi motus proximè præcedens concipiatur in ipſo arcu circulari. Hoc loco enim, ubi ad infinities infinitè parva deſcenditur, angulus contactus negligi non debet. Prior conatus centrifugus locum revera habet initio circulationis, adeoque initialis quidem eſt, ſed non durans; poſterior verò perſiſtit, locumque habet in progreſſu circulationis. Illum ergo, qui initialis eſt, dicemus *tangentialem*, hunc qui perdurat, *arcualem*: & poſito æquali utrobique circulationis impetu, arcualis eſt duplus ipſius tangentialis; cùm hic repræſentetur per ſinum verſum, ille per ejus duplum. Simpliciter autem nomine conatus centrifugi, Arcualem accipere præſtat, cùm de circulatione planetæ (quippe dudum cœpta) agitur, ita enim elegantior & rotundior enunciatio erit.

Sed ut res intelligatur, ſit radius A C mobilis circa centrum C, & elementaris arcus circuli, hoc centro deſcriptus, ſit E A G, biſectus in A, ut chorda E G radium ſecet ad angulos rectos, & ab eo biſecetur in B. Compleatur rectangulum A B G D, & in B C ſumta B H æquali ipſi A B, compleatur Parallelogrammum A H G F. Jam ponamus mobile I moveri uniformiter velocitate repræſentata per ſpatium elementare I A, æquale ipſi A D, certoque temporis Elemento veniens ab I ad A, impingere in A, angulo I A C recto, & ibi ipſo attactu adhæreſcere radio in puncto A; impetuque ſuo gyrationem radii efficiendo circa C, mox deſcribere, æquali cum priore temporis Elemento, arcum Elementarem A G. Poteritque motus A G compoſitus intelligi ex impetu priore I A, ſeu AD, & ſollicitatione centripeta A B (neque enim hic refert A G de arcu, an chorda intelligatur) adeoque mobile, cùm pro A D deſcribit A G, retineri in circulo, vi, quæ ſit ut A B, vel D G; id eſt, conatum centrifugum (vi retinenti æqualem) eſſe ut D G, ſinum verſum arcus A G; atque hic eſt conatus centrifugus initialis, vel Tangentialis. Sed ſi mobile in A poſitum jam dudum in circulatione verſetur, veniatque non in tangente I A, ſed in arcu E A, veluti ſi veniat ex E in A, cum radio C A deſcribente arcum E A; motu nempe uniformi, & eodem temporis Elemento, quo prius diximus percurri I A. His poſitis impetus, quem Fig. 73.

 mobile

mobile habet in A, eſt ut E A, quæ (recta an circularis nil refert) longitudine non differt comparabiliter ab 1 A, ſeu AD. Idem eſt ergo magnitudine, impetus circulandi, qui ante; ſed directionem aliam habet, nempe chordæ E A, quæ producta cadit in F. Quare continuata æquali cum priore temporis elemento circulatio, per A G, compoſita intelligi poteſt ex impetu priore ut E A, vel A F (quæ eſt æqualis, & in directum ipſi EA,) & ex ſollicitatione centripeta A H, vel F G, dupla ipſius DG, ſinus verſi arcus A G. Duplus ergo ſinus verſus circulationis, conatum centrifugum arcualem repræſentabit, qui eſt duplus ipſius tangentialis, ſeu initialis, ut oſtendendum erat. Et licet verum ſit, etiam conatus centrifugos arcuales eſſe ut ſinus verſos arcuum, quia dupli ſunt ſimplis proportionales; revera tamen comparatione tangentialium per ſinus verſos repræſentatorum, horum duplis exprimentur.

Equidem olim (in dicto ſchediaſmate Februarii 1689.) conatus centrifugi nomine accepi non eum, quem revera impreſſionem planetæ a centro recedendi novam, vel elementarem a circulatione ortam, conſtituere intelligebam, & gravitationi verſus centrum nova impreſſione agenti opponebam; ſed initialem illum, vel tangentialem, qui prima fronte occurrit; ſed inde nata eſt incommoda enunciatio, qua nobis ipſi offecimus, obſcurato veritatum concentu. Dum enim ipſam PN in figura ſchediaſmatis dicti, nomine conatus centrifugi appellavimus, jam dicere oportuit (quemadmodum & fecimus) conflictum eſſe inter gravitatis ſollicitationem, & dupli conatus centrifugi impreſſionem. Sed ſi, ut par eſt, conatus centrifugi nomine intelligamus illam ipſam novam impreſſionem a circulatione ortam, quæ gravitationis impreſſioni novæ obnititur, tunc deſignatur utique conatus centrifugus ille, qui locum habet durante circulatione, ſeu arcualis. Quo ſenſu convenientiſſime, & ſimpliciter dicitur, impreſſionem paracentricam novam (qua celeritas ad centrum accedendi, vel ab eo recedendi mutatur) vel quod idem eſt, Elementum velocitatis paracentricæ eſſe differentiam inter gravitatis ſollicitationem 3 M. L. ſeu $2\,a\,\theta\theta : rr$ (vid. dict. Schediaſma §. 15 & 19) & inter conatum centrifugum $a\,a\,\theta\theta : r^3$ nempe arcualem, qui (per §. 12 & 15) exprimitur duplo ipſius P N ſinus verſi. Itaque arcualis erat ſimpliciter conatus centrifugi nomine hoc loco deſignandus. Occaſionem autem unius appellationis pro alia ſumtæ natam tunc ex eo ſuſpicor, quod *vim excuſſoriam* (cujus ſpecies eſt centrifuga) metitus ſum perpendiculari ex puncto ad tangentem proximè præcedentem; rectè ſanè, ſed per tangentem illam intelligi

Tab. xx. debet ea linea, in qua fuit directio proximè præcedens. Nempe *in figura*

Fig. 73. *præſente* ex puncto G perpendicularis ducenda eſt ad ipſius E A (circulationis præcedentis directionem repræſentantis) continuationem, ſeu ad A F, non ad A D, niſi circulatio incipiat in A, quo caſu A D eſt continuatio directionis præcedentis 1 A. Porrò perpendicularis ex G in A F

non

non differt comparabiliter ab ipſa FG. Ego verò etſi non in rei ipſius æſtimatione, tamen in appellatione, reſpexi generaliter ad AD tangentem in A, eique perpendicularem GD: Unde non quidem error, ſed tamen inconcinnitas prodiit, quam nunc ſublatam eſſe juvabit. Animadverſionis autem occaſionem mihi præbuere elegantes celeberrimi *Varignonii* de conatu centrifugo meditationes, etſi alio ipſius ſcopo; cùm alias a multo tempore de his parum cogitaſſem.

Hinc in dicto ſchediaſmate, Paragraphis 11, 12, 15, 21, 27, 30, pro duplo conatu centrifugo ponatur ſimpliciter conatus centrifugus; & pro conatu centrifugo ſimpliciter, ponatur dimidius. Eadem occaſione lapſus quoſdam in ejuſdem ſchediaſmatis figurâ emendare e re erit. Nam in linea ⊙. M 2, pro D 1, ponatur D 2; & ibidem inter M 2 & T 2, ponatur punctum G, ſic ut recta à G ad M 3 ſit parallela rectæ ab M 2 ad L. Denique infra, tribus punctis poſt Ω dextrorſum aſcendendo occurrentibus, ordine aſcribantur hæ literæ: M, 1 G, 2 G; ita prodibunt rectæ, quarum poſterior major priore, nempe hæ tres, ΩM, Ω1G, Ω2G.

Cauſam cur Attractiones Gravitatis ſint in ratione diſtantiarum (a Centro Gravia attrahente) reciproca duplicata; jam eo tempore, quo Schediaſma toties citatum vix edideram, cum Amicis nonnullis communicavi. Et memini celeberrimum Virum *Michaelem Angelum Fardellam*, Profeſſorem nunc Patavinum, egregiis ſcriptis de Philoſophia, & Matheſi bene meritum, cui eam rem Venetiis tunc explicabam, reponere: eodem modo a *Geminiano Montanario*, eximio quondam Mathematico, ſibi oſtenſum, illuminationes Objectorum eſſe in ratione diſtantiarum a radiante, reciproca duplicata. Quod verum eſt, aliiſque etiam notatum; & par hic ratio eſt, cùm non referat ad radiationis quantitatem, ſeu effectum, radiosne concipias attractivos (rem abſtractè, & mathematicè conſiderando) an illuminantes. Ita Ellipticus Planetæ motus a priori, lege gravitationis ex ſuis cauſis oſtenſa, comprobatur. Ego verò in Schediaſmate illo ex phænomenis, ſeu a poſteriori, id eſt, ex motu Elliptico obſervationibus comprobato, legem gravitationis derivaram, quæ cum tam bene rationibus radiationum Mathematicis conſentiret, eo magis Hypotheſi univerſæ fidendum judicabam.

N°. LXXI.

LETTRE DE M^R. LEIBNIZ A M^R. VARIGNON,

Sur les Inclinations centrales (a).

JE ſuis bien aiſe d'apprendre vos progrès dans la recherche des inclinations centrales. Je me ſouviens que lors qu'avant pluſieurs années j'examinai les cauſes phyſiques des mouvemens céleſtes, je trouvai que le problême ſe réduiſoit aux Quadratures. M. *Bernoulli* a bien fait de démontrer ce que M. *Newton* n'avoit pas démontré aſſez, que les ſeules Coniques ſatisfont dans le cas en queſtion. Après cela il faudra examiner ce qui vient quand le centre même eſt mobile, & quand un même mobile eſt attiré par deux centres, ou même davantage tout à la fois. Il importeroit d'y venir, pour voir ſi le mouvement de la Lune pourroit être déterminé paſſablement par ce moyen, car elle tend en même tems vers la Terre & vers le Soleil, pendant que la Terre eſt mobile elle-même. J'ai mis autrefois dans le Journal de Paris, une compoſition de tendances, qui pourra ſervir ici. Si le même Mobile M. a en même tems pluſieurs tendances, comme MA, MB, MC. ſa tendance, compoſée ou effective MD, paſſera par E, centre de gravité des points A, B, C, & ſera à ME, comme le nombre des tendances ſimples eſt à l'unité. Il y a lieu de former quantité de beaux théorêmes à cette occaſion, qui ſe préſentent aiſément quand on y penſe. Vous aurez vû dans le Journal de Leipzik, depuis que je n'ai pas eu de vos nouvelles, comment une difficulté qui vous étoit venue dans l'eſprit, m'a donné occaſion de me mieux exprimer *circa conatus centrifugos*.

Tab. xx. Fig. 74.

Ne connoiſſez-vous pas, Monſieur, un certain Monſieur *F. D. C. A. V.* qui envoye de tems en tems quelques piéces aux Actes de Leipzik, & qui, par exemple, au mois de May 1709, a fait quelque remarque ſur l'Analyſe démontrée du R. P. *Reyneau*?

Il me manque beaucoup de vos Mémoires, & même ceux de l'an 1705 me ſont venus ſans les figures. Un nommé M. *Nuguet* a paſſé ici l'Eté paſſé, & m'a dit, qu'il avoit trouvé quelque choſe ſur le moyen d'exciter le phoſphore dans le vuide; je ne ſçais ſi cela vous eſt connu. J'ai

(a) Cette lettre a été communiquée à l'éditeur par M. *d'Alembert*.

J'ai oublié de dire qu'aux tendances centrales on pourroit ajouter la réſiſtance du milieu. Or je trouve que cette réſiſtance eſt de deux eſpèces; l'une eſt la réſiſtance de la maſſe même du milieu, que le mobile doit déplacer; l'autre eſt la réſiſtance des ſuperficies, & vient à une eſpèce de ténacité dans le milieu, ou d'aſpérité, pour ainſi dire, dans le mobile. Mais je trouve que l'une & l'autre réſiſtance ſe réduit enfin à une ſemblable eſtime, & que toujours les pertes de vélocités ſont proportionnelles aux viteſſes. Quant à la réſiſtance de la maſſe, la choſe eſt claire d'elle-même. Mais à l'égard de la réſiſtance qui vient des ſuperficies, c'eſt comme ſi un Globe rouloit ſur un tapis, où il doit ſurmonter la force élaſtique de quantité de petits poils, qu'il plie en courant; d'où il ſuit, que la perte de ſa vélocité eſt proportionnée à la longueur de l'eſpace parcouru. Soit la vélocité totale g, la vélocité reſtée v. la longueur parcourue l. le tems t. la vélocité perdue ſera g, v, & les g-v, ſeront comme les l, donc en différentiant, les d-v, ſeront comme d l. Mais les d l ſont toujours les v d t; donc les d. v. ſont comme les v. d. t. Et par conſéquent les Elémens du tems étant égaux, les diminutions des vélocités ſont proportionnelles aux vélocités mêmes du mobile à chaque moment. Si le mobile perdoit continuellement de ſa vélocité par la réſiſtance du milieu, ſa circulation approcheroit de plus en plus de la ligne droite, ſi le milieu n'avoit lui-même un mouvement propre à entretenir la circulation. Vous m'obligeriez, Monſieur, ſi vous me faiſiez part quelquefois des nouveautés litteraires de l'Académie que j'apprends tard. Je ſuis entiérement &c.

Hanover le 12. *Février* 1711.

N°. LXXII.

EPISTOLA

AD V. CL. CHRISTIANUM WOLFIUM, Profeſſorem Matheſeos Halenſem, circa ſcientiam Infiniti.

Ex Actis Erudit. Lipſ. Supplem. Tom. V. ad ann. 1713.

QUæris a me, Vir Celeberrime, quid de Quæſtione nuper a Cl. *Guidone Grandio* renovata ſentiam, utrum $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 +$ &c. in infinitum ſit $\frac{1}{2}$; & quomodo abſurditas evitari poſſit, quæ in tali enuntiatione ſe oſtendere videtur. Nam cùm infinities occurrere videatur $1 - 1 = 0$, non apparet quomodo ex veris nihilis infinities repetitis poſſit fieri $\frac{1}{2}$. Intelligo, Dn. *Grandium* hanc vim infinito tribuere, ut ex nihilo faciat aliquid, & hinc non ineleganter illuſtrare velle creationem rerum, quæ ex nihilo fit per divinam omnipotentiam. Sed Creatio non eſt ſimplex repetitio Nihilorum, continetque realitatem novam, & poſitivam ſuperadditam. Audio etiam Cl. *Marchettum* Profeſſorem Matheſeos Piſanum, Grandianæ ſententiæ contradixiſſe, quamquam rationes ejus ad me non pervenerint. Sed rem, cùm jucundæ ſit diſquiſitionis, & imprimis ad *Scientiam infiniti* (hactenus nondum pro dignitate tractatam) illuſtrandam faciat; paulo altiùs repetere, & ad fontes ſuos revocare operæ pretium erit, quod ipſi Cl. *Grandio* non ingratum fore confido, cujus primariam hic concluſionem confirmamus, etſi nonnullas ejus ratiocinationes, & conſequentias animadverſione indigere putemus, ne quid ſcientia detrimenti capiat.

Oſtenſum eſt dudum ab iis qui ſummam terminorum progreſſionis Geometricæ (poſt magni *Archimedis* exhibitum in quadratura parabolæ ſpecimen) dederunt, ſed imprimis a *Gregorio a S. Vincentio*, eſſe $\frac{1}{1-x} = 1 + x + xx + x^3 + x^4$ &c. in infinitum, ſi ſcilicet ponatur x eſſe quantitas minor unitate. Hoc *Nicolaus Mercator* Holſatus tranſtulit ad $\frac{1}{1+x} = 1 - x + xx - x^3 + x^4 - x^5 +$ &c. in infinitum, quod (una cum priore) oſtendit ex continuata quadam diviſione; quamquam hoc etiam

etiam ex priore ſequatur, pro $-x$ ponendo $+x$. Idem primus in edita a ſe Logarithmotechnia docuit hoc applicare ad Quadraturam per ſeriem infinitam, atque hoc modo Quadraturam Hyperbolæ Arithmeticam nobis dedit, eamque ad Logarithmos adhibuit. Ego exemplo ipſius excitatus feliciter inveni, non ſolùm quadraturam Areæ, cujus ordinata eſt $\frac{1}{1-xx}$, inſervire ad Quadraturam Hyperbolæ; ſed etiam ſimiliter Tetragoniſmo Arithmetico Circuli inſervire $\frac{1}{1+xx}$. Cùm enim (loco x ponendo xx) $\frac{1}{1+xx}$ ſit $1-xx+x^4-x^6+x^8-x^{10}+$ &c. in infinit. hinc ſequebatur $\int\frac{dx}{1+xx}$ (quæ ſumma dat quadraturam ſectoris Circuli, ut ſingulari quadam methodo detexeram) fore $\int dx-\int xxdx+\int x^4dx-\int x^6dx+$ &c. ſeu (ex nota Quadratura Paraboloeidum) $\frac{x}{1}-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+$ &c. Unde in eo caſu quo $x=1$. prodit $\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+$ &c. in infinit. quæ ſeries infinita eſt ad unitatem, ut area Circuli ad quadratum Diametri. Hoc multo ante repertum in primo anno Actorum Reipublicæ Literariæ Lipſienſium publicavi. Poſtea autem in iiſdem Actis generalem expreſſionem dedi, quæ Quadraturam Sectoris Conicæ cujuſcumque centrum habentis uno theoremate complectitur. Atque hæc Cl. *Grandius* ſuo more ad captum eorum, qui minùs in calculo generali verſati ſunt, per lineas demonſtrare non ſpernendo conſilio voluit, ut res magis imaginationi ſubjiciatur, quod ego ipſe juvenis olim (ſed cum multis aliis cognatis inventis) cùm Pariſiis agerem, in publicum dare conſtitueram, ſimulque aperire originem inventionum, quæ fortaſſe ne nunc quidem ſatis patet. Sed ad alia poſtea vocatus intermiſi. Sanè facilius multo eſt inventionum dare demonſtrationem, quàm originem, quæ auget ipſam inveniendi artem.

Nunc omiſſa quadratura redeamus ad ſeriem ex terminis progreſſionis Geometricæ (qua ſola ad ſcopum noſtrum nunc indigemus) qualis eſt $\frac{1}{1+x}=1-x+xx-x^3+$ &c. in infinit. vel $\frac{1}{1+xx}=1-xx+x^4-x^6+$ &c. in infinit. conſideremuſque, quid fiat, ſi ſit $x=1$: ibi verò prodit, non ſine admiratione conſiderantis $\frac{1}{1+1}$ ſeu $\frac{1}{2}=1-1+1-1+$ &c. in infinit. Idque oculis quodammodo admovet figura a Dn. *Gran-*

dio

Tab.XXI. Fig. 75. *dio* adhibita. Sit enim quadratum bIAV; ducatur recta diagonalis Ab, vel A1b, ducantur & infinitæ parabolæ, vel paraboloeides, A2b, A3b, A4b, A5b. &c. ita ut latus quadrati appellando unitatem, & abſciſſam AG vocando x, & ducendo rectam yG, ad AG normalem, quæ ſecet diagonalem, & paraboloeides in 1, 2, 3, 4, 5, &c. tunc ordinata, Gy, G1, G2, G3, G4, G5, &c. reſpectivè futuræ ſint, 1, x, xx, x^3, x^4, x^5, &c. ut proinde rectæ Gy, G1, G2, G3, G4, &c. ſint progreſſionis Geometricæ. His poſitis, producatur bV uſque in B, ita ut BV ſit = bV; & yG in D, ita ut GD ſit aggregatum harum ordinatarum alternis per additionem, & ſubtractionem conjunctarum, ſeu ut GD ſit Gy — G1 + G2 — G3 + &c. vel quod (per ſupra oſtenſa) eodem redit, ut GD ſit $= \frac{1}{VA + AG} = \frac{1}{1 + AG}$ & completo quadrato BVAH deſcribatur curva SDH, tranſiens per quæcumque puncta ut D, & occurrens ipſi AH, in H, & ipſi BV in S: patet in caſu quo fit AG = VA = 1 fore GD $= \frac{1}{1 + xx} = \frac{1}{2}$ = VS ſeu GD = $\frac{1}{2}$ BV, & proinde in eo caſu, quippe quo G cadit in V, & D in S, fore VS = $\frac{1}{2}$ BV vel $\frac{1}{2}$ AV. Et quia in eo caſu omnia puncta 1, 2, 3, 4, 5, &c. coincidunt in unum idemque punctum B, hinc G1, G2, G3, G4, &c. fiunt Gy, vel BV, & poſtremò ex Gy — G1 + G2 — G3 + &c. fiet BV — BV + BV — BV + &c. = $\frac{1}{2}$ BV.

Atque hoc conſentaneum eſt *Legi Continuitatis*, a me olim in Novellis Literariis Bælianis primùm propoſitæ, & legibus Motûs applicatæ: unde fit, *ut in continuis extremum excluſivum tractari poſſit ut incluſivum*; & ita ultimus caſus, licèt tota natura diverſus, lateat in generali lege cæterorum, ſimulque paradoxa quadam ratione, & ut ſic dicam, *Figura Philoſophico-rhetorica* punctum in linea, quies in motu, ſpecialis caſus in generali contradiſtincto comprehenſus intelligi poſſit; tamquam punctum ſit linea infinitè parva, ſeu evaneſcens, aut quies ſit motus evaneſcens; aliaque id genus, quæ *Joachimus Jungius*, Vir profundiſſimus, *toleranter vera* appellaſſet, & quæ inſerviunt plurimum ad inveniendi artem, etſi meo judicio aliquid fictionis, & imaginarii complectantur, quod tamen reductione ad expreſſiones ordinarias ita facilè rectificatur, ut error intervenire non poſſit: & alioqui natura ordinatim ſemper, non per ſaltus procedens, legem continuitatis violare nequit.

Verùm enim verò hic oſtendit ſe difficultas, & a te, Vir Clariſſime, & a Cl. *Marchetto* meritò objecta. Cùm enim BV — BV, vel 1 — 1 ſit 0; nonne ſequitur BV — BV + BV — BV + BV — BV + &c. in infinitum, vel 1 — 1 + 1 — 1 + 1 — 1 + &c. in inf. nihil aliud eſſe quàm 0 + 0 + 0 + &c.? quod quomodo facere poſſit $\frac{1}{2}$, non apparet. Cl.

Grandius

Grandius difficultatem ſimili quodam ingenioſè tollere conatur. Fingit, duos fratres in familia hercifcunda occupatos invenire in paterna hæreditate immenſi pretii gemmam, eamque alienare teſtamento prohiberi; itaque ita convenire inter ſe, ut alternis annis in alterutrius muſeo collocetur. Itaque ſi in æternum hæc lex inter hæredes ſervari ponatur, alterutram fratrum lineam, cui infinities detur, & infinities adimatur gemma, dimidium juris in ea rectè habituram.

Sed re accuratiùs conſiderata, ſimilitudo hic nimis claudicat, & *primùm* quidem quia in caſu noſtro (ipſo ſentiente Cl. *Grandio*) res pendet a privilegio infiniti, quod, ſecundùm ipſum, repetitione ex Nihilo Aliquid faciat. At in caſu iſto familiæ hercifcundæ res æquè locum habet, licèt finitus ſit annorum numerus. Finge enim, duobus gemmam non ex hæreditate paterna, ſed legato amici, obveniſſe, nec proprietatem relictam in perpetuum, ſed uſum tantùm in centum annos; patet eodem modo jura eorum ſalva fore, ſi alternis eam annis poſſideant. At verò in caſu noſtro, ſi centies ponantur unitates, alternis addendo, & ſubtrahendo, ſeu ſi quinquagies ponatur $1 - 1$, imò quingenties millies, ſemper prodibit o.

Et *ſecundò* ipſa ratio differentiæ in eo conſiſtit, quod in caſu communis juris duorum, alternis poſſidentium, id quod datur & tollitur, non eſt totum jus in re, ſed uſus unius anni, & non niſi totius juris particula: & toto jure in annos diſtributo, uſque in centum annos conceſſo, patet uſum unius anni non eſſe niſi centeſimam partem juris integri; & ita cùm unusquiſque hoc modo obtineat quinquaginta centeſimas, patet unumquemque totius juris dimidium habere. Sed in caſu noſtro ipſa unitas, ipſum totum (non particula) nunc datur, nunc adimitur. Itaque ſimilitudo illa, etſi ſpecioſa, ſi accuratiùs intueare, nihil ad rem facit.

Nunc ergò veram, & fortaſsè inexpectatam, certè ſingularem, *ænigmatis* ſolutionem, & *paradoxi* rationem afferamus; redeundo ad ſeriem finitam, & deinde tranſeundo ad infinitam. Conſiderandum eſt nempe, caſus ſeriei infinitæ mira quadam ratione confundi. Nempe *ſeries finita* $1 - 1 + 1 - 1 +$ &c. dupliciter explicari poteſt, vel enim conſtat ex *numero membrorum pari*, & terminatur per $-$ veluti

$$1 - 1, \text{ aut } 1 - 1 + 1 - 1, \text{ aut } 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1,$$

aut quouſque tandem progrediare; quibus caſibus ſemper prodit o: vel *numero membrorum impari*, & terminatur per $+$, veluti

$$1 \text{ aut } 1 - 1 + 1, \text{ aut } 1 - 1 + 1 - 1 + 1,$$

aut quouſque tandem progrediare; quibus caſibus ſemper prodit 1. At cum *Series* eſt *infinita*, nempe $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 +$ &c. in infinitum, ita ut excedat numerum quemcumque; tunc evaneſcente natura numeri, evaneſcit etiam paris, aut imparis aſſignabilitas: & cùm ratio nulla ſit pro paritate magis, aut imparitate, adeoque pro prodeunte o magis quàm pro 1,

pro 1, fit admirabili naturæ ingenio, ut tranſitu a finito ad infinitum ſimul fiat tranſitus a disjunctivo (jam ceſſante) ad unum (quod ſupereſt) poſitivum, inter disjunctiva medium. Et quoniam ab iis qui de æſtimatione ſcripſere, oſtenſum eſt, cùm medium inter duas quantitates pari ratione nitentes ſumendum eſt, ſumi debere medium Arithmeticum, quod eſt dimidium ſummæ, itaque natura rerum eamdem hic obſervat *juſtitiæ legem*; & proinde cùm $1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 +$ &c. in caſu finito numeri membrorum paris ſit 0, at in caſu finito numeri terminorum imparis ſit 1; ſequitur evaneſcente utroque in caſum membrorum multitudine infinitorum; ubi paris, impariſque jura confunduntur, & tantumdem rationis pro utroque eſt; prodire $\frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}$ quod proponebatur.

Porrò hoc argumentandi genus, etſi Metaphyſicum magis quàm Mathematicum videatur, tamen firmum eſt: & alioqui Canonum *veræ Metaphyſicæ* (quæ ultra vocabulorum nomenclaturas procedit) major eſt uſus in Matheſi, in Analyſi, in ipſa Geometria, quàm vulgo putatur. Hoc loco autem aliunde, ratione ſcilicet initio poſita (cùm quævis ordinata GD ſit $\frac{1}{1+AG}$, adeoque cùm AG ſit AV, vel 1, fiat VS, $\frac{1}{1+1}$) ſcimus VS eſſe $\frac{1}{2}$ BV; & poſſemus etiam oſtendere, ſumendo G quantum libet vicinum ipſi V, fore etiam GD quantum libet vicinum ipſi $\frac{1}{2}$ BV, ita ut differentia reddi poſſit minor data quavis quantitate; unde *Archimedeo* inferendi more, etiam ſequitur VS eſſe $\frac{1}{2}$ BV. Interim ex ipſa ſerierum, & infiniti natura idem colligi, non jucundum tantùm, ſed etiam ad accuratas de infinito ratiocinationes inſtituendas, recludendoſque magis magiſque novæ doctrinæ fontes, utiliſſimum futurum eſt. Simul cavebitur, ne ſcientia nova per paradoxa minimè defendenda, infametur. Itaque ad objectionem, quod ex nullitatibus quotcumque minimè fieri poſſit aliquid, non reſpondendum erat diſtinguendo inter finitum & infinitum, quaſi regula in infinito fallat; ſed conceſſa generaliter regula, oſtendendum erat, uti nunc factum eſt, applicationem ejus hic ceſſare.

N°. LXXIII.

N°. LXXIII.

REMARQUES DE M^R. LEIBNIZ

Sur l'Art. V. des Nouvelles de la République des Lettres du mois de Février 1706.

Tirées de ces Nouvelles du mois de Novembre de la même année.

ON rapporte dans cet Article des *Nouvelles de la République des Lettres*, un éloge de feu Mr. *Bernoulli* (prononcé à l'Académie des Sciences de Paris), où il y a des erreurs de fait, qui me regardent. Et, comme il importe beaucoup, pour l'avancement même des Sciences, que les perſonnes appliquées aux méditations profondes, joignent les bonnes qualités du cœur à celles de l'eſprit; j'ai crû à propos d'éclaircir, & de rectifier quelques endroits de cet Article, qui pourroit faire tort à Mrs. *Bernoulli*, & à moi. Parmi les choſes avantageuſes qu'on a la bonté de dire de moi, & qu'on dit d'eux avec juſtice, on en ajoute, que des Juges ſévéres auroient raiſon, à mon avis, de condamner. Car on inſinue, qu'ayant laiſſé entrevoir quelque choſe de mon ſyſtême des *Infiniteſimales*, Meſſrs. *Bernoulli* avoient médité ſi profondément ſur ces foibles rayons, qui m'étoient échappés, qu'ayant réſolu de m'*enlever* la gloire de l'invention, ils y avoient réuſſi, & avoient même *publié mon ſyſtême* avant moi. Il ſemble que c'eſt me faire paſſer pour envieux, & eux pour injuſtes. L'un & l'autre eſt ſans fondement. Voici le fait. Ayant trouvé mon nouveau calcul dès l'an 1674. je fus long-tems ſans en rien faire paroître, parce qu'étant retourné de France en Allemagne, j'eus des occupations & des emplois qui m'en détournérent. L'affaire méritoit un Ouvrage exprès, & je n'avois pas tout le loiſir qu'il demandoit, pour répondre à mes vûës & à l'attente du Public. Outre que j'ai toujours eu de la peine à travailler ſur ce que j'avois déja en mon pouvoir, aimant à pouſſer pluſieurs autres vûës d'une nature toute différente, dont je pourrai peut-être, quelque jour, entretenir encore le Public ſi Dieu me continue la vie & la ſanté. Cependant, quelques-uns de mes anciens amis, & particuliérement Mrs. *Mencken* & *Pfauz*, ayant commencé le Journal de Leipſic, je fus bien aiſe de leur communiquer quelques échantillons de mes méditations Géométriques, pour contribuer à varier leurs

 collec-

collections. L'approbation publique & leurs invitations m'engagérent à continuer de tems en tems. Enfin, ne me voyant ni trop en état, ni aſſez en humeur de travailler à l'ouvrage de ma nouvelle Analyſe, je pris la réſolution, de peur qu'elle ne ſe perdit, d'en publier des Elémens en abrégé, c'eſt à dire, l'*Algorithme* de ce calcul, qui en contient l'application à l'addition & ſouſtraction, à la multiplication & diviſion, & aux puiſſances & racines. Feu Mr. *Bernoulli* Profeſſeur de Baſle m'écrivit là-deſſus, & me demanda quelque éclairciſſement ſur la réſiſtance des ſolides, dont j'avois donné une détermination dans le Journal de Leipſic, au-delà de celle de *Galilée*. Cela fit naître quelque commerce de lettres entre nous, que mon voyage d'Italie interrompit. Cependant, je donnai un échantillon nouveau de mon calcul, en l'appliquant au mouvement des Planètes, & j'y fis voir l'uſage des *Infiniteſimales* du ſecond degré. Feu Mr. *Bernoulli* y étoit attentif, mais il n'y trouva entrée, que lorſqu'il vit comment je m'y prenois pour appliquer ce calcul à des Problêmes Phyſico-Mathématiques. J'en avois propoſé un à Mr. l'Abbé *Catelan*, qui dans un petit démêlé que nous avions, vantoit trop les méthodes Cartéſiennes, comme ſuffiſantes à tout. Cet Abbé demeura court là-deſſus, & il n'y eut que Mr. *Huygens*, qui trouvant le Problême digne de ſa curioſité, (c'étoit de trouver une courbe dans laquelle le corps peſant deſcende également vers l'Horizon, ou ſans accélération) en donna la ſolution, quoique par une méthode différente de la mienne, mais ſans en ajouter la démonſtration. Donc pour dépêcher ce Problême, j'en publiai une, laquelle marquoit les traces de mon Analyſe. C'eſt ce qui acheva d'ouvrir les yeux à Mr. *Bernoulli*. Il l'avoüa lui même, & voyant qu'un nouveau champ étoit ouvert, il me pria, à la ſuggeſtion de Mr. ſon Frére, qui entroit déja bien avant dans ces matiéres, de penſer ſi par la même Analyſe, on ne pourroit point arriver à des Problêmes plus difficiles, maniés inutilement par d'autres; & particuliérement à la courbe, qu'une chaine doit former, ſuppoſé qu'elle ſoit parfaitement flexible par-tout, que *Galilée* avoit crû être la Parabole, quoiqu'ils ne ſçuſſent point alors qu'il y avoit travaillé. J'y penſai, & j'en vins d'abord à bout; mais au lieu de publier ma ſolution, j'encourageai Mr. *Bernoulli* à la chercher auſſi. Mon ſuccès fut cauſe, ſans doute, que les deux Fréres s'y appliquérent fortement, & que le plus jeune, dont je viens de parler, depuis Profeſſeur à Groningue, & maintenant à Baſle, eut l'avantage d'y réuſſir entiérement. Pour y arriver par le moyen de ce que j'avois déja communiqué, il faloit une adreſſe extraordinaire, & quelque exercice, que l'application & l'envie de ſe ſignaler leur donna pour ſe bien ſervir de ce nouveau calcul. Après cela ils furent en état d'aller bien loin. Cependant, ils m'ont toujours fait la juſtice de m'attribuer l'invention de cette Analyſe, comme on le voit par pluſieurs endroits

droits de leurs écrits, dans les Actes de Leipſic & ailleurs, & par l'ouvrage de Mr. le Marquis *de l'Hoſpital*, à qui Mr. *Bernoulli* le jeune en avoit communiqué les fondemens & la matiére à Paris: & moi je leur ai rendu la pareille, en avoüant, qu'ils avoient beaucoup de part à l'utilité que le Public en a tirée, & que perſonne n'avoit plus fait valoir cette invention qu'eux, avec Mr. le Marquis *de l'Hoſpital*, à qui cette ſcience eſt auſſi fort redevable. Si j'avois publié d'abord moi même la ſolution du *Problême de la Chainette*, ſans donner à Meſſrs. *Bernoulli* envie d'y travailler, ils en auroient eu moins de gloire; mais le Public en auroit tiré moins d'utilité; car ils ſe ſeroient peut-être moins appliqués à cultiver une ſcience, où ils n'auroient pas eu aſſez de part. De ſorte que je ne me repens point de ce que j'ai fait, & je trouve, comme c'eſt l'ordinaire, que ce qui eſt arrivé a été le meilleur. L'ouvrage que Mr. le Marquis *de l'Hoſpital* publia le premier ſur ce nouveau ſyſtême, ſous le titre d'*Analyſe des infiniment petits*, a été publié de *mon conſentement*. Il eut la déférence pour moi & l'honnêteté de me mander que, ſi je voulois me ſervir de mon droit d'Inventeur, pour publier le premier un ouvrage d'une juſte étenduë ſur cette nouvelle ſcience, il ne me vouloit point prévenir. Mais je n'avois garde de priver le Public d'un travail auſſi utile que le ſien, pour me conſerver un droit, dont je me pouvois paſſer facilement; ayant toujours celui d'y ſuppléer, comme j'ai fait, en propoſant de tems en tems quelques nouvelles ouvertures pour pouſſer cette Analyſe.

J'ai été d'autant plus porté à déſabuſer le Public ſur ces faits mal narrés, que Mr. *Bernoulli* vient de le demander dans une de ſes lettres de Baſle du 22. de May, où il les rejette & les déſaprouve hautement, comme éloignés de la vérité.

No. LXXIV.

BREVIS DESCRIPTIO MACHINÆ ARITHMETICÆ.

SPecimen Machinæ Arithmeticæ, à me adoleſcente inventæ, quam exhibeo, jam anno 1673. ſocietati Regiæ Londinenſi oſtendi. Paulo provectiorem mox vidit Academia Regia Pariſina. Et tunc quidem Dn. *Matthiole* Mathematicus eruditus Lutetiæ agens in edita à ſe Tabula æri inciſa, qua Orgyiam (*Toiſe*) in 1000. partes æquales dividebat, eique

operationes in uſum vulgarem accommodabat; notavit, machina mea adhibita (quam viderat) calculos à pueruIo peragi poſſe. Mentionem quoque ejus fecit celeberrimus *Tſchirnhuſius* in Medicinæ Mentis editione noviſſima. Viri excellentes *Antonius Arnaldus*, *Chriſtianus Hugenius* & *Melchiſedecus Thevenotius*, qui viderant, teſtati ſunt per literas quanti facerent, hortatique, ne oblivioni mandaretur.

Conſiſtit ex duabus partibus, *Immobili* & *Mobili*. In parte immobili per
T. XXIII. foramina duodecim apparent rotulæ & in iis notæ numericæ 000000011085.
Fig. 85. In parte mobili viſitur *Rota* una *majuſcula* & octo minuſculæ. In Majuſcula exterius interiusque inſcriptæ ſunt notæ 0. 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9, interque utrumque notarum Circulum eſt limbus mobilis foraminum decem, notis reſpondentium. *Rotarum Minuſcularum* cuivis inſcriptæ ſunt eædem notæ, adeſtque index, qui circumagi poteſt, & ab his indicibus monſtrantur notæ 00001709, eoque fit ut eædem notæ etiam per earumdem rotarum foramina ſeſe uno aſpectu unaque in linea oculo offerant.

Operatio hæc eſt: Sit datus numerus multiplicandus per datum numerum multiplicantem, modò productum non excedat duodecim notas, Ex. gr. 1709. numerus anni currentis multiplicari debeat per 365. numerum dierum; itaque, poſito priùs per foramina octo rotarum apparuiſſe non niſi 0, indiculi in rotis quatuor minuſculis dexterrimis admoveantur notis 1709: partis autem mobilis (à ſitu, qui in figura apparet dextrorſum promotæ) hic ſit initio ſitus: ut nota prima octo Rotarum partis mobilis reſpondeat notæ primæ duodecim rotarum partis immobilis; uti nunc in figura reſpondet tertiæ. Porro notæ partis immobilis initio ſint itidem non niſi 0. Quia jam 1709. debet multiplicari per 365, multiplicetur primum per 5, quod ita fiet: brevis ſtylus inſigatur foramini, quod reſpondet Numero 5, in rota majuſcula exteriùs notato. Deinde *Magna Rota* (nondum hactenus memorata) in medio ferè partis mobilis conſpicua, arrepto dextra capulo ejus circumagatur; quo facto ſimul movebitur limbus mobilis rotæ majuſculæ. Is motus continuetur, donec, (quod mox fiet) ſtylus foramini limbi infixus, & cum limbo circumactus in obſtaculum incurrat, quod in Rota Majuſcula comparet inter 0 & 9. Quo facto ex reſiſtentia admonebimur, abſolutam eſſe hanc operationem, & per foramina partis immobilis dexteriora apparebit productum ex 1709 per 5, nempe 8545. Sed quia plures ſunt notæ in multiplicante, & proxima à prima eſt 6; promovebimus partem mobilem ſiniſtrorſum, ita ut prima nota Rotarum octo, reſpondeat ſecundæ notæ Rotarum duodecim. Hoc facto ſtylum infixum hactenus foramini exteriùs notato, 5, inſigemus foramini etiam exteriùs notato, 6, jamque iterum capulo arrepto rotam illam magnam in medio partis mobilis poſitam circumagemus, donec ſtylus in obſtaculum impingat: eaque ratione non tantùm numerus multiplicandus 1709 multiplicatus erit per 6, ſed etiam

productum

productum erit additum producto priori, & notæ partis immobilis dexteriores per foramina comparentes erunt 111085. Supereſt in multiplicatore nota 3. Itaque iterum uno gradu promoveatur pars mobilis ſiniſtrorſum & ſtylus infigatur foramini in limbo, quod reſpondet notæ exteriori 3, atque ita Machina in eo erit ſtatu, quem *Figura* exhibet. Ac tunc demum, circumacta tertiùm Rota magna, donec obſtaculum ſentiatur, numerus multiplicandus 1709 non tantùm multiplicatus erit per 3, ſed etiam productum ſimul prioribus erit additum, prodibitque productum integrum ex 1709 multiplicato per 365, nempe 623785.

```
   1709
    365
   ----
   8545
 10254
 ------
 111085
 5127
 ------
 623785
```

Id maximi commodi habet hæc operatio, in *Multiplicatione* vel *Diviſione*, quod nihil refert, quantus ſit numerus multiplicandus, modò machinæ magnitudinem (hoc loco octo notas) non excedat; eodem enim tempore res peragitur, ſive multarum ſive paucarum ſit notarum. Mentis nullam ferè attentionem requiri manifeſtum eſt, ut hoc, quicquid eſt, meritò dici poſſit, *opus infantum. Diviſio* eadem facilitate reciproco opere peragitur, nec quæritur nota quotientis, ſed ipſa ſe offert. *Dividendus* collocatur in rotis partis immobilis, ubi demum & *Reſiduus* conſpicuus manet. *Diviſor* exhibetur in rotis minuſculis partis mobilis, *Quotiens* per notas ſingulas circuli interioris, quarum ex adverſo ſtylus poſt operationem quieſcit, deſignatur; cùm multiplicatio circulo exteriore ſit uſa pars mobilis in machina, durante diviſione, quoties opus promovetur dextrorſum; cùm in multiplicatione promota fuerit ſiniſtrorſum. *Additio* concipi poteſt ut multiplicatio per unitatem, *ſubtractio*, ut diviſio, cujus quotiens unitas. Ita quatuor, quas vocant, ſpecies habemus, quibus omnia alia peraguntur. Quanquam Additio & Subtractio etiam ſine Multiplicationis aut Diviſionis imitatione perfacile in Machina per ſe efficiantur, & ita quidem, ut parte mobili opus non ſit.

N°. LXXV.

N°. LXXV.

MONITUM DE CHARACTERIBUS ALGEBRAICIS.

QUoniam variant Geometræ in characterum uſu, nova præſertim Analyſi inventa; quæ res legentibus non admodum provectis obſcuritatem parit; ideo è re viſum eſt exponere, quomodo Characteres adhibeantur Leibnitiano more, quem in his Miſcellaneis ſecuturi ſumus.

Literæ minuſculæ a, b, x, y ſolent ſignificare magnitudines, vel quod idem eſt, numeros indeterminatos: Majuſculæ verò, ut A, B, X, Y puncta figurarum; ita ab ſignificat factum ex a in b, ſed A B rectam à puncto A ad punctum B ductam. Huic tamen obſervationi adeo alligati non ſumus, ut non aliquando minuſculas pro punctis, majuſculas pro numeris vel magnitudinibus uſurpemus, quod facile apparebit ex modo adhibendi. Solent etiam literæ priores, ut a, b, pro quantitatibus cognitis vel ſaltem determinatis adhiberi, ſed poſteriores ut x, y, pro incognitis vel ſaltem pro variantibus.

Interdum pro literis adhibentur Numeri, ſed qui idem ſignificant quod literæ, utiliter tamen uſurpantur relationis exprimendæ gratia. Exempli cauſa: Sint binæ æquationes generales ſecundi gradûs pro incognita, x; eas ſic exprimere licebit: $10\,xx + 11\,x + 12 = 0$ & $20\,xx + 21\,x + 22 = 0$; ita in progreſſu calculi ex ipſa notatione apparet quantitatis cujuſque relatio; nempe 21 (ex. gr.) per notam dextram, quæ eſt 1 agnoſcitur eſſe coëfficiens ipſius x ſimplicis, at per notam ſiniſtram 2 agnoſcitur eſſe ex æq. ſecunda: ſed & ſervatur lex quædam homogeneorum. Et ope harum duarum æquationum tollendo x, prodit æquatio, in qua ſimiliter ſe habere oportet 10, 11, 12 & 12, 11, 10; item 20, 21, 22 & 22, 21, 20; & denique 10, 11, 12 ſe habent ut 20, 21, 22. id eſt ſi pro 10, 11, 12 ſubſtituas 20, 21, 22, & vice verſa, manet eadem æquatio; idemque eſt in cæteris. Tales numeri tractantur ut literæ, veri autem numeri, diſcriminis cauſa, parentheſibus includuntur vel aliter diſcernuntur. Ita in tali ſenſu 11. 20. ſignificat numeros indefinitos 11 & 20 in ſe invicem ductos, non vero ſignificat 220 quaſi eſſent Numeri veri. Sed hic uſus ordinarius non eſt, rariuſque adhibetur.

Signa, *Additionis* nimirum & *Subtractionis*, ſunt $+$ plus, $-$ minus, $\pm$ plus

$\pm$ plus vel minus, $\mp$ priori oppoſitum minus vel plus. At ($\pm$) vel ($\mp$) eſt nota ambiguitatis ſignorum, independens à priori; & (($\pm$) vel (($\mp$) alia independens ab utraque; Differt autem *Signum ambiguum a Differentia* quantitatum, quæ etſi aliquando incerta, non tamen ambigua eſt.

Sic $\pm 5 \mp 3$, (ubi ſigna adhibentur ambigua) ſignificat vel $+5-3$ id eſt 2, vel $-5+3$ id eſt -2. Sed ſi differentia exprimenda ſit inter a & b, non ſufficit ſcribere $\pm a \mp b$, ſi enim ſic pro a & b, ſubſtituas 5 & 3, patet hoc modo non ſemper prodire differentiam $+2$, ſed vel $+2$ vel -2. Sed differentia inter a & b, ſignificat $a-b$, ſi a ſit majus, & $b-a$ ſi b ſit majus, quod etiam appellari poteſt moles ipſius $a-b$, intelligendo (exempli cauſa) ipſius $+2$ & ipſius -2 molem eſſe eamdem, nempe $+2$; ita ſi a — b vocemus c, utique *mol.* c, ſeu moles ipſius c erit $+2$, quæ eſt quantitas affirmativa, ſive c ſit affirmativa ſive negativa, id eſt, ſive ſit c idem quod $+2$, ſive c ſit idem quod -2. Et quantitates duæ diverſæ eamdem molem habentes ſemper habent idem quadratum.

Multiplicationem plerumque ſignificare contenti ſumus per nudam appoſitionem: ſic ab ſignificat a multiplicari per b, Numeros multiplicantes ſolemus præfigere, ſic $3\,a$ ſignificat triplum ipſius a, interdum tamen punctum vel comma interponimus inter multiplicans 2 multiplicandum, velut cùm 3, 2 ſignificat 3 multiplicari per 2, quod facit 6, ſi 3 & 2 ſunt numeri veri; & A B, C D ſignificat rectam A B duci in rectam CD, atque inde fieri rectangulum. Sed & commata interdum hoc loco adhibemus utiliter, velut $a, b+c$, vel AB, CD + EF, id eſt, a, duci in $b+c$, vel AB in CD + EF; ſed de his mox, ubi de vinculis. Porrò propria nota Multiplicationis, non ſolet eſſe neceſſaria, cùm plerumque appoſitio, qualem diximus, ſufficiat. Si tamen utilis aliquando ſit, adhibebitur potius $\frown$, quam $\times$, quia hoc ambiguitatem parit, & ita AB $\frown$ C D ſignificabit AB duci in CD.

Diviſio ſignificatur interdum more vulgari, per ſubſcriptionem diviſoris ſub ipſo dividendo, intercedente linea, ita a dividi per b, ſignificatur vulgo per $\frac{a}{b}$; plerumque tamen hoc evitare præſtat, efficereque, ut in eadem linea permaneatur, quod fit interpoſitis duobus punctis; ita ut $a:b$ ſignificet a dividi per b. Quòd ſi $a:b$ rurſus dividi debeat per c, poterimus ſcribere $a:b,:c$, vel $(a:b):c$. Etſi enim res hoc caſu (ſanè ſimplici) facilè aliter exprimi poſſet, fit enim $a:(bc)$ vel $a:bc$, non tamen ſemper diviſio actu ipſo facienda eſt, ſed ſæpe tantùm indicanda, & tunc præſtat operationis dilatæ proceſſum per commata vel parentheſes indicari.

Cùm idem multiplicatur per ſe ipſum, prodeunt *potentiæ*, earumque no-

tæ ſeu *Exponentes.* Ita pro $a\,a$ ſcribi etiam poteſt a^2, & pro $a\,a\,a$ ſcribetur a^3, & ita porrò : Interdum & ſcribitur : *qu.* AB. idque idem eſt quod quadratum rectæ AB, ſeu AB AB. Et *cub.* AB idem eſt quod AB, AB, AB, vel $(AB)^3$. Et exponens interdum lineolis includitur hoc modo $\boxed{3}\,(AB + BC)$ quo ſignificatur cubus rectæ AB + BC. Exponens etiam interdum eſt indeterminatus, & ſignificatur per literam, velut a^e. ubi non determinatur, utrum e ſignificet 2, an 3, vel alium numerum quemvis ; & talis exponens interdum fit compoſitus ; exempli gratiâ, ſi a^e multiplices per a^n, productum erit $a^{\overline{e+n}}$ & utiliter interdum lineola ſubducitur, ne literæ exponentiales aliis confundantur ; poſſet etiam ſcribi $\boxed{e+n}\,a$.

Contrarium potentiarum ſunt Radices, nam ut $\boxed{3}\,a$, eſt a^3 vel $a\,a\,a$, ita $\sqrt[3]{}\,(a^3)$ vel $\sqrt{}\,\boxed{3}\,(a^3)$ rurſus eſt a. Nota $\sqrt{}$ ſignificat radicem, &, ſi ſimpliciter ſcribimus, nullo numero adjecto, ſignificat radicem quadraticam, velut $\sqrt{2}$ ſignificat radicem quadraticam ex numero 2, ſed $\sqrt[3]{2}$ vel $\sqrt{}\,\boxed{3}\,2$ ſignificat radicem cubicam ex eodem numero, & $\sqrt[e]{2}$ vel $\sqrt{}\,\boxed{e}\,2$ ſignificat radicem indeterminati gradûs e ex 2 extrahendam. Interim notandum eſt, certo ſenſu radices poſſe ſub potentiis comprehendi, ut numeri fracti continentur ſub numeris : Et generaliter, ſi ſit potentia data a^e, & e ſignificet numerum negativum, prodit diviſio, ponatur enim e idem eſſe quod $-n$, utique a^e vel a^{-n} vel $\boxed{-n}\,a$, idem erit quod $1 : a^n$. Quòd ſi e ſit idem quod $1 : n$, ſeu a^e idem quod $a^{\overline{1:n}}$ fiet a^e idem quod $\sqrt{}\,\boxed{n}\,a$, adeoque hoc idem eſt quod $\boxed{1:n}\,a$.

His notis formantur varii termini, nempe integri iique affirmativi aut negativi ; fracti item, ac denique ſurdi. Sed quia hi omnes ſunt vel ſimplices vel variis modis compoſiti, & ex membris conflati, hinc opus eſt *vinculis* quibuſdam ad compoſitionem indicandam. Pro vinculis vulgo ſolent adhiberi ductus linearum ; ſed quia lineis una ſuper alia ductis, ſæpe nimium ſpatii occupatur, aliaſque ob cauſas commodiùs plerumque adhibentur commata & parentheſes. Sic $a, \overline{b+c}$ idem eſt quod $a,$

$b +$

$b+c$ vel $a(b+c)$; & $\overline{a+b},\ \overline{c+d}$ idem quod $a+b,\ c+d$ vel $(a+b)$ $(c+d)$, id eſt, $+a+b$ multiplicatum per $c+d$. Et ſimiliter vincula in vinculis exhibentur. Ita $a,\ \overline{bc+e\overline{f+g}}$ etiam ſic exprimetur, a $(bc+e(f+g))$ Et $a,\overline{bc+e\overline{f+g}+hlm},\ n$ poteſt etiam ſic exprimi: $+(a(bc+e(f+g))hlm)n$.. Quod de vinculis multiplicationis, idem intelligi poteſt *de vinculis diviſionis*, exempli gratiâ

$$\frac{\dfrac{a}{\dfrac{b}{c}+\dfrac{e}{f+g}}+\dfrac{h}{\dfrac{l}{m}}}{n}$$

ſic ſcribetur in una linea $(a:((b:c)+(e:,f+g))+h:(l:m)):n$

nihilque in his eſt difficultatis, modò teneamus, quicquid parentheſin aliquam implet pro una quantitate haberi, tanquam litera vel numerus pro eo poneretur, idemque eſt de parentheſi aliam parentheſin includente, ut fit in radicibus quas univerſales olim vocabant, exprimendis. Idemque igitur locum habet in vinculis extractionis radicalis.

Sic $\sqrt{a^4+\sqrt{e\overline{f+g}}}$ idem eſt quod $\sqrt{(a^4+\sqrt{(e(f+g)))}}$ vel ^{4} $+\sqrt{(e,f+g))}$

Et pro $\dfrac{\sqrt{aa+b\sqrt{cc+dd}}}{e+\sqrt{f\sqrt{gg+hh}+kk}}$

ſcribi poterit $\sqrt{(aa+b\sqrt{(cc+dd)})}:,e+\sqrt{(f\sqrt{(gg+hh)}+kk)}$.

Hactenùs notas expoſuimus, quibus termini, id eſt numeri vel quantitates formantur, tanquam ſubjecta aut prædicata in veritatibus. Sequuntur notæ quæ explicant modum prædicationis, ſeu quomodo quantitates quæ Terminos conſtituunt in propoſitiones conjungantur, potiſſimum autem de iis enuntiatur, *Æquales* eſſe, vel *majores*, aut *minores* aliis, itaque $a=b$ ſignificat, a, eſſe æquale ipſi b, & $a \sqsupset b$ ſignificat a eſſe majus quàm b, & $a \sqsubset b$ ſignificat a eſſe minus quàm b.

Sed & *proportionalitas* vel analogia de quantitatibus enuntiatur, id eſt, rationis identitas, quam poſſumus in Calculo exprimere per notam æqualitatis, ut non ſit opus peculiaribus notis. Itaque a eſſe ad b, ſic ut l ad m, ſic exprimere poterimus $a:b=l:m$, id eſt $\frac{a\;—\;l}{b\quad m}$. Nota continuè proportionalium erit ÷, ita ut ÷ $a.\ b.\ c.$ &c. ſint continuè proportionales.

Interdum nota *Similitudinis* prodeſt, quæ eſt ∽, item nota ſimilitudinis & æqualitatis ſimul, ſeu nota *congruitatis* ≌. Sic DEF ∽ PQR ſignificabit

ficabit Triangula hæc duo eſſe ſimilia; at DEF $\simeq$ PQR ſignificabit congruere inter ſe. Hinc ſi tria inter ſe habeant eandem rationem quàm tria alia inter ſe, poterimus hoc exprimere nota ſimilitudinis, ut *a*; *b*; *c* $\sim$ *l*; *m*; *n*. quod ſignificat eſſe *a* ad *b*, ut *l* ad *m*, & *a* ad *c* ut *l* ad *n*, & *b* ad *c* ut *m* ad *n*.

Præter æqualitatem, proportionalitatem & ſimilitudinem, occurrit interdum & ejuſdem relationis conſideratio quam ſignificare licet notâ : :. Exempli cauſa ſi ſit $aa + ab = cc$, & ſimili forma $ll + lm = nn$, dici poteſt *a*, *b*, *c* habere inter ſe eamdem relationem quam habent *l*, *m*, *n*; ſeu *a*; *b*; *c* : : *l*; *m*; *n*. Id eſt, datur quædam relatio inter *a*, *b*, *c*, in qua ſi pro his reſpectivè ſubſtituas *l*, *m*, *n*, vera manet enuntiatio. Unde patet relationis convenientiam ad certam quandam referendi formam pertinere, neque omnimodam ſemper in ipſis terminis relationum ſimilitudinem inferre, ex. gr. ſi *a*, *b*, *c*, ſe habeant invicem, ut ſinus totus, ſinus rectus, & ſinus complementi & *l*, *m*, *n*, ſe itidem hoc modo inter ſe habeant, dici ob eam rem poterit eſſe *a*; *b*; *c* : : *l*; *m*; *n*. Sed hoc relativum eſt ad certum modum referendi.

Quas expoſuimus Notæ, ad Analyſin communem pertinent, ſeu ad ſcientiam Finiti, ſed novæ adjectæ ſunt Notæ, per detectam nuper *Scientiam infiniti*, ſeu *Analyſin infiniteſimalem* quæ potiſſimùm verſatur in differentiis & ſummis. Hic dx ſignificat, elementum, id eſt, incrementum vel decrementum (momentaneum) ipſius quantitatis x (continuè) creſcentis. Vocatur & *differentia*, nempe inter duas proximas x, elementaliter (ſeu inaſſignabiliter) differentes; dum una fit ex altera (momentaneè) creſcente vel decreſcente; ſimiliter $d(xy)$ eſt tale elementum quantitatis xy (continuè) creſcentis, quod explicatum dat $xdy + ydx$. Porrò ddx eſt Elementum Elementi ſeu *differentia differentiarum*, nam ipſa quantitas dx non ſemper conſtans eſt, ſed plerumque rurſus (continuè) creſcit aut decreſcit. Et ſimiliter procedi poteſt ad $dddx$ ſeu d^3x, & ita porrò. Imò poteſt occurrere $d^e x$, cùm exponens differentiæ eſt indeterminatus.

Contrarium ipſius Elementi vel differentiæ eſt *ſumma*, quoniam Quantitate (continuè) decreſcente donec evaneſcat, quantitas ipſa ſemper eſt ſumma omnium differentiarum ſequentium. Ut adeo $d\int ydx$ idem ſit quod ydx. At $\int ydx$ ſignificat aream quæ eſt aggregatum ex omnibus rectangulis, quorum cujuslibet longitudo (aſſignabilis) eſt y aliqua, & latitudo (elementaris) eſt dx ipſi y ordinatim reſpondens. Dantur & *ſummæ ſummarum*, & ita porrò, ut ſi ſit $\int dz \int ydx$; ſignificatur ſolidum quod conflatur ex omnibus areis, qualis eſt $\int ydx$, ordinatim ductis in reſpondens cuique elementum dz.

N°. LXXVI.

N°. LXXVI.

SYMBOLISMUS MEMORABILIS

Calculi Algebraïci & Infiniteſimalis, in comparatione potentiarum & differentiarum; & de Lege Homogeneorum Tranſcendentali.

UT cujuslibet quantitatis facile eſt invenire potentiam; ita cujuslibet certa lege variantis poſſumus invenire differentiam ſeu Elementum. Sed regreſſus à potentia ad radicem per extractionem, & regreſſus à differentia ad terminum per ſummationem, non ſemper in poteſtate eſt. Et uti impoſſibilitas extractionis in numeris rationalibus quæſitæ producit quantitates ſurdas; ita impoſſibilitas ſummationis in quantitatibus Algebraïcis quæſitæ, producit quantitates tranſcendentes, quarum conſiderationem in Analyſin jam olim induximus. Sanè, ut ſæpe quantitates rationales per modum radicis ſeu irrationaliter exhibentur, etſi ad formulam rationalem reduci poſſint; ita ſæpe quantitates Algebraicæ ſeu ordinariæ per modum tranſcendentium exhibentur, etſi eas ad formulam ordinariam reducere liceat. Itaque multum intereſt inter *quantitates* & *formulas*.

Sed arcanior quædam ſubeſt inter Potentias & Differentias Analogia, quam hoc loco exponere operæ pretium erit. Et primùm potentias binomii (ſeu ſummæ nominum duorum) comparabimus cum differentiis rectanguli [ſeu facti ex Factoribus binis] & deinde [cùm analogia perpetua ſit] breviter dabimus communem legem, tam potentiæ ex multinomio quocunque, quàm differentiæ facti ex factoribus quotcunque. Potentiæ autem pariter ac differentiæ habent ſuos exponentes, gradum potentiæ vel differentiæ indicantes. Itaque analogiæ clarioris cauſa, ut dx, ddx, d^3x ſignificat differentiam primam, ſecundam, tertiam; ita x, xx, x^3 exprimemus hoc loco, per $p^1 x$, $p^2 x$, $p^3 x$, id eſt per potentiam primam, ſecundam, tertiam; nempe ipſius x. Et $p^e\,[x+y]$ ſignificabit potentiam ipſius $x+y$, ſecundum exponentem e, uti $d^e\,(xy)$ differentiam ipſius xy ſignificat, itidem ſecundum exponentem e.

Sit ergo Binomium $x+y$, ejus potentia prima, ſi ſic loqui licet, vel

gradus ſi malis, ſeu quæ exponentem habet 1, eſt ipſa quantitas ſeu radix ſeu ipſum Binomium $x+y$. Atque adeo $p^1(x+y)=x+y$, ſed potentia ſecunda ſeu quadratum ipſius $x+y$, ſive $p^2(x+y)$ erit $=1xx+2xy+1yy$; & cubus ſeu potentia tertia ipſius $x+y$, ſive $p^3(x+y)$ eſt $=1x^3+3x^2y+3xyy+1y^3$; & biquadratum ſeu potentia quarta ipſius $x+y$ ſive $p^4(x+y$ eſt $=1x^4+4x^3y+6xxyy+4xy^3+1y^4$. Et generaliter, reperietur, potentiam quamcunque ab $x+y$ ſeu $p^e(x+y)$ eſſe $1x^e+\frac{e}{1}x^{e-1}y+\frac{e.e-1}{1.\ 2}x^{e-2}y^2+\frac{e.e-1.e-2}{1.\ 2.\ 3}x^{e-3}y^3$ $+\frac{e.e-1e-2.e-3}{1.\ 2.\ 3.\ 4}x^{e-4}y^4$ &c. ubi ſubtractione numerorum per unitates creſcentium, veluti ſi $e=3$ ſeu $e-{}^3=0$, evaneſcit terminus in quo eſt $e-3$, & omnes eum ſequentes. Ita cùm ſit $e=3$, fiet $p^3(x+y)$ $=1x^3+\frac{3}{1}x^2y+\frac{3.3.1}{1.2.}xy^2+\frac{3.3-1.3-2}{1.\ 2.3.}y^3$ ſeu $1x^3+3x^2y$ $+3xy^2+1y^3=1p^3x,p^0y+3p^2xp^1y+3p^1xp^2y+1p^0xp^3y$.

Ubi notandum x^0, vel y^0, ſive p^0x, p^0y, vel aliam cujuſque quantitatis potentiam, cujus exponens evaneſcit ſeu fit o, abire in unitatem. Nam ſi ordine ponamus

Quantitates progreſſionis Geometricæ	$\frac{1}{x^3}, \frac{1}{xx}, \frac{1}{x}, \frac{1}{1}, x, xx, x^3,$
Exponentes reſpondentes progreſſionis Arithmeticæ erunt.	$-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3.$

Unde $p^0x=1$ & $p^{-1}x=\frac{1}{x}$ vel $1:x$, & $p^{-2}x=\frac{1}{xx}$ vel $1:xx$. itaque formula generalis pro poteſtate Binomii ſic ſcribi poteſt: $p^e(x+y)$ $=1p^exp^0y+\frac{e}{1}p^{e-1}xp^1y+\frac{e.e-1}{1\ 2}+p^{e-2}xp^2y$ $+\frac{e.e-1.e-2}{1.\ 2.\ 3}p^{e-3}xp^3y+\frac{e-e-1.e-2e-3.}{1.\ 2.\ 3.\ 4}p^{e-4}xp^4y+$&c.

Veniamus jam ad differentiationes, idemque illic provenire oſtendamus tantùm pro $x+y$ ponendo xy, & pro p ponendo d. Primum ergo $d(xy)$ $=ydx+xdy$. Ut olim docuimus, cùm primùm multis abhinc annis calculum differentialem proponeremus: ex quo uno fundamento totus reliquus differentiarum calculus demonſtrari poteſt. Ipſum autem fundamentum hoc, ſic oſtenditur: $d(xy)$ eſt differentia inter $(x+dx)(y+dy)$ &

& xy, ſive inter rectangulum proximum & propoſitum. Eſt autem $(x + dx)(y + dy) = xy + ydx + xdy + dxdy$, unde ſi auferas xy fit $ydx + xdy + dxdy$, ſed quia dx vel dy eſt incomparabiliter minus quàm x vel y, etiam $dxdy$, erit incomparabiliter minor quàm xdy & ydx; ideoque rejicitur, tandemque fiet $(x + dx)(y + dy) - xy = ydx + xdy$; Jam $x = d^{\circ} x$ & $y = d^{\circ} y$, nempe ubi differentia nulla eſt, & $d^{1} x$ eſt dx, vel $d^{1} y = dy$, ideo ſcribi poterit $d^{1}(xy) = d^{1} x\, d^{\circ} y + d^{\circ} x\, d^{1} y$; Cæterùm, quæ evenire poſſent in ſignis variationes cum creſcente x decreſcit y aut cum aliqua ex differentiis, velut dx aut dy fit quantitas negativa, nunc non explico: rem tractans generaliter, ſalva poteſtate cujuſque ſigna in caſibus ſpecialibus, ubi opus eſt, immutandi.

Pergamus ad differentiationes ſecundas $dd(xy) = d(ydx + xdy) = d(ydx) + d(xdy)$. Jam $d(ydx) = yddx + dxdy$ ex calculo præcedente, nam pro dx ſcribamus z, erit $ddx = dz$, & fiet $d(ydx) = d(yz) =$ [per calculum præcedentem] $ydz + zdy = yddx + dxdy$. Et pari jure fiet $d(xdy) = dxdy + xddy$. Itaque colligendo, fiet $dd(xy) = yddx + 2dxdy + xddy$, prorſus ut quadratum ab $x + y$, dat $xx + 2xy + yy$, ſeu $d^{2}(xy) = d^{2} x d^{\circ} y + 2 d^{1} x d^{1} y + d^{\circ} x d^{2} y$ prorſus ut $p^{2}(x + y) = p^{2} x p^{\circ} y + 2 p^{1} x p^{1} y + p^{\circ} x p^{2} y$. Quæ analogia inter differentiationem & potentiationem ſervatur perpetuò, continuata potentiatione [ſeu Potentiæ excitatione] & differentiatione. Nempe ut in nova potentiatione Binomii totum præcedens multiplicatur tam per y quàm per x, & priore caſu p ipſius y, poſteriore p ipſius x, augetur unitate; ita in differentiando totum præcedens differentiatur tam ſecundùm y quàm ſecundùm x. & priore caſu d ipſius y, poſteriore autem d ipſius x augetur unitate.

Exempli gratiâ.

$$\text{Si } \left.\begin{matrix} p^{1} x p^{\circ} y \\ p^{\circ} x p^{1} y \end{matrix}\right\} \begin{matrix} \text{multiplicemus} \\ \text{per } y \end{matrix} \text{ fit } \left\{\begin{matrix} p^{1} x p^{1} y \\ p^{\circ} x p^{2} y \end{matrix}\right\} \begin{matrix} \text{ſin illud multiplicemus} \\ \text{per } x \\ \text{fit } p^{2} x p^{\circ} y \\ p^{1} x p^{1} y \end{matrix}$$

Et ſimiliter.

$$\text{Si } \left.\begin{matrix} d^{1} x d^{\circ} y \\ d^{\circ} x d^{1} y \end{matrix}\right\} \begin{matrix} \text{differentiemus} \\ \text{ſecundùm } y \end{matrix} \text{ fit } \left\{\begin{matrix} d^{1} x d^{1} y \\ d^{\circ} x d^{2} y \end{matrix}\right\} \begin{matrix} \text{ſin illud differentiemus} \\ \text{ſecundùm } x \\ \text{fit } d^{2} x d^{\circ} y \\ d^{1} x d^{1} y \end{matrix}$$

Ex quo ſequitur porrò $d^{3}(xy)$ eſſe $1 d^{3} x d^{\circ} y + 3 d^{2} x d^{1} y + 3 d^{1} x d^{2} y + 1 d^{\circ} x d^{3} y$, vel vulgari modo ſcribendi $y d^{3} x + 3 ddx\, dy + 3 dx\, ddy + x d^{3} y$: Et generaliter, ut paulo antè potentiando literam p adhibuimus,

mus, ita nunc differentiando adhibita litera d, fore, $d^e(xy) = 1\, d^e x\, d^0 y$ $+ \frac{e}{1} d^{e-1} x\, d^1 y + \frac{e.\,e-1}{1.\ 2} d^{e-2} x\, d^2 y + \frac{e.\,e-1.\,e-2.}{1.\ 2.\ 3} d^{e-3}$ $x\, d^3 y +$ &c.

Quinimò etiam inter potentias multinomii, & differentias combinationis ſeu facti ex pluribus factoribus, eadem Analogia locum habebit, velut inter $d^e\,(xyz)$ differentiam ternionis, & $p^e\,(x+y+z)$ potentiam trinomii. Cùm ſemper verum maneat, Exponentem tam ipſius p, quàm ipſius d in formula ad altiorem potentiam elevanda, vel amplius differentianda, ſecundum quamlibet literam ſeparatim augeri unitate & ex omnibus provenientibus colligi formulam novam; Porrò generalis olim à me inventa eſt regula coefficientium qua potentia polynomii cujuſque exprimitur. Eadem ergò regula etiam ad numeros coefficientes ejus formulæ valebit, quæ differentiationem facti ex pluribus factoribus exprimit.

Sunt autem numeri coëfficientes in potentiis, nihil aliud, quàm numeri tranſpoſitionum, quas recipiunt literæ in forma ſeu termino cui numerus præfigitur, veluti pro $p^3\,(x+y+z)$ ſeu pro cubo ab $x+y+z$ prodit.

$1\,x^3 +$	$3\,x^2 y +$ $6\,xyz$	ibi coëfficiens omnium qualis $x^2 y$, eſt 3 quia pro
$1\,y^3$	$3\,xy^2$	xxy ſcribi poteſt xxy, xyx, yxx
$1\,z^3$	$3\,x^2 z$	Et coëfficiens omnium qualis xyz eſt 6.
	$3\,xz^2$	quia pro xyz ſcribi poteſt yxz, xyz, xzy, yzx, zxy, zyx.
	$3\,y^2 z$	Sed coëfficiens omnium qualis x^3 eſt, 1
	$3\,yz^2$	quia in xxx tranſpoſitio nihil variat.

Modum autem inveniendi numerum tranſpoſitionum formæ propoſitæ, alibi, commoda ſatis ratione, exhibuimus.

Ad analogiam autem cum differentiis ſervandam, cubus ſeu potentia tertia ab $x+y+z$ *&c.* ita ſcribetur.

$$\left.\begin{array}{lll} 1\,p^3 x\, p^0 y\, p^0 z & +\ 3\,p^2 x\, p^1 y\, p^0 z & +\ 6\,p^1 x\, p^1 y\, p^1 z \\ 1\,p^0 x\, p^3 y\, p^0 z & 3\,p^1 x\, p^2 y\, p^0 z & \\ 1\,p^0 x\, p^0 y\, p^3 z & 3\,p^2 x\, p^0 y\, p^1 z & \\ & 3\,p^1 x\, p^0 y\, p^2 z & \\ & 3\,p^0 x\, p^2 y\, p^1 z & \\ & 3\,p^0 x\, p^1 y\, p^2 z & \end{array}\right\} \text{æquale eſt.}$$

$$\left\{\begin{array}{llll} p3\,(x+y+z) = & 1\,x3 & +\ 3\,xxy & +\ 6\,xyz \\ & 1\,y^3 & 3\,xyy & \\ & 1\,z^3 & 3\,xxz & \\ & & 3\,xzz & \\ & & 3\,yyz & \\ & & 3\,yzz, & \end{array}\right.$$

Ergo

Ergò ſimiliter differentia tertia ab xyz talis prodibit

$$\left.\begin{array}{lll} 1\, d^3 x\, d^0 y\, d^0 z & + 3\, d^2 x\, d^1 y\, d^0 z & + 6\, d^1 x\, d^1 y\, d^1 z \\ 1\, d^0 x\, d^3 y\, d^0 z & 3\, d^1 x\, d^2 y\, d^0 z & \\ 1\, d^0 x\, d^0 y\, d^3 z & 3\, d^2 z\, d^0 y\, d^1 z & \\ & 3\, d^1 x\, d^0 y\, d^2 z & \\ & 3\, d^0 x\, d^2 y\, d^1 z & \\ & 3\, d^0 x\, d^1 y\, d^2 z & \end{array}\right\}\ \text{æquale eſt.}$$

$$\left\{\begin{array}{llll} d3\,(xyz) = & 1\, d^3 x.yz & + 3\, ddx\,dy.z & + 6\, dx\,dy\,dz \\ & 1\, x\,d^3 y.z & 3\, dx\,ddy.z & \\ & 1\, x,y\,d^3 z & 3\, ddx.y\,dz & \\ & & 3\, dx.y\,ddz & \\ & & 3\, x\,ddy\,dz & \\ & & 3\, x\,dy\,ddz & \end{array}\right.$$

Ubi patet, novo ſcribendi more apparere analogiam inter potentias & differentias, vulgato (nempe hic poſteriùs poſito) non apparere. Eaque analogia euſque porrigitur, ut tali ſcribendi more (quod mireris) etiam $p^0\,(x+y+z)$ & $d^0\,(xyz)$ ſibi reſpondeant, & veritati:

$$\begin{array}{llll} \text{Nam } p^0\,(x+y+z) & = & 1 & = p^0 x\, p^0 y\, p^0 z \\ \text{Et } \quad d^0\,(xyz) & = & xyz & = d^0 x\, d^0 y\, d^0 z \end{array}$$

Eâdem etiam operâ apparet quænam ſit *Lex homogeneorum tranſcendentalis*, quam vulgari modo ſcribendi differentias, non æquè agnoſcas. Exempli gratiâ, novo hoc *characteriſticæ* genere adhibito, apparebit $a\,d\,d\,x$ & $d\,x\,d\,x$ non tantùm Algebraïcè (dum utrobique binæ quantitates in ſe invicem ducuntur) ſed etiam tranſcendentaliter homogeneas eſſe, & comparabiles inter ſe; quoniam illud ſcribi poteſt $d^0\, ad^2\, x$, hoc $d^1\, x\, d^1\, x$, & utrobique exponentes differentiales conficiunt eamdem ſummam, nam $o + 2 = 1 + 1$. Cæterùm, lex homogeneorum tranſcendentalis, vulgarem ſeu Algebraicam præſupponit. Interim non omnes formæ tranſcendentes, licèt homogeneæ inter ſe, æquè per ſe aptæ ſunt ſummationi. Exempli cauſa $a\,dx\;ddx$ abſolutè ſummabile eſt, ſed $d\,x\,d\,x\,d\,x$ ſeu $p^3\,(d^1\,x)$ homogeneum priori tam Algebraicè, quàm tranſcendentaliter ſummabile non eſt, niſi quædam ſuppoſitio accedat.

N°. LXXVII.

CONSTRUCTIO PROBLEMATIS

Ducendi rectas quæ tangunt Lineas Centrorum Gravitatis.

LIneam Centrorum Gravitatis voco, quæ per omnia Magnitudinis ordinatim creſcentis centra gravitatis tranſit. Exempli cauſa eſto *Parallelographum* A B C A (*Fig.* 76.) *ordinatim creſcendo* tranſiens in A (B) (C) A, prioris ſit centrum G, poſterioris (G), & ita porrò; erit linea centrorum gravitatis A G (G), & Zona C B (B) (C) C erit *Elementum creſcendi*, cujus centrum ſit *V*. Voco autem *Parallelographum*, quod creſcit per parallelas, BC, (B) (C), ut hoc loco facit trilineum A B C A, rectis duabus AB, BC datum angulum facientibus, & curva AC comprehenſum.

Tab. xxi. Fig. 76.

Regula generalis, cum ſua demonſtratione hæc eſt: *V* G, *Recta ex V centro gravitatis Elementi, ducta ad G centrum Gravitatis ipſius magnitudinis; tangit lineam centrorum gravitatis A G. in ipſo hoc centro G.* Nam in rectam *V* G, jungentem *V* & G centra gravitatis duarum partium CB (B) (C) C & A B C A, cadit (G) centrum gravitatis compoſiti ex ipſis, nempe ipſius A (B) (C) A. Ergò eadem recta *V* G, id eſt, *V* (G) G tranſit per centra G & (G) duarum magnitudinum AB CA & A (B) (C) A elementariter differentium, quæ adeo centra & ipſa tantùm elementariter diſtabunt. Sed omnis recta jungens hæc centra, adeoque lineæ centrorum A G (G) puncta G & (G), non niſi elementariter diſtantia, lineam tangit. Ergò recta *V* G tangit lineam A G.

Sed pro Regula generali ad uſum per ſpecies magnitudinum transferenda, centro Elementi ſubſtitui poteſt aliud punctum æquivalens; & facillimæ conſtructiones naſcentur, ubi nulla ampliùs elementi ſeu quantitatis inaſſignabilis mentio fiet. Nempe eſto Problema: *Invenire rectam, quæ A G* (Fig. 76.) *Lineam Centrorum Parallelographi* A B C A *tangat in puncto lineæ dato G.* Biſecetur B C baſis Parallelographi, in *V*, jungatur *V* G, ea tanget lineam A G in G. Nam manifeſtum eſt, medium rectæ BC, non diſtare aſſignabiliter à centro Elementi C B (B) (C) C.

Tab. xxi. Fig. 77. Aliud Problema: *Invenire rectam, quæ* E G (*Fig.* 77.) *lineam centrorum ſectoris* H A C H *tangat in puncto lineæ dato* G. Fiat C *V*, tertia pars ipſius

ipſius CA, & jungatur *V*G: ea tanget lineam EG in G. Nam manifeſtum eſt, punctum triſecans rectam CA à parte C, non diſtare aſſignabiliter à centro gravitatis trianguli CA (C) quod eſt elementum ſectoris. Et notandum eſt etiam, punctum E initium lineæ centrorum ſectoris facere EH tertiam partem ipſius AH. *Sectoris* autem nomine, generaliter hîc intelligo trilineum duabus rectis concurrentibus & curva comprehenſum, quod creſcit per rectas CA, (C) A in idem punctum A convergentes; ſeu per rectam indefinitam circa centrum A motam & à curva arcum abſcindentem, ſpatiumque comprehendentem inter arcum, & ſitum ſuum primum atque poſtremum.

Quando puncta A & H coincidunt, ſector abit in *ſegmentum* & Problema erit; *Invenire rectam, quæ* AG (*Fig.* 78.) *lineam centrorum ſegmenti* ACA *tangat in puncto dato* G. Quod fiet, ſi ſumendo C*V*, ter- Tab. XXI. Fig. 78.
tiam partem ipſius CA, ducamus *V*G.

Eadem Methodus etiam ad centra ſolidorum applicari poteſt, habetque etiam locum in centris linearum. Et in his erit Problema: *Invenire rectam, quæ* AG (*Fig.* 79.) *lineam centrorum Arcus* AC *tangat in puncto* T. XXI.
dato G. Quod fiet jungendo CG, quoniam *V* centrum ſeu medium ele- Fig. 79.
menti C (C) non diſtat aſſignabiliter à puncto C. Itaque elegans habemus generale Theorema; quod *recta ex arcus curvæ extremo ad centrum gravitatis ejuſdem arcûs ducta, lineam centrorum arcûs tangat.*

Veritatem horum omnium Calculo differentiali comprobare licebit, at non tam generali ratiocinio, quàm operatione ſpeciebus magnitudinum accommodata. Unde patet, quædam Differentialia (ut hoc loco generaliſſimam Regulam) ex ipſa Elementorum conſideratione patere, ut non ſit calculo opus. Comprobabimus tamen ſucceſſum ſaltem in exemplo Trilinei duabus rectis angulum rectum comprehendentibus & curva comprehenſi. Sit (*Fig.* 76.) AB, x, BC, y. Ex G in axem AB ducatur nor- Fig. 76.
malis GF; & AF ſit z, & GF ſit v. Trilineum ABCA erit $\int ydx$; momentum trilinei ex axe, erit $\frac{1}{2}\int yydx$; & momentum ejuſdem ex vertice ſeu ex normali ad axem ducta per verticem erit $\int xydx$. Ergò z erit $\int xydx : \int ydx$, & v. erit $\frac{1}{2}\int yydx : \int ydx$. Ergò $dz = xydx\int ydx - ydx\int xydx, : qv. \int ydx$. Et $dv = \frac{1}{2}, yydx\int ydx - ydx\int yydx, : qv \int ydx$. Ergò $dz : dv = 2x\int ydx - 2\int xydx, :, y\int ydx - \int yydx$; quo ipſo determinatur tangens lineæ centrorum. Sed idem prodit ſecundùm regulam noſtram: nam poſito *V*G eſſe tangentem, erit $dz : dv =$ FB :, BK — FG. eſt autem FB $= x - z$ & fiet FB $= x\int ydx - \int xyydx, : \int ydx$. Et BK — FG $= \frac{1}{2}y - v = \frac{1}{2}y\int ydx - \frac{1}{2}\int yydx, : \int ydx$, Ergo FB :, BK — FG (id eſt $dz : dv$) erit $2x\int ydx - 2\int xydx, :, y\int ydx - \int yydx$, ut ante. Placuit autem vel ideò dare hanc ſolutionem, quia præter generalitatem & ſimplicitatem conſtruendi, perutilis erit ejus intellectus tironibus Analyſeos infiniteſimalis.

Nº. LXXVIII.

TENTAMEN DE NATURA

Et Remediis Reſiſtentiarum in Machinis, quæ à corporum ſuperinceſſu oriuntur, occaſione diſſertationis præcedentis ejuſdem argumenti.

Conſtat apud illos, qui rerum mechanicarum uſui ſcientiam principiorum conjunxêre; Data vi motrice impendenda, effectum machinis augeri non poſſe, niſi obſtacula accidentalia removendo, quæ ſuperfluam poſtulant virium impenſam; ut adeo omne hîc conſiſtat in parſimonia lucrum. Ex obſtaculis accidentalibus non minimum *Frictio* eſt, quam definire poſſis reſiſtentiam ſuperficiei, per quam inceditur. Eaque habet locum ſive Liquidum à Liquido, ſive Solidum à Solido, ſive denique Solidum à Liquido, vel quod eodem redit, Liquidum à Solido tangatur. Liquidum à Liquido non rarò tangitur cum detrimento motûs, veluti ſi gutta liquoris in alio liquore moveatur. Solidum à Solido impeditur, velut cùm traha per ſolum incedit. Denique Solidi Liquidique inter ſe contactus motum minuit, veluti cùm aqua fertur in canali; aut cùm contrà navis fertur in aqua: & navem conſtat diu in itinere verſatam, muſcoque obſitam lentiùs ire. Nuper etiam à Viris ingenioſiſſimis examinata eſt ex ſubtilioris Matheſeos fundamentis, & per calculum infiniteſimalem ope certæ hypotheſis inventa figura navis quàm minimùm cæteris paribus reſiſtens, quanquam ibi non aſperitatis in ſuperficie, ſed directionum impulsûs habeatur ratio.

Sed hoc loco de *Frictione ſolidi contra ſolidum* agemus, orta à ſuperficiei inæqualitate; quæ ſemper aliqua eſt, quantumcunque corpus poliatur, ut microſcopia oculis ipſis oſtendunt, dum ſcilicet eminentiæ & cavitates ubique alternantur. Unde quædam quaſi denticulorum, adeoque ſerræ ex denticulis compoſitæ, vel ſi mavis limæ ſpecies exhibetur. Duobus autem corporibus dentatis ad ſe invicem arctè applicatis oritur quædam, ut ita dicam, inſerratura, dum eminentiæ unius inſeruntur in cavitates alterius.

Hæc

Hæc autem aſperitas ſuperinceſſui obſtat, quoniam promotio qua unum corpus ſuper alio incedit, locum non habet, niſi eminentiæ vel frangantur, (atque adeò abradantur,) vel deprimantur; vel denique dentes unius ex cavitatibus ſeu intervallis dentium alterius attollantur inter procedendum, qui caſus eſt *volutionis*, de quo infrà. Eminentiæ poſt depreſſionem vel ſeſe omninò reſtituunt, vel nonnihil depreſſæ manent. In quantum ergò Frictione continuata corpora fiunt politiora, minuſque frictionis habentia, in tantum inæqualitates ſubiguntur, & vel abraduntur, vel depreſſione facta non reſtituuntur. Sed quia res tandem eò devenit, ut parum admodum imminuatur ampliùs frictio; conſequens tunc eſt inæqualitates ſeſe prope penitus vi elaſtica reſtituere, velut cùm per piloſum tapetem decurrit globus, vel cum pectine fides percurruntur. Ita ex eo aſperitas ferè eadem perſiſtit.

Manente autem *aſperitate* corporis, (ad quam ſcilicet digreſſo ſuperincedente, ſe ſponte reſtituit,) variari tamen poteſt, adeoque intendi minuique frictio, auctâ minutaque ipſa, quam dixi, *inſerratura*. Nam quo magis corpus corpori apprimitur inter ſuperincedendum, eo magis alterum alterius dentibus mordetur, profundiuſque eminentiæ unius in alterius cavitates deſcendunt uſque adeo, ut etiam alterum in altero cavitates vel inæqualitates reddat majores durante ſuperinceſſu; tametſi poſt tranſitum, corpus per vim ſuam elaſticam redeat ad nudam aſperitatem, ſeu ad ordinarias inæqualitates.

Variatur autem appreſſio variis cauſis, ſed duabus potiſſimum: *Pondere ſuperincedentis*, ut cùm trahæ curruſque plurimum onerantur & vehementer fundo apprimuntur; & *niſu ſuperinceſſus*, qui corpus corpori apprimit, dum directio ſuperincedentis in ipſam alterius ſuperficiem tendit tanquam corpus unum motu ſuo in alterum penetrare conetur. Et hoc obſervari poteſt in dentibus rotarum ſibi mutuo vim facientibus.

Appreſſio ex pondere ſuperincedentis, efficit etiam in curribus aliquid à frictione diverſum, licèt ei cognatum. Nam ſi fundus eſſet durus, ut ad ſenſum non cederet, nuda frictio foret; ut cùm trahæ ſuper glacie incedunt; ſed plerumque ſolum cedit, & tanto quidem magis, quanto eſt mollius aut magis aqua imbutum, unde depreſſiones ſequuntur, quæ non reſtituuntur vi elaſtica, ſed ipſa mollitie materiæ confluentis. Concurritque tum difficultas ſecandi terram tum ipſa adhæſio ab ejus tenacitate, ut rotam terra limoſa non facilè dimittat. Sed iſta quidem hujus loci non ſunt.

Magis ad rem pertinet problema Clariſſimi *Amontonis* nuper cum ſcientiæ jactura defuncti.

Ponatur (Fig. 80.) ſuper Plano A B incedere corpus ſuperficie plana C D, appreſſa pondere E. Creditum eſt communiter, cæteris manentibus imminui frictionem ea proportione, qua imminuitur contactus ſeu ſuper- T. XXII. Fig. 80.

 ficies

ficies CD. ſed Dn. *Amonto* ſtatuit, modò pondus incumbens idem maneat, nihil referre, quanta ſit ſuperficies contactûs: atque hoc, opinor, argumento, quod plano CD aucto, augetur quidem contactus, ſed tamen viciſſim augentur & partes ſuſtentantes; eoque minor eſt appreſſio in qualibet parte; adeoque & minor in ea reſiſtentia ſive frictio: ita commodum incommodo compenſaretur.

Laudandus eſt Dominus *Amonto*, quòd ſe errori vulgari oppoſuit: falſiſſimum enim eſt ob hanc, quam diximus rationem, cæteris manentibus minui augerive frictionem proportione ſuperficiei contactûs. Sed tamen in eo rem acu non tetigit, quod commodum incommodo compenſari, adeoque rem à ſolo pondere premente pendere putavit. Demonſtrativum foret argumentum, ſi reſiſtentia ſeu frictio eſſet proportionalis depreſſioni, & depreſſio ponderi incumbenti. Sed neutrum ſatis locum habet: *non prius*, nam præter depreſſionem, qua eminentiæ unius in cavitates ſeu valles alterius inſeruntur, æſtimandus eſt rigor & figura eminentiarum. Finge tabulam plenam veſicis inflatis, & globum ſuper ea procurrentem, non ſequitur, globum ad pollicis altitudinem in veſicas deſcendentem duplo magis præcisè impediri in curſu, quàm deſcendentem ſemipollice, cùm reſiſtentia variari poſſit, pro magnitudine veſicarum, & minores veſicæ tantundem depreſſionis ægriùs patiantur, quia major in illis depreſſis oritur incluſi aëris compreſſio, ut alias hypotheſes taceam, unde ſimilitudo ſumi poteſt. Sed *nec poſterius* locum habet, neque duplicato pondere ſtatim dupla erit depreſſio. Quod comparatione aëris elaſtici illuſtrari poteſt. Finge Embolum ope ponderis impoſiti in cylindrum cavum aëre plenum intrudi ad altitudinem pedis; patet duplicato pondere non ſtatim intrudi ad altitudinem bipedalem, ſed creſcere difficultatem, quemadmodum etiam apparet, cùm ſclopeta ventanea oneramus. Et rota currûs onerati ad ſex pollices in terram penetrante non ideo duplicato onere penetrabit ad altitudinem pedis; nam terra preſſa fit conſtipatior & ad cedendum difficilior. Præterea ſi, ut plerumque fit, onus E non ubique æqualiter incumbat plano CD, non ubique æqualis erit depreſſio: unde multæ naſcuntur varietates, quæ impedient, ne magnitudo ſuſtentantis difficultatem ab appreſſione ortam accuratè compenſet.

Diximus frictionem intendi etiam ex *niſu Superinceſſus*. Hoc fit cùm directio ſuperincedentis non eſt parallela ſuperficiei alterius, ſed ad eam angulum facit, qui quo propior eſt perpendiculari, eo violentior eſt appreſſio. Unde oritur *coactura* quædam, *es zwinget ſich*. Atque hoc imprimis notatur in dentibus rotarum in ſe invicem agentium. Tantam enim ſæpe invicem preſſionem rotæ exercent, ut dentes vel bacilli frangantur, niſi eorum firmitas major ſit, quàm reniſus oneris per rotas ſuperandi. Itaque hoc loco tantundem eſt frictionis, quantum, ſi dens denti ingenti pondere

pondere apprimeretur. Et interdum fit, ut ipſi axes rotarum loco ſuo emoveantur, ſi non ſint probè firmati.

Venio nunc ad *Remedia Frictionis* in Machinis, ubi ſepoſito *remedio phyſico*, quale eſt unguen, quod ſuperficiem minùs aſperam reddit; agemus de *Mechanicis*, quæ duûm ſunt generum: vel diminuitur, aut pro maxima parte tollitur frictio in ſuperinceſſu, vel diminuitur aut tollitur (pro maxima parte) ipſe ſuperinceſſus. Prius, nempe diminutio Frictionis in ſuperinceſſu obtineri poteſt certo modo ſuperincedendi, quem *Volutionem* appellamus. Eſt autem modus ſuperincedendi vel *radens*, vel *volvens*, vel *mixtus*.

Superinceſſus *radens* eſt, cùm idem punctum unius ſeſe tangentium corporum tranſit continuè per diverſa puncta alterius, ſeu lineam motu ſuo in ejus ſuperficie deſignat. Ita traha incedit in ſolo, ut quivis clavus infixus ejus baſi, lineam deſignet in terra.

Superinceſſus *volvens* eſt, cùm continuè mutatur punctum contactûs, adeoque linea unius opus eſt ad lineam veſtigii in alio deſignandam; & hæc volutio eſt pura, cùm linea deſignans quæ eſt in una ſuperficie æqualis eſt lineæ deſignatæ in altera ſuperficie; qualis volutio eſt rotæ, cùm ita movetur ſuper ſolo, ut iter per circuitus ejus metiri liceat, quod fieret exactè.

Si (*Fig.* 81.) rotæ F circumvolutus eſſet funis G H L M, cujus una extremitas G affixa eſſet rotæ, altera M pavimento N P: ita enim rota impulſa ſive versùs N, ſive versùs P neceſſariò procedet mera volutione, cùm funis idem, qui fuit linea deſignans in rota, fiat linea deſignata in pavimento. Funis enim inter volvendum à rota in pavimento deponitur, ſi nempe rota impellatur versùs N; contrà ſi rota impellatur versùs P, funem ipſa ex pavimento aſſumit; ita ut in priore motu *devolutio*, in poſteriore *obvolutio* fiat. T. XXII. Fig. 81.

Sed hac cautione funis vel fili non adhibitâ, manifeſtum eſt, volutioni poſſe admiſceri motûs radentis elementum, ita ut rota *labatur* eundo, *daſs ſie rutſche*, Galli vocant *gliſſer*. Cæterum cùm vera eſt & mera volutio, circulus in recta incedens certo ſuæ circumferentiæ puncto in aëre deſignat lineam *Cycloidalem*, ſuper alio incedens circulo *Epicycloidalem*; aliter, ſive circulus ſive alia quævis linea volvatur, deſcriptam à puncto fixo, generali vocabulo *Trochoidalem* appello.

Motus mixtus eſt ex radente & volvente, quando linea quidem ſuperincedentis baſi applicata deſignat lineam in baſi, ſed non ſibi æqualem; quod fit, dum volutioni admiſcetur motus radens, non quidem aſſignabilis per certum tempus, ſed tamen elementaris & repetitus per elementa infinitè parva numero infinita. Ita punctum quidem unius ſuperficiei non applicatur per tempus aſſignabile diverſis punctis alterius ſuperficiei, ſed tantùm per tempus elementare; eo ipſo tamen tempuſculo durante non quieſcit, ut in mera volutione, ſed procedit in baſi, raditque adeò, etſi non

non niſi per ſpatium elementare, cùm mox digrediatur à contactu, alterique puncto locum faciat. Hæc compoſitio volutionis cum motu radente ſic commodè exhiberi poteſt. Finge (*Fig.* 81.) funem GHLM rotæ F modo ſuprà dicto eſſe circumvolutum, & unum funis extremum G, rotæ affixum, alterum verò extremum M non affixum eſſe, ſed liberum, ita ut trahi poſſit in pavimento cum rota versùs P. Ita ergò, ſi durante hac tractione ſimul rota F impellatur verſus N, & ſuam volutionem exerceat; eo ipſo motus rotæ ſuper pavimento, erit compoſitus ex motu volvente ob ipſius rotæ volutionem ſuper fune, & ex motu radente ob funis tractionem in pavimento; eritque hoc caſu linea, quam rota puncto imo L ſemper variante deſignat in pavimento, minor fune devoluto, vel arcu rotæ ad pavimentum applicato. Sed ſi durante tractione funis impellatur Rota F verſus P; rota volvetur quidem, ſed ita, ut funis obvolvatur rotæ, linea autem, quam imum rotæ L in pavimento deſignat erit major fune obvoluto ſeu arcu ad pavimentum applicato funem aſſumente. Si ergo funis traheretur ſuper pavimento cum rota, ſine rotæ volutione, motus eſſet merè radens, & idem punctum rotæ L ſemper incederet per pavimentum: Si funis non traheretur, ſed eſſet affixus pavimento in M, rotaque tamen volveretur; motus eſſet merè volutorius; puncto L eodem in eodem pavimenti loco manente, ſed nonniſi per tempus inaſſignabile donec per volutionem continuatam ab eo erigatur: Nunc autem motus eſt miſtus, dum durante volutionis elemento idem punctum L ſimul in pavimento procedit etſi per longitudinem inaſſignabilem. Poteſt etiam Motus mixtus ſic exhiberi, ut alios taceam modos infinitos:

T. XXII. Fig. 82. Ponatur (in *Fig.* 82.) idem axis horizonti parallelus, QR, duas gerere rotas verticales in axe fixas, S & T, ſed inæquales; & T, una ex rotis, ope funis GHLM & clavorum fixorum G & M volvatur ſuper NP plano horizontali tangente, modo explicato; tunc motus, quem altera rota S exerceret ſuper ſubjecto plano horizontali ipſam tangente, VX, eſſet mixtus.

T. XXII. Fig. 83. Nunc radentem volventemque inceſſum frictioni applicemus. Eſto (*Fig.* 83.) regula YZ horizontalis, dentes normaliter erectos habens, cui incumbat rota dentata W ex ſtellarium genere, ut Germani vocant, (cujus dentes in planum rotæ incidunt, & continuati in centrum tendunt,) & ſuper regula incedat volvendo, ita ut durante inceſſu dens rotæ unius in intervallum dentium regulæ quadret, & vice verſa. Hoc caſu patet, aſperitatem ſeu dentes regulæ rotæque non obſtare inceſſui. Sed ſiquis rotam ſine provolutione ſuper regula promovere vellet, deberet idem dens rotæ perſtringere plures dentes regulæ, quod, quamdiu dentibus regulæ inſeritur, neque elevatur, fieri nequit, niſi vi magna frangat dentes aut ſaltem flectat, aut ipſe frangatur vel flectatur. Idem planè fit, etſi inſenſibiliter in Frictione, ut ſuperinceſſus ob inæqualitatum inſertionem retardetur;

detur ; niſi cùm corpus ſuper baſi volvendo incedit, ut rota ſuper regula. Unde patet volutionem eſſe remedium contra frictionem, & quanto motus mixtus volutioni propior eſt, eo minus frictionis habere.

Ex hoc principio jam homines rotas curribus ſubjecerunt, nec trahæ proſunt, niſi ſuper glacie aut nive indurata. Et interdum rotæ vel cylindri vel etiam globi non ſunt affixi oneri mobili, ſed tantùm ſubjecti, quod, ubi locum habet, melius eſt: ita enim ceſſat frictio circa rotæ vel cylindri axem. Et præterea cùm cylinder vel globus volvatur ſuper ſolo, onus autem eo caſu volvatur ſuper cylindris vel globis; fit, ut onus duplo celeriùs in ſolo procedat, quàm globus vel cylinder ipſe, nam fertur tam celeritate cylindri, cui incumbit, quàm ſuâ ſuper cylindro: at rota eâdem celeritate procedit, qua ipſe currus. Unde eatenus cylinder liber, cui onus incumbit, præſtat rotis currui affixis, ſed hoc viciſſim in cylindro libero incommodi eſt, quod ita ad continuationem itineris novis opus eſt cylindris vel globulis, quia priores à tergo ab onere relinquuntur; aut neceſſe eſt, ut ſit, qui à tergo relictos antrorſum ſemper proferat; niſi motus oneris ſit circularis, & ipſum onus itidem circulare, quo caſu effici poteſt, ut iidem globi vel cylindri ſemper ſubjectè maneant oneri, illudque commodè ferant, cùm nunquam deferantur.

Ita Circulus horizontalis $\gamma\delta$, (*Fig.* 84.) circa ſuum centrum gyrans, habenſque cylindros ſibi ſubjectos axe itidem horizontales in idem centrum priori centro verticaliter ſubjectum collimantes; magno licèt onere impoſito circumagi poterit; cylindris ipſis ita accommodatis, ut ſemper idem inter ſe intervallum ſervent. T. XXII. Fig. 84.

Fit quoque volutio non ſolùm, cùm firmum à firmo, ſed etiam cùm firmum à flexili tangitur. Ut cùm funes aut catenæ ſuper trochleis aut cylindris incedunt, quos movent: neque enim refert circulus ſub linea an linea ſuper circulo incedat. At radens motus foret, ſi funis ſuper cylindro circa ſuum axem immobili labi deberet, ita enim experimur, frictionem reſiſtentiamve inſignem oriri, quæ inprimis augetur, ſi funis ſit cylindro immoto circumplicatus; adeo, ut repetita aliquoties circumplicatione omninò motus funis aut fili tandem impediatur, qui frictionis utique eſt effectus. Eaque conſideratione uſus eſt, qui apud *Galilæum* machinulam excogitavit, qua quis ſe commodè ex alto per funem dimittere poſſit.

Et quemadmodum duplici modo cylindri onera ferunt, vel ita, ut ad rotæ inſtar axem habeant oneri affixum, vel ita ut liberè volvantur; ita etiam trochleæ duplici modo funibus filiſque aguntur: vel enim medium habent axem fixum, ut communiter fieri ſolet; vel medio libero inter funes ſuſpenduntur, quo caſu non tantùm ceſſat frictio circa axem, ſed & medium trochleæ excavatum aliis corporibus dat locum, ut in quodam inſtrumento textoribus ingenioſioribus cognito, emblematibus figurandis apto, quod *Spigilicum*, ni fallor, vocant. Quin etiam quidam

axem rotæ horizontalis aliquando ex catena ſuſpendit, cui ipſe axis trochleæ vicem præſtabat. Ita frictio ab axe incumbente oriri ſolita ceſſabat, quod in quibuſdam caſibus prodeſſe poteſt. Ex his intelligitur, quomodo frictio volutione tollatur. *Claudii Perralti*, Viri ingenioſi, & mihi olim amici, machinæ frictione carentes quas in ſuis ad *Vitruvium* notis exhibet, principio funium cylindrorumque ſeu trochlearum adeoque Volutionis, nituntur.

Commodum Volutionis ſupra motum radentem egregiè conſideravit olim Illuſtris Vir *Olaus Römerus* Danus, cùm Pariſiis in Obſervatorio Regio ageret. Obſervavit enim dentes rotarum, ut vulgò fiunt, ſine certæ figuræ delectu, valdè coactè & incommodè moveri, dum alterius rotæ vel regulæ dentem violenter radunt. Itaque excogitavit figuram, qua dens ſuper oppoſito dente, (pro dente capio hoc loco & bacillum) incederet non radendo, ſed volvendo; quam figuram non ſine profundioris Geometriæ auxilio invênit eſſe Epicycloidalem; orandusque eſt ut tandem aliquando totam pulcherrimi inventi rationem in lucem ipſe edat. Habemus interea quæ poſtea celeberrimus *Hiræus* de eodem Epicycloidum uſu mechanico protulit: dignæque ſunt hujuſmodi meditationes quæ in praxin transferantur. Quanquam autem incommodum vulgò minui ſoleat brevitate & multitudine dentium ſimul agentium, (quæ etiam facit, ut diviſo in plures labore non ita facilè frangantur,) reſiſtentia tamen ſuperflua non exigua haud raro manet. Eaque imprimis eſt notabilis in magnis operibus, veluti cùm ope dentium rotæ apprehenditur pollex (Germanis *Daumling*) ingenti & ponderoſo conto tuſorio vel piſtillo, verticaliter poſito affixus; eoque ipſo perpendiculariter elevatus contus, & mox dimiſſo à dente pollice rurſus delabens, à vi lapſus ſui, comminutioni aut trituræ corporum, vel expreſſioni ſuccorum inſervit. Ibi enim valdè operæ pretium eſt dentibus pollicique, ſed pollici imprimis figuram convenientem dari.

Unum ergò remedium frictionis eſt volutio, manente ſcilicet ſuperinceſſu. Sed alterum remedium eſt ſublatio ipſius ſuperinceſſus. Hoc pro magna ſaltem parte præſtat machinatio *Axis curvati.* Germani tales Axes vocant *Curben*, item *krumme Zapffen*, Galli *Manivelles.* Nempe anſa ad angulum rectum inflexa perticam quandam huc illuc movet. Idque tum ad durabilitatem, tum etiam ad frictionis imminutionem præſtat, quàm rotas adhibere dentatas; aut ovalem Viri celeberrimi *Samuelis Morlandi* (Tubo Stentorophonico invento clari,) pondus attollentem. Etſi enim effectus, qui Axe curvato producitur, non ſit æquabilis, (quod in Mechanico ſuo opere objicit *Morlandus*) id tamen tantum abeſt, ut noceat in iis caſibus, ubi adhibetur; ut potiùs ſua inſignia commoda habeat; veluti cùm exigua eſt quantitas aquæ rotam circumacturæ, cui axis curvatus eſt affixus, nam ea aquæ menſura initio motûs ſufficit, cùm etiam

exigua eſt operatio, nempe cùm magna circuli portio exiguum propulſum rectilineum facit; interea nova affluente aqua impletiſque hauſtris impetus concipitur, qui tandem tunc quoque ſufficit, cum progreſſu circulationis magna fit propellendi difficultas. Si verò reſiſtentia ſemper eſſet æqualis, rota initio nihil ageret, donec hauſtra implerentur, adeoque per intervalla interquieſceret, quod ſæpe nocet. Frictio autem reſidua perticæ ad axem, à quo movetur, & ad vectem quem movet, exigua eſt, ſi frictionibus alias occurrere ſolitis comparetur. Cæterum obliquitas motus perticarum ne noceat in antliis aut ſimilibus, utique variis modis effici poteſt, & vulgo plerumque obtinetur ipſa longitudine haſtarum, quas trahit pertica, ut non ampliùs ſenſibilis ſit obliquitas, ubi ad embolum ipſum pervenit. Sed ſi breves ſint perticæ, omninò remedio opus eſt.

Multa autem circa Axes curvatos utiliter adhuc præſtari poſſent, ex quibus unum eſt, ut interventu axis curvati rota una aliam circumagat, licèt valdè diſtantem, nullo dentium, funium aut ſimilium interventu; cùm communiter per axes curvatos circulatio non niſi motum rectilineum reciprocum efficiat. Nam quod in rotis filificis muliercularum motus rectilineus interventu axis curvati efficit circularem, id facit impetus impreſſus, qui in majoribus operibus per ingentes reſiſtentias evaneſcere ſolet.

Habentur & alia Machinamenta ſuperinceſſu carentia minùs vulgò nota, magnis tamen operibus ob firmitatem apta, & cum ſucceſſu adhibita, ubi nec dentium, nec trochlearum inceſſu motus transfertur, & tamen rota rotam etiam in diſtans circumagit, & rectilineus circularem, circularis rectilineum efficere poteſt. Sed talia hoc loco deſcribere prolixum foret, ubi fundamenta tradere propoſitum fuit, frictionis remedia derivantur.

N°. LXXIX.

EPISTOLÆ TRES AD CHRISTIANUM GOLDBACHIUM, S. CÆS. MAJ. RUSSICÆ A CONSILIIS JUSTITIÆ.

EPISTOLA I.

I. Cur globus gravis in aëre cum terra quodammodo rotetur diſquiritur. II. De Hanſchii *conſilio edendorum Keplerianorum.*

I. IGnoſces, quòd in deſcribendo non poſſum eſſe promptiſſimus. Ad tuam ratiocinationem habeo quod admoneam. Cauſa cur globus gravis in aëre cum terra quodammodo rotetur, atque ita, ex turri demiſſus, ad turris, ut ſic dicam, pedem cadat, perinde ac ſi turris cum terra quieviſſet, non in eo ſolo ſita eſt, quod grave illud cum aëre & tellure unum quoddam mobile conſtituit, & ab aëre cum tellure moto abripitur; ita enim grave in vacuo Gerikiano cadens, non recta deſcendere videretur, quia in eo abripiens aër ferè ceſſat: ſed ex eo, quod globus ſive ex turri demiſſus, ſive tormento excuſſus, antequam in liberum aërem veniſſet, impetum telluris, quo nempe ipſa movetur, jam acceperat. Et hoc etiam confirmatur *Gaſſendi* experimentis in diſſ. de Motu impreſſo a motore translato relatis. Is enim expertus eſt in triremi per remiges velociſſimè impulſa, lapidem e ſummo malo demiſſum recta ad pedem mali cadere, perinde ac ſi triremis quieviſſet. Quod non poteſt aſcribi aëri ſuper triremem incumbenti, cui utique tanta velocitas a triremi non imprimeretur, ut perfectè ejus motum ſequatur, (ne quid de vento fortè adverſo dicant) neque tanta foret illa aëris de triremi recepta velocitas, ut lapidem ſufficienter abripere ſecum poſſit, quod ne ventus quidem vehemens faceret. Itaque vides neque a *Cuſſelero*, ſcriptore non admodum profundi judicii, neque a multis aliis rem ſatis rectè fuiſſe explicatam.

II. Imprimis Dn. *D. Hanſchium* a me ſalutari peto, ſi adeſt, cujus conſilium edendorum Keplerianorum valde laudo. Quum nuper Torgavia veniens Lipſiam tranſirem, abeſſe dicebatur. Vale, *Dabam Hanoveræ* 12. *Januar.* 1712.

EPIS-

EPISTOLA II.

I. Quem impetum lapis e malo dejectus ſequitur? II. Radii lucis perfectas lineas rectas non conſtituunt. III. Quibus muſicis proportionibus homines delectantur? IV. Unde oritur ex muſica voluptas? V. Quando rationes ſurdæ in Muſica commodè locum inveniunt?

I. CErtum eſt, quod tam globus tormento ejectus, quàm lapis ex malo demiſſus impetum loci, ex quo exiere, (quippe jam impreſſum antequàm exirent) ſequantur, nec rationem conſenſus ab aëre eſſe petendam, qui potius, ſi diverſo feratur motu, turbare aliquando nonnihil poteſt, ut in navi.

II. *Eimmartus* haud conſideravit radios lucis, ob inæqualem aëris denſitatem, adeoque mutatum multimode medium refringens, non perfectas conſtituere lineas rectas; & lineam radii mutari, mutata notabiliter aëris conſtitutione, idque maximè ſenſibile eſt in refractionibus horizontalibus, quæ in experimento ipſius occurrunt.

III. Non impoſſibile eſt, eſſe alicubi animalia, quæ plus quàm nos Muſicæ ſenſibilitatis habeant, & delectentur Muſicis proportionibus, quibus nos minùs afficimur. Sed putem, majorem ſenſuum noſtrorum ſubtilitatem magis nobis nocituram, quàm profuturam, multa enim viſu, olfactu, tactu, ingrata ſenſuri eſſemus; & qui nimis ſubtilis ſenſus ſunt in Muſica, offenduntur quibuſdam oberrationibus practicorum in organorum conſtructione non bene evitabilibus, quibus tamen auditorium offendi non ſolet. Nos in muſica non numeramus ultra quinque, ſimiles illis populis, qui etiam in Arithmetica non ultra ternarium progrediebantur, & in quibus phraſis Germanorum de homine ſimplice locum haberet: *Er kan nicht über drey zehlen.* Nam noſtra intervalla uſitata omnia ſunt rationum compoſitarum ex rationibus inter binos ex numeris primitivis, 1, 2, 3, 5. Si paullo plus nobis ſubtilitatis daretur, poſſemus procedere ad numerum primitivum 7. Et tales reapſe dari puto. Itaque nec numerum 7. veteres refugiebant planè. Sed vix erunt, qui procedant uſque ad proximos primitivos 11. & 13.

IV. Rationem autem conſonantiæ petendam puto ex congruentia ictuum. Muſica eſt exercitium arithmeticæ occultum neſcientis ſe numerare animi. Multa enim facit in perceptionibus confuſis ſeu inſenſibilibus, quæ diſtincta apperceptione notare nequit. Errant enim, qui nihil in anima fieri putant, cujus ipſa non ſit conſcia. Anima igitur etſi ſe numerare non ſentiat, ſentit tamen hujus numerationis inſenſibilis effectum, ſeu voluptatem in conſonantiis, moleſtiam in diſſonantiis inde reſultantem. Ex multis enim congruentiis inſenſibilibus oritur voluptas. Vulgo verò malè rem

computant, qui eas tantùm operationes animæ tribuunt, quarum conſcia eſt. Unde multi non tantum anterioribus philoſophis, ſed etiam Carteſianis ipſis aliiſque recentioribus, velut *Lockio* & *Baylio* errores nati ſunt. Sed, ut ad rem redeamus, in octava ſecundus ex alternis ictus unius ictuum ſeries congruit cuivis ictui alterius ſeriei. In quinta tertius quiſque unius ſeriei & ſecundus alterius conſentiunt. Polygona circuli corpora regularia & alia hujuſmodi licet ab acutiſſimo *Keplero* adhibita ἀπροσδιόνυσα ſunt, cùm ad Arithmeticam numerorum rationalium non pertineant.

V. Rationes ſurdas non puto per ſe placere animæ, niſi quando parum diſtant a rationalibus, quæ placent: per accidens tamen diſſonantiæ interdum placent, & utiliter adhibentur, & ſuavitatibus ut umbræ ordini & luci interponuntur, ut ordine poſtea tanto magis delectemur. Amicus tuus, cujus ſchedam mecum communicaſti, & qui monochordum vult ſecare in extrema & media ratione deprehendet revera intervalla, quæ ita prodeunt ad ſenſum ferè coincidere cum ſexta majore & minore, ſeu ſi ſit AB ad BC, ut BC ad CA, fore propemodum AB, BC, CA

8, 5, 3,

ſexta minor ſexta major

Sunt enim ſic ſatis propinqua, ut 809. 500. 309. ponendo $\sqrt{5}$ eſſe 2. 236. vel 2. 236.

1000.

& exactè omnino ut $\sqrt{5}+1$, 2, $\sqrt{5}-1$. eſt autem $\sqrt{5}$ utique irrationalis paulo major quàm 2. 236, ſed error eſt minor quàm $\frac{1}{1000}$ $\overline{ACB}$.

Itaque ſi quid illa ſectio habet grati, mutuabitur ab his intervallis vicinis. *Dabam Hanov.* 17. *April.* 1712.

P. S. Dn. *Fritſchius* Theodicæam meam Germanicè verti vellet. Ego putem in hanc rem opus fore interprete, qui non tantùm ſtilo noſtrate valeat, ſed & argumento & meditatione delectetur, ut ſatis in rei interiora penetrare poſſit.

EPISTOLA III.

I. De temperamento muſico. II. De motu planetario ad cauſſas phyſicas revocato. III. De Experimento Ramazzini *felici cum ſucceſſu inſtituendo.*

I. DE temperamento Muſico in operibus eruditorum olim a *Baſnagio* editis invenies epiſtolam ſummi viri *Chriſtiani Hugenii*, quo pro more ſuo accuratiſſimè rem examinavit, & commodiſſimam fortaſſe rationem adhibuit. Quamquam, ut verum fatear, pauciſſimi auditores minutiis illis afficiantur, & pleriſque ſufficiat, diviſio illa octavæ in duodecim partes æquales, quam *Ariſtoxeno* tribuunt.

II. Quo-

II. Quomodo motus planetarii a *Keplero* inventæ per obſervationem leges ad cauſſas phyſicas revocari poſſint, ſuppoſitis motibus duobus, uno gravitatis, altero circulationis harmonicæ, in Actis Eruditorum a me oſtenſum eſt. (a).

III. Non miror experimentum Ramazzinianum Dn. *Serrario* non ſtatim ſucceſſiſſe, nam nec ſucceſſit ſtatim Cl. *Ramazzino*. Certè niſi tubus ſatis longus, accurataque libra ſit, non erit differentia ſenſibilis. Cæterum nemo non videt pondus, dum cadit & quatenus cadit, a libra non ſuſtineri. Præſtat autem pondus eſſe aqua multo gravius ſpecificè, ut minus ab ea ſuſtineatur, & celeritati deſcenſus per longitudinem ſuccurri. Poteſt etiam experimentum capi ſine aqua, ut diſcrimen appareat (b). *Dabam Hanov.* 6. *Oct.* 1712.

P. S. Elegantis tui in Theodicæam epigrammatis, ſed erga me paullo faventioris, D. D. *Hanſchius* me participem fecit.

(a) Vid. Num. 24.

(b) Vid. Epiſt. ad *Schelhammerum* in Tom. II. P. II.

N°. LXXX.

OBSERVATIO

Quòd rationes, ſive proportiones non habeant locum circa quantitates nihilo minores, & de vero ſenſu methodi infiniteſimalis.

Ex Actis Erud. Lipſ. ann. 1712.

CUm olim Pariſiis Vir ſummus *Antonius Arnaldus* ſua nova Geometriæ Elementa mecum communicaret, atque in iiſdem admirari ſe teſtatus fuiſſet, quomodo poſſet eſſe 1 ad — 1, ut — 1 ad 1; quæ res probari videtur ex eo, quod productum eſt idem ſub extremis, quod ſub mediis, cùm utroque prodeat + 1; jam tum dixi mihi videri, *veras* illas *rationes* non eſſe, in quibus quantitas nihilo minor eſt antecedens, vel conſequens, etſi in calculo hæc, ut alia *imaginaria* tutò, & utiliter adhibeantur. Et ſanè identitatis rationum verarum fundamentum eſt rerum ſimilitudo, quæ facit, exempli causâ, ut ſegmentis ſimilibus diverſorum

ſorum circulorum aſſumtis, ſit ubique eadem ratio chordæ ad radium; ſeu ut chorda minoris ſe habeat ad radium minoris, vel ut chorda majoris ad radium majoris. Sed vero nulla planè apparet ſimilitudo in ſupra dicta Analogia; ſi enim — 1 eſt minus nihilo, utique 1 ad — 1, erit ratio majoris ad minus. Sed vero contra ratio — 1 ad 1 eſt ratio minoris ad majus. Quomodo ergò utrobique eadem ratio erit? Sed rationes iſtas eſſe imaginarias etiam alio certiſſimo argumento comprobabo, ſcilicet a Logarithmis. Nempe ratio, cui nullus datur reſpondens Logarithmus, ratio vera non eſt. Porrò poſito unitatis Logarithmum eſſe 0, rationis — 1 ad 1, idem eſt Logarithmus, qui ipſius — 1. at ipſius — 1 non datur Logarithmus. Non enim eſt poſitivus, nam talis omnis eſt Logarithmus numeri poſitivi unitate majoris. Sed tamen etiam non eſt negativus; quia talis omnis eſt Logarithmus numeri poſitivi unitate minoris. Ergò Logarithmus ipſius — 1 cùm nec poſitivus ſit, nec negativus, ſupereſt ut ſit non verus, ſed imaginarius. Itaque, & *ratio*, cui reſpondet, *non vera*, ſed *imaginaria* erit. Idem etiam ſic probo: Si daretur verus Logarithmus ipſius — 1, ſeu rationis — 1 ad 1, ejus logarithmi dimidium foret Logarithmus ipſius $\sqrt{-1}$, ſed $\sqrt{-1}$ eſt quantitas imaginaria. Itaque daretur Logarithmus verus imaginariæ, quod eſt abſurdum. Et proinde non nihil humani paſſus eſt inſignis in paucis Geometra *Johannes Walliſius*, cùm dixiſſet rationem 1 ad — 1 eſſe plus quàm infinitam; & rectè hoc (etſi aliis conſiderationibus) celeberrimus *Varignonius* rejicit. Interim nolim cum ipſo negare — 1 eſſe quantitatem nihilo minorem; modò id ſano ſenſu intelligatur. Tales enuntiationes ſunt *toleranter veræ*, ut ego cum ſummo Viro *Joachimo Fungio* loqui ſoleo; Galli appellarent *paſſables*. Rigorem quidem non ſuſtinent, habent tamen uſum magnum in calculando, & ad artem inveniendi, univerſaleſque conceptus valent. Talis fuit locutio *Euclidis*, cùm Angulum contactus dixit eſſe rectilineo quovis minorem; tales ſunt multæ Geometrarum aliæ, in quibus eſt figuratum quodammodo, & crypticum dicendi genus. Sunt tamen quidam, ut ſic dicam, *tolerabilitatis*. Porrò, ut nego rationem, cujus terminus ſit quantitas nihilo minor, eſſe realem; ita etiam nego, propriè dari numerum infinitum, vel infinitè parvum, lineamve infinitam, vel infinitè parvam. Etſi *Euclides* ſæpè, ſed ſano ſenſu, de linea infinita loquatur. *Infinitum continuum* vel diſcretum, propriè nec unum, nec totum, nec quantum eſt; & ſi analogia quadam pro tali a nobis adhibeatur, ut verbo dicam, eſt modus loquendi. Cùm ſcilicet plura adſunt, quàm ullo numero comprehendi poſſunt, numerum tamen illis rebus attribuemus analogicè, quem infinitum appellamus. Itaque jam olim judicavi, cùm infinitè parvum eſſe errorem dicimus, intelligi dato quovis minorem, reverâ nullum. Et cùm ordinarium, & infinitum, & infinities infinitum conferimus; perinde eſſe ac ſi conferremus aſcendendo diame-

diametrum pulviſculi, diametrum terræ, & diametrum orbis fixarum, aut his quantumvis (per gradus) majora, minoraque, eodemque ſenſu deſcendendo, diametrum orbis fixarum, diametrum terræ, & diametrum pulviſculi poſſe comparari ordinario, infinitè parvo, & infinities infinitè parvo, ſed ita ut quodvis horum in ſuo genere, quantumvis majus, aut minus concipi poſſe intelligatur. Cùm verò ſaltu ad ultimum facto ipſum infinitum, aut infinitè parvum dicimus, commoditati expreſſionis, ſeu breviloquio mentali inſervimus; ſed non niſi *toleranter vera* loquimur, quæ explicatione *rigidantur*. Atque hæc etiam mea ſententia eſt de areis illis Hyperboliformium Aſymptoticis, quæ infinitæ, infinitieſque infinitæ eſſe dicuntur, ideſt talia rigoroſe loquendo vera non eſſe poſſe, tamen ſano aliquo ſenſu tolerari. Atque hæc tum ad terminandas virorum clariſſimorum *Varignonii*, & *Grandii* controverſias, tum ad præcavendos chimericos quoſdam conceptus, tum denique ad elidendas oppoſitiones contra methodum *infinitè ſimilem* prodeſſe poſſunt.

N°. LXXXI.

LETTRE AU R. P. TOURNEMINE,

Sur le livre intitulé *Commercium Epiſtolicum.*

Tirée des Mémoires de Trevoux ann. 1715.

A Brunſvick ce 28. Octobre 1714.

CE n'eſt que depuis peu de ſemaines que j'ai vu le livre qu'on a publié contre moi en Angleterre, & afin que le public tire quelque fruit de cette conteſtation, je penſe à publier auſſi un *Commercium Epiſtolicum* ſur ces matiéres; & j'eſpère que Meſſieurs les Anglois me communiqueront ce qu'ils trouvent encore chez eux, & que je ne trouve point chez moi après tant d'années. Ce que je pourrai donner au public à cette occaſion ſervira à éclaircir les progrès de la Science, & comment j'ai avancé peu à peu. Tout ce qu'on allègue en faveur de M. *Newton*, ne peut valoir que pour lui attribuer l'invention de quelques ſuites, mais cela n'a rien de commun avec le nouveau calcul, qu'il ne paroit pas avoir bien entendu, non plus que M. *David Gregory*, & ſes autres diſciples en Angleterre: J'ai auſſi quelque part aux ſuites, mais après lui.

Autant que je me ſouviens de la lettre où M. *Deſcartes* veut rendre raiſon de la méthode de *maximis & minimis* de M. *Fermat*, il n'y dit rien qui n'ait déja été connu de celui-ci, & d'autres. Ce ne ſont que quelques commencemens fort éloignés du nouveau calcul, qui eſt toute autre choſe. Au lieu de prendre les grandeurs infinitéſimales pour O, comme MM. *Fermat*, *Deſcartes*, & même *Newton* & tous les autres ont fait, avant que mon *Algorithme des incomparables* ait paru dans les Actes de Leipzig, il faut ſuppoſer que les grandeurs ſont quelque choſe, qu'elles différent entr'elles, & qu'elles ſoient marquées de différente maniére dans l'analyſe nouvelle; car elles y ſeroient confondues, ſi elles étoient priſes pour des zéros: Je les prens donc, non pas comme des riens, ni même pour des infiniment petits à la rigueur, mais pour des quantités incomparablement ou indéfiniment petites, & plus que d'une grandeur donnée, ou aſſignable, inférieures à d'autres dont elles ſont les différences, ce qui rend l'erreur moindre qu'aucune erreur aſſignable, ou donnée, & par conſéquent elle eſt nulle.

Mes *Annales de l'Empire d'Occident* ne ſont pas ſeulement pour les Carlovingiens, je les ai déja pouſſées plus avant: Le R. P. *Daniel* a bien inſinué à mon avis que ſous les Carlovingiens il y avoit quelque choſe d'électif mêlé avec la ſucceſſion.

N°. LXXXII.

RECUEIL
DE DIVERSES PIECES,
SUR LA DISPUTE
ENTRE MM. LEIBNIZ ET NEWTON.

Tirées du Tom. II. du Recueil de Mr. Des Maiſeaux.

APOSTILLE

D'UNE LETTRE (a) DE MR. LEIBNIZ,

A Mr. l'Abbé CONTI.

VOila, Monſieur, la Lettre dont vous pourrez faire uſage ſi vous le jugez à propos. Je viens maintenant à ce qui nous regarde. Je ſuis ravi que vous ſoyez en Angleterre, il y a de quoi profiter, & il faut avouer qu'il y a là de très habiles gens; mais ils voudroient paſſer pour être preſque ſeuls inventeurs, & c'eſt en quoi apparemment ils ne réuſſiront pas. Il ne paroît point que Mr. *Newton* ait eu avant moi la Caractériſtique & l'Algorithme infiniteſimal, ſuivant ce que Mr. *Bernoulli* a très bien jugé, quoiqu'il lui auroit été fort aiſé d'y parvenir s'il s'en fût aviſé; comme il auroit été fort aiſé à *Apollonius* de parvenir à l'Analyſe de *Deſcartes* ſur les Courbes, s'il s'en étoit aviſé. Ceux qui ont écrit contre moi n'ayant pas fait difficulté d'attaquer ma candeur, par des interprétations forcées & mal fondées, ils n'auront pas le plaiſir de me voir répondre à de petites raiſons de gens qui en uſent ſi mal, & qui d'ailleurs s'écartent du fait. Il s'agit du Calcul des Différences, & ils ſe jettent ſur les *Séries*, où Mr. *Newton* m'a précédé ſans difficulté; mais je trouvai enfin une méthode générale pour les *Séries*, & après cela je n'eus plus beſoin de recourir à ſes extractions. Ils auroient mieux fait de donner les Lettres entiéres, comme Mr. *Wallis* a fait, avec mon conſentement, & il n'a pas eu la moindre diſpute avec moi, comme ces gens-là voudroient le perſuader au Public. Mes Adverſaires n'ont publié du *Commercium Epiſtolicum* de Mr. *Collins* (b,) que ce qu'ils ont cru capable de recevoir leurs mauvaiſes interprétations. Je fis connoiſſance avec Mr. *Collins* dans mon ſecond voyage d'Angleterre; car au premier (qui dura très peu, parce que j'étois venu avec un Miniſtre public) je n'avois pas encore la moindre connoiſſance de la Géométrie avancée, & n'avois rien vu ni entendu du Commerce de Mr. *Collins* avec Meſſieurs *Gregory* & *Newton*; comme mes Lettres échangées avec Mr. *Oldenbourg* en ce tems-là, & quelque tems après, le font aſſez voir. Mais à mon ſecond voyage, Mr. *Collins* me fit voir une partie de ſon Commerce, & j'y re-

 mar-

(a) Cette lettre ſe trouve au Tom. V. p. 36.

(b) Mr. *Leibniz* parle de l'ouvrage intitulé: *Commercium Epiſtolicum D.* Johannis Collins, *& aliorum, de Analyſi promotâ: juſſu Societatis Regiæ in lucem editum*; imprimé en 1712. in 4.

marquai que Mr. *Newton* avouoit auſſi ſon ignorance ſur pluſieurs choſes ; & diſoit entr'autres, qu'il n'avoit rien trouvé ſur la dimenſion des curvilignes célébres, que la dimenſion de la Ciſſoïde; mais on a ſupprimé tout cela. Je ſuis fâché qu'un auſſi habile homme que Mr. *Newton* ſe ſoit attiré la cenſure de perſonnes intelligentes, en déférant trop aux ſuggeſtions de quelques flatteurs, qui l'ont voulu brouiller avec moi.

Sa Philoſophie me paroît un peu étrange, & je ne crois pas qu'elle puiſſe s'établir. Si tout Corps eſt grave, il faut néceſſairement, quoi que diſent ſes défenſeurs & quelque emportement qu'ils témoignent, que la *Gravité* ſoit une *qualité occulte ſcholaſtique*, ou l'effet d'un *miracle*. J'ai fait voir autrefois à Mr. *Bayle*, que tout ce qui n'eſt pas explicable par la nature des créatures eſt miraculeux. Il ne ſuffit pas de dire, Dieu a fait une telle loi de Nature, donc la choſe eſt naturelle ; il faut que la loi ſoit exécutable par les natures des créatures. Si Dieu donnoit cette loi, par exemple, à un corps libre de tourner à l'entour d'un certain centre, il faudroit, ou qu'il y joignit d'autres corps, qui par leur impulſion l'obligeaſſent de reſter toujours dans ſon orbite circulaire : ou qu'il mit un Ange à ſes trouſſes : ou enfin il faudroit qu'il y concourût extraordinairement ; car naturellement il s'écartera par la Tangente. Dieu agit continuellement ſur les Créatures par la conſervation de leurs natures, & cette conſervation eſt une production continuelle de ce qui eſt perfection en elles. Il eſt *Intelligentia ſupramundana*, parce qu'il n'eſt pas l'Ame du Monde, & n'a pas beſoin de *Senſorium*.

Je ne trouve pas le vuide démontré par les raiſons de Mr. *Newton*, ou de ſes ſectateurs ; non plus que la prétendue gravité univerſelle, ou les Atomes. On ne peut donner dans le vuide & dans les atomes, que par des vûes trop bornées. Mr. *Clarke* diſpute contre le ſentiment des Cartéſiens, qui croyent que Dieu ne ſauroit détruire une partie de la matiére pour faire un vuide ; mais je m'étonne qu'il ne voye point que ſi l'eſpace eſt une ſubſtance différente de Dieu, la même difficulté s'y trouve. Or de dire que Dieu eſt l'eſpace, c'eſt lui donner des parties. L'eſpace eſt quelque choſe ; mais comme le tems, l'un & l'autre eſt un ordre général des choſes. L'eſpace eſt l'ordre des coexiſtences, & le tems eſt l'ordre des exiſtences ſucceſſives. Ce ſont des choſes véritables, mais idéales, comme les nombres.

La Matiére même n'eſt pas une ſubſtance, mais ſeulement *ſubſtantiatum*, un phénomène bien fondé, & qui ne trompe point, quand on y procéde en raiſonnant ſuivant les loix idéales de l'Arithmétique, de la Géométrie, & de la Dynamique, &c. Tout ce que j'avance en cela paroît démontré. A propos de la Dynamique ou de la doctrine des forces, je m'étonne que Mr. *Newton* & ſes ſectateurs croyent que Dieu a ſi mal fait ſa Machine, que s'il n'y mettoit la main extraordinairement, la

Montre

Montre ceſſeroit bien-tôt d'aller. C'eſt avoir des idées bien étroites de la ſageſſe & de la puiſſance de Dieu. J'appelle *extraordinaire*, toute opération de Dieu, qui demande autre choſe que la conſervation des natures des Créatures. Ainſi, quoique je croye la Métaphyſique de ces Meſſieurs-là, *a narrow one* (c), & leur Mathématique aſſez *arrivable* (d), je ne laiſſe pas d'eſtimer extrêmement les Méditations Phyſico-Mathématiques de Mr. *Newton*; & vous obligeriez infiniment le public, Monſieur, ſi vous portiez cet habile homme à nous donner juſqu'à ſes conjectures en Phyſique. J'approuve fort ſa Méthode de tirer des Phénomènes ce qu'on en peut tirer ſans rien ſuppoſer, quand même ce ne ſeroit quelquefois que tirer des conſéquences conjecturales. Cependant quand les *Data* ne ſuffiſent point, il eſt permis (comme on fait quelquefois en déchifrant) d'imaginer des Hypothèſes; & ſi elles ſont heureuſes, on s'y tient proviſionnellement, en attendant que de nouvelles expériences nous apportent *nova Data*, & ce que *Bacon* appelle *experimenta crucis*, pour choiſir entre les Hypothèſes. Comme j'apprends que certains Anglois ont mal repréſenté ma Philoſophie dans leurs *Tranſactions*, je ne doute point qu'avec ce que je vous demande ici, je ne puiſſe être juſtifié. Je ſuis fort pour la Philoſophie expérimentale; mais Mr. *Newton* s'en écarte fort, quand il prétend que toute la matiére eſt peſante (ou que chaque partie de la matiére en attire chaque autre partie,) ce que les expériences ne prouvent nullement, comme Mr. *Huygens* a déja fort bien jugé. La matière gravifique ne ſauroit avoir elle-même cette peſanteur dont elle eſt la cauſe, & Mr. *Newton* n'apporte aucune expérience, ni raiſon ſuffiſante pour le vuide & les atomes, ou pour l'Attraction mutuelle, générale. Et parce qu'on ne ſait pas encore parfaitement & en détail comment ſe produit la gravité ou la force élaſtique, ou la magnétique &c. on n'a pas raiſon pour cela d'en faire des qualités occultes ſcholaſtiques, ou des miracles, mais on a encore moins raiſon de donner des bornes à la ſageſſe & à la puiſſance de Dieu, & de lui attribuer un *Senſorium*, & choſes ſemblables. Au reſte, je m'étonne que les ſectateurs de Mr. *Newton* ne donnent rien qui marque que leur Maître leur a communiqué une bonne Méthode. J'ai été plus heureux en Diſciples.

C'eſt dommage que Mr. le Chevalier *Wren*, de qui Mr. *Newton*, & beaucoup d'autres ont appris quand il étoit jeune, n'a pas continué de régaler le Public. Je crois qu'il eſt encore en vie. Il ſeroit bon de faire connoiſſance avec lui. Dans le tems qu'il étoit jeune, on ſe ſeroit moqué en Angleterre de la nouvelle Philoſophie de certains Anglois. Lui & Mr. *Flamſteed* avec Mr. *Newton*, ſont preſque le ſeul reſte du Siècle d'Or

(c) C'eſt-à-dire; *bornée.*

(d) C'eſt-à-dire, *commune* ou *ſuperficielle*, *à laquelle on peut facilement parvenir.*

d'Or d'Angleterre par rapport aux ſciences. Mr. *Whiſton* étoit en bon train ; mais un certain zèle étrange l'a jetté d'un autre côté. Je plains le public de cette perte. Depuis quelque tems on s'y eſt trop jetté dans les *Ghiribizzi Politici*, ou dans les Controverſes Eccleſiaſtiques. Il y a un François en Angleterre, nommé Mr. *de Moivre*, dont j'eſtime les connoiſſances Mathématiques. Il y a ſans doute d'autres habiles gens ; mais qui ne font point de bruit, & dont vous ſaurez ſans doute des nouvelles, Monſieur, & vous m'obligerez de m'en apprendre. Je ſerois bien aiſe d'apprendre comment on tire le Phoſphore de toute ſorte de Corps, par exemple, du Miel, du Seigle.

Pour tâter un peu le pouls à nos Analyſtes Anglois, ayez la bonté, Monſieur, de leur propoſer ce Problême, comme de vous-même, ou T. XXV. Fig. 87. d'un Ami : *Trouver une ligne B. C. D. qui coupe à angles droits toutes les courbes d'une ſuite déterminée d'un même genre : par exemple, toutes les Hyperboles AB, AC, AD, qui ont le même Sommet & le même Centre ; & cela par une voye générale.*

LETTRE DE Mr. LEIBNIZ,

A Mr. REMOND.

Vous aurez reçu par Mr. *Hullin* mon Traité Latin de l'Origine des François, & par la poſte mes Remarques ſur le Réfutateur du Père *Malebranche*, & enfin ma dépêche très ample à Mr. l'Abbé *Conti*, que je vous ai envoyée par le dernier Courier. Je trouve quelque choſe que je vous ſupplie, Monſieur, d'y ajouter en la lui envoyant.

I. J'ai oublié de nommer deux habiles hommes que je crois être à Londres, qui méritent d'être connus & ſont tous deux de mes Amis : Mr. *Sloane*, qui a un excellent Cabinet, & a exercé long-tems la fonction de Secretaire de la Societé Royale ; & Mr. *Wodward*, qui a fait de très belles recherches ſur les changemens du Globe de la Terre. Peut-être que Mr. l'Abbé *Conti* a déja fait connoiſſance avec eux.

II. Madame la Princeſſe de Galles me marque dans une Lettre que j'ai eu l'honneur de recevoir, qu'elle ſeroit bien aiſe que ma *Théodicée* fût traduite en Anglois. Mais ceux à qui elle en a parlé y font naître de la difficulté, & ont renvoyé la choſe à des gens partiaux pour Mr. *Newton*. Il y en a ſans doute aſſez d'autres capables d'une telle Traduction : je ne ſai ſi Mr. *de la Roche*, François, qui a écrit autrefois des Mémoires de Littérature en Anglois, écrit aſſez bien l'Anglois au jugement des connoiſſeurs, pour recourir à lui. En ce cas, je crois qu'il ſeroit homme à s'en

ſ'en charger; ſinon je m'imagine qu'on en trouveroit aſſez d'autres. L'habile M. *Wotton*, qui a écrit autrefois en Anglois également & ſavamment, & avec modération ſur les Anciens & Modernes, & ſur les progrès des Sciences, en ſeroit bien capable, ſi on l'y pouvoit porter; car je ſai qu'il ne mépriſe pas mes ſentimens. Mais enfin ſi quelques-uns ſavoient qu'ils feroient plaiſir à ſon Alteſſe Royale, en faiſant cette traduction, je crois qu'ils ſeroient ravis de l'entreprendre.

III. Si Mr. l'Abbé *Conti* n'eſt pas encore connu de Madame la Princeſſe de Galles, & s'il déſire cet honneur-là, il ſuffiroit qu'il s'en rapportât à moi. Il pourroit être introduit auprès d'elle, ou par l'entremiſe de Mr. *Querini* ſon compatriote, ou par celle de Madame la Comteſſe de la Lippe-Buckebourg, qui eſt une Comteſſe de l'Empire, fort aimée de Madame la Princeſſe; car elle a bien du mérite, & elle a auſſi de la bonté pour moi.

IV. On pourra ajouter quelque choſe à ma grande Apoſtille à Mr. l'Abbé *Conti*. Après ces mots *feront aſſez voir*, qui ſeront vers la fin de la premiére page de cette Apoſtille, ou guère loin du commencement de la ſeconde, on peut ajouter, *ce n'eſt qu'en France que j'y ſuis entré, & Mr.* Huygens *m'en a donné l'entrée.* Et à la fin du premier paragraphe, dans la ſeconde page après ces mots: *brouiller avec moi*, on peut ajouter, *la Societé Royale ne m'a point fait connoitre qu'elle voulût examiner l'affaire; ainſi je n'ai point été ouï; & ſi l'on m'avoit fait ſavoir les noms de ceux qu'on avoit nommés comme Commiſſaires, j'aurois pu m'expliquer, ſi j'en recuſois quelques-uns, & ſi j'en deſirois d'autres. C'eſt pourquoi les formalités eſſentielles n'ayant point été obſervées, la Societé a déclaré qu'elle ne prétend point avoir jugé définitivement entre Mr.* Newton *& moi.* Je ſuis &c.

REPONSE DE Mr. L'ABBE' CONTI

A Mr. LEIBNIZ.

J'Ai différé juſqu'à cette heure de répondre à vôtre Lettre, parce que j'ai voulu accompagner ma Réponſe de celle que Mr. *Newton* vient de faire à l'Apoſtille que vous y avez ajoutée. Je n'entrerai dans aucun détail à l'égard de la diſpute que vous avez avec Mr. *Keill*, ou plutôt avec Mr. *Newton*. Je ne puis dire qu'hiſtoriquement ce que j'ai vû, & ce que j'ai lû, & ce qu'il me manque encore de voir & de lire pour en juger comme il faut.

J'ai lu avec beaucoup d'attention, & ſans la moindre prévention, le

Commercium Epiſtolicum, & le petit Livre qui en contient l'*Extrait* (e). J'ai vu à la Societé Royale les papiers originaux des Lettres du *Commercium*: une petite Lettre écrite de votre main à Mr. *Newton* (f); l'ancien Manuſcrit que Mr. *Newton* envoya au Docteur *Barrow*, & que Mr. *Jones* a publié depuis peu (g).

De tout cela j'en infére, que ſi l'on ôte à la diſpute toutes les digreſſions étrangéres, il ne s'agit que de chercher, ſi Mr. *Newton* avoit le Calcul des Fluxions infinitéſimal avant vous, ou ſi vous l'avez eu avant lui. Vous l'avez publié le premier, il eſt vrai; mais vous avez avoué auſſi que Mr. *Newton* en avoit laiſſé entrevoir beaucoup dans les Lettres qu'il a écrites à Mr. *Oldenbourg* & aux autres. On prouve cela fort au long dans le *Commercium*, & dans ſon Extrait. Quelles ſont vos réponſes? Voilà ce qui manque encore au public, pour juger exactement de l'affaire.

Vos Amis attendent vôtre Réponſe avec beaucoup d'impatience; & il leur ſemble que vous ne ſauriez vous diſpenſer de répondre, ſi non à Mr. *Keill*, du moins à Mr. *Newton* lui-même, qui vous fait un défi en termes exprès, comme vous verrez dans ſa Lettre.

Je voudrois vous voir en bonne intelligence. Le public ne profite guère des diſputes, & il perd ſans reſſource pour bien des ſiècles, toutes les lumiéres que ces mêmes diſputes lui dérobent.

Sa Majeſté a voulu que je l'informaſſe de tout ce qui s'eſt paſſé entre Mr. *Newton* & vous. Je l'ai fait de mon mieux, & je voudrois que ce fût avec ſuccès pour l'un & pour l'autre.

Vôtre Problême a été réſolu fort aiſément en peu de tems. Pluſieurs Géométres à Londres & à Oxford en ont donné la ſolution. Elle eſt générale; car elle s'étend à toutes ſortes de Courbes ſoit Géométriques, ſoit Mécaniques. Le Problême eſt un peu équivoquement propoſé: mais je crois que Mr. *de Moivre* ne ſe trompe pas, en diſant qu'il faudroit fixer l'idée d'une ſuite de Courbes, par exemple, ſuppoſer qu'elles ayent la même ſoutangente pour la même abſciſſe: ce qui conviendra non-ſeulement aux Sections Coniques, mais à une infinité d'autres tant Géométriques

(e) C'eſt un Ecrit de 38. pages in 8. intitulé, *Extrait du Livre intitulé*; Commercium Epiſtolicum Collinii & aliorum de Analyſi promota: *publié par ordre de la Societé Royale, à l'occaſion de la diſpute élevée entre Mr.* Leibniz *& le Dr.* Keil, *ſur le droit d'invention à la Méthode des Fluxions, appellée par quelques-uns* Méthode différentielle.

(f) On la trouvera ci-après dans l'*Appendix* qui eſt à la fin des *Remarques de Mr.* Newton *ſur la Lettre de Mr.* Leibniz *à Mr. l'Abbé* Conti.

(g) Ce Manuſcrit, intitulé *de Analyſi per Æquationes infinitas*, a été publié en 1711. par M. *Jones*, dans le Recueil qui a pour titre, *Analyſis per Quantitatum Series, Fluxiones, ac Differentias: cum numeratione Linearum tertii ordinis*, in 4.

triques que Mécaniques; on pourroit encore faire d'autres ſuppoſitions pour fixer cette idée.

Je vous parlerai une autre fois de la Philoſophie de Mr. *Newton.* Il faut convenir auparavant de la Méthode de philoſopher, & diſtinguer avec beaucoup de ſoin la Philoſophie de Mr. *Newton*, des conſéquences que pluſieurs en tirent fort mal-à-propos. On attribue à ce grand homme bien des choſes qu'il n'admet pas; comme il l'a fait voir à ces Meſſieurs François qui vinrent à Londres, à l'occaſion de la grande Eclipſe.

Lorſque Mr. le Baron *Diſcau* reviendra de Pologne, je me donnerai l'honneur de vous entretenir plus ſouvent, & vous ſerez peut-être bien aiſe de ſavoir ce qui ſe paſſe dans une Ville, où les Savans ſont en ſi grand nombre, & où les Sciences & les Arts fleuriſſent plus que jamais.

Je vous remercie très-humblement de la Lettre ſur le Syſtême de Mr. *Nigriſoli.* La queſtion n'eſt pas des plus importantes, ni le Philoſophe des plus ſavans; mais quelquefois il faut céder au tems, & aux inſtances de ſes Amis. Je ſuis &c.

A Londres le ... de Mars 1716.

LETTRE

De Mr. le Chevalier NEWTON, à Mr. l'Abbé CONTI, *Servant de Réponſe* à l'Apoſtille de Mr. LEIBNIZ.

A Londres le 26. Février 1716. *V. S.*

VOus ſavez que le *Commercium Epiſtolicum* contient les Lettres, & autres papiers de vieille date, qui ont quelque rélation à la Diſpute agitée entre M. *Leibniz* & Mr. *Keil*, & qui ont été conſervés dans les Archives de la Societé Royale, ou dans la Bibliothéque de Monſieur *Collins.* Vous ſavez qu'ils ont été ramaſſés & publiés par un Committé nombreux de perſonnes diſtinguées de pluſieurs Nations, aſſemblé exprès par ordre de la Societé Royale. Mr. *Leibniz* juſqu'à préſent a refuſé d'y répondre, ſachant bien qu'il eſt impoſſible de répondre à des matiéres de fait. Pour prétexte de ſon ſilence il allégua d'abord qu'il n'avoit point vu ce Livre, & qu'il n'avoit pas le loiſir de l'examiner; mais qu'il avoit prié un Mathématicien fameux de vouloir bien ſe charger de ce ſoin. La Réponſe du Mathématicien, ou prétendu Mathématicien, datée du 7. Juin 1713. fut inſérée dans une Lettre diffamatoire, datée du 29. Juillet de la même année, & publiée en Allemagne, ſans que le nom de l'Auteur, ni de l'Imprimeur, ni le lieu de l'impreſſion y fuſſent

 marqués.

marqués. Le tout a été depuis traduit en François, & inſéré dans une autre Lettre du ſtyle de la premiére, & apparemment du même Auteur; à laquelle Mr. *Keil* répondit en Juillet 1714. (h) Mais on n'a pas encore repliqué à cette réponſe.

Monſieur *Leibniz* met à préſent un nouveau prétexte en uſage, pour éviter de répondre; c'eſt qu'il ne veut pas que les Anglois ayent le plaiſir de voir répondre à leurs petites raiſons. Cependant, pour me donner le change, il tâche de m'engager dans des diſputes Philoſophiques, & me propoſe des problêmes à reſoudre; mais ces diſputes & ces problêmes n'ont aucun rapport à l'affaire dont il s'agit.

Si l'on vouloit examiner ſa Philoſophie, il ne ſeroit pas difficile de faire voir qu'il détourne la ſignification des mots de leur uſage ordinaire: lors, par exemple, qu'il appelle *Miracles* les choſes qui arrivent dans le cours ordinaire de la Nature; qu'il donne le nom de *Qualités occultes* aux choſes dont les cauſes ne ſont pas inconnues; & qu'il appelle *Ame*, ce qui n'anime pas le corps de l'homme.

On pourroit faire voir que ſon *Harmonie préétablie* eſt un véritable miracle, & qu'elle eſt contraire à l'expérience de tous les hommes; chaque individu ayant en ſoi la puiſſance de voir par ſes propres yeux, & de mouvoir ſon corps comme il lui plaît. On pourroit lui reprocher juſtement qu'il préfére les hypothèſes aux argumens d'induction, tirés des expériences; qu'il m'accuſe d'avoir des opinions qui ne ſont point miennes; & qu'au lieu de propoſer des queſtions dont l'examen ſoit ſoumis aux expériences, avant qu'elles ſoient admiſes en Philoſophie, il propoſe des hypothèſes, qu'il veut que l'on admette avant qu'elles ſoient examinées. Mais cela ne regarde point le *Commercium Epiſtolicum.*

Il ſe plaint que le Commité a agi d'une maniére partiale, en omettant certaines choſes qui ne m'étoient pas favorables, mais il ne prouve pas ſon accuſation. A la vérité, il cite un paſſage d'une de mes Lettres qu'il dit avoir été omis, par lequel je confeſſois mon ignorance; cependant ce paſſage ſe trouve à la page 74. du *Commercium lin.* 10. 11. & je n'ai pas honte de cet aveu. Mais puiſque Mr. *Collins* lui fit voir ce paſſage, lorſqu'il étoit à Londres pour la ſeconde fois, c'eſt-à-dire au mois d'Octobre 1676, il s'enſuit qu'il vit la Lettre où ce paſſage étoit contenu, laquelle Lettre étoit datée du 24. Octobre 1676. Or dans cette Lettre, & dans quelques autres écrites avant ce tems-là, on voit une deſcription de ma Méthode des Fluxions. Dans cette même Lettre j'avois décrit auſſi deux méthodes générales pour les *Suites*, ſur l'une deſquelles Mr. *Leibniz* forme à préſent des prétentions.

Je

(h) Les *Lettres* dont Mr. *Newton* ſe plaint ici, parurent en François dans le Tome II. du *Journal Littéraire*, page 444. & ſuiv. & la *Réponſe* de Mr. *Keil* fut inſérée dans le Tome IV. du même Journal, page 319. & ſuiv.

Je m'aſſure que vous croyez qu'il eſt raiſonnable que Mr. *Leibniz* ne ſe démente point, qu'il reconnoiſſe à préſent ce qu'il reconnoiſſoit il y a plus de quinze ans, & qu'il ne nie point ce qu'il accordoit alors.

Par une Lettre du 20. Mai 1675, il reconnoiſſoit avoir reçu une Lettre de Mr. *Oldenbourg* datée du 15. Avril 1675, dans laquelle étoient incluſes pluſieurs *Suites* convergentes, & je m'attends qu'il voudra bien le reconnoître encore. Pluſieurs perſonnes diſtinguées d'Italie, de France & d'Allemagne, du nombre deſquelles vous étiez, ont vu les Lettres originales, & les copies qui en ont été faites, & qui ont été recueillies dans le portefeuille des Lettres de la Societé Royale: il ne peut donc pas diſconvenir qu'il n'ait vu la *Suite* de *Gregory*: laquelle ſe trouve inſérée dans ladite Lettre de Mr. *Oldenbourg* du 15. Avril 1675. & dans la Lettre originale de *Gregory*, dattée du 15. Février 1671.

Dans une Lettre du 12. May 1676, laquelle a été vue par les mêmes perſonnes, il reconnoiſſoit qu'il n'avoit pas la Méthode de trouver la ſuite qui donne l'Arc par le moyen du Sinus, ni celle qui donne le Sinus par le moyen de l'Arc; c'étoit donc reconnoître qu'il ne l'avoit pas dans le tems qu'il écrivoit la Lettre du 26. Octobre 1674. Je m'attends à préſent qu'il voudra bien le reconnoître encore.

Dans une Réponſe faite par lui à Mr. *Fatio*, & imprimée dans les Actes de Leipſic pour le mois de May 1700, ſur ce que Monſieur *Fatio* avoit dit que j'étois le premier Inventeur, & que la date de mon invention étoit antécédente à celle de Mr. *Leibniz* de pluſieurs années; Monſieur *Leibniz* reconnoît qu'il ne ſache pas qu'il y ait eu perſonne qui ait poſſédé la méthode des Fluxions ou des différences avant moi & lui; & que perſonne n'avoit donné des preuves par aucun Ouvrage rendu public, qu'il eût poſſédé cette méthode. Il avoue donc ici, que j'avois cette méthode avant qu'elle eût été publiée, & avant qu'il l'eût communiquée en Allemagne à qui que ce fût. Il avoue que mon livre des *Principes* étoit une preuve que j'avois cette méthode, & que ce livre contenoit les premiers eſſais rendus publics de l'application qu'on en pouvoit faire aux Problêmes les plus difficiles. Je m'attends donc qu'il continuera toujours à le reconnoître. Il ne nioit point alors ce que Mr. *Fatio* avoit avancé; s'il le nie à préſent, on en pourra conclure qu'il agit de mauvaiſe foi.

Dans une de ſes Lettres du 7. May 1693, dépoſée à préſent dans les Régîtres de la Societé Royale, on peut voir le paſſage qui ſuit: *Mirificè ampliaveras Geometriam tuis Seriebus, ſed edito Principiorum Opere oſtendiſti patere tibi quæ Analyſi receptæ non ſubſunt. Conatus ſum ego quoque, Notis commodis adhibitis quæ Differentias & Summas exhibent, Geometriam illam quam Tranſcendentem appello, Analyſi quodammodo ſubjicere; nec res malè proceſſit.* Ce qu'il m'accordoit alors, il doit donc encore me l'accorder.

Dans ſa Lettre du 21. Juin 1677, écrite pour réponſe à la mienne du 24. Octobre 1676. il dit, qu'il convenoit avec moi que la méthode de *Sluſius*, pour les Tangentes, n'étoit pas encore parfaite; ſur quoi il décrit ſa méthode différentielle pour les Tangentes, qui étoit la même que celle qui avoit été publiée par Mr. *Barrow* en 1670. Mais comme il prétendoit que cette méthode lui appartenoit, il la déguiſa ſous une Notation nouvelle, & fit voir qu'on pouvoit la pouſſer plus loin, & l'amener juſqu'au niveau de la méthode que j'avois décrite. D'où il concluoit, que ſa méthode ne différoit pas beaucoup de la mienne, puiſque entr'autres choſes elle facilitoit les Quadratures. Il publia les Elémens de ſa méthode dans les Actes de Leipſic pour le mois d'Octobre 1684. à quoi il ajouta qu'elle s'étendoit aux Problêmes les plus difficiles, leſquels ne pouvoient pas être réſolus facilement ſans l'aide de cette méthode, ou de quelque autre ſemblable. Il reconnoiſſoit donc en ce tems là, que lorſque j'écrivis la Lettre mentionnée ci deſſus du 24. Octobre 1676. j'avois une méthode qui s'étendoit auſſi loin que la ſienne; c'eſt pourquoi il doit ſelon la juſtice le reconnoître encore, d'autant plus que les chiffres de cette Lettre ſont à préſent expliqués, auſſi-bien que certaines autres choſes qui ont du rapport à cette méthode, & que l'abrégé dont il eſt là fait mention, eſt rendu public.

Il marquoit dans ſa Lettre du 27. Août 1676. qu'il ne croyoit pas que mes méthodes fuſſent auſſi générales que je l'aſſûrois dans ma Lettre du 13. de Juin précédent; & qu'il y avoit des Problêmes ſi difficiles, & qu'ils ne dépendoient ni des Equations ni des Quadratures, tel qu'étoit entr'autres le Problême inverſe des Tangentes. On voit par ces paroles, qu'il reconnoiſſoit n'avoir pas encore trouvé la réduction des problêmes aux Equations différentielles. Ce qui étoit pour lors reconnu par lui, eſt encore reconnu dans les Actes de Leipſic du mois d'Avril 1691. p. 198. & doit ſelon l'équité l'être encore aujourd'hui.

Le Docteur *Wallis*, dans la Préface des deux premiers volumes de ſes Oeuvres, publiées en 1695, marque que dans mes deux Lettres écrites en 1676. j'avois expliqué à Monſieur *Leibniz* la méthode appellée par moi la méthode des Fluxions, & par lui la méthode différentielle; & que j'avois inventé cette méthode dix ans auparavant ou plus tôt, (c'eſt-à-dire, dans l'année 1666. ou avant.) Et Monſieur *Leibniz* ayant eu un commerce de Lettres avec le Docteur *Wallis* depuis ce tems là, & n'ayant point contredit ce qu'il avoit avancé, & même n'y ayant point trouvé à redire, je m'attends qu'à préſent il y voudra bien encore acquieſcer.

Mais comme depuis quelque tems il m'a intenté une accuſation, qui va à me vouloir faire paſſer pour plagiaire, s'il perſiſte dans ſon accuſation, il eſt obligé, ſelon les loix établies, de la prouver, à peine de paſſer pour coupable de calomnie. Il s'eſt contenté juſqu'ici d'écrire à ceux

ceux avec qui il eſt en commerce, des Lettres pleines d'affirmations, de plaintes & de réflexions qui ne prouvent rien; mais il eſt l'aggreſſeur, & il eſt obligé de prouver ce dont il m'accuſe.

Je m'abſtiens d'entrer dans un plus grand détail; vous pouvez être inſtruit du tout dans le *Commercium*, & dans l'abrégé qui en a été fait; c'eſt pourquoi vous trouverez bon que je vous y renvoye. Je ſuis, &c.

LETTRE DE MR. LEIBNIZ,

A Mr. l'Abbé CONTI.

Hanover ce 14. *Avril* 1716.

POur ne vous point faire attendre, je vous dirai par avance que j'ai répondu d'abord à l'honneur de votre Lettre, & en même tems à celle que Mr. *Newton* vous a écrite; & que j'ai envoyé le tout à Mr. *Remond* à Paris, qui ne manquera pas de vous le faire tenir. Je me ſuis ſervi de cette voye, pour avoir des témoins neutres & intelligens de notre diſpute: & Mr. *Remond* en fera encore part à d'autres. Je lui ai envoyé en même tems une copie de votre Lettre, & de celle de Mr. *Newton.* Après cela vous pourrez juger, ſi la mauvaiſe chicane de quelques-uns de vos nouveaux amis m'embarraſſe beaucoup.

Quant au Problême dont quelques-uns parmi eux ont voulu réſoudre des cas particuliers, pour en fixer, diſent-ils, les idées, il y a de l'apparence qu'ils ſe ſeront jettés ſur des cas faciles, car il y en a dans les Courbes tranſcendantes auſſi-bien que dans les ordinaires; mais il s'agit d'une ſolution générale. Ce Problême n'eſt point nouveau; Mr. *Jean Bernoulli* l'a déja propoſé dans le mois de May des Actes de *Leipſic* 1697. p. 211. Et comme Mr. *Fatio* mépriſoit ce que nous avions fait, on en répéta la propoſition pour lui & pour ſes ſemblables dans les Actes de May 1700. pag. 204. Il peut ſervir encore aujourd'hui à faire connoître à quelques-uns, s'ils ſont allés auſſi avant que nous en Méthodes; en attendant qu'ils trouvent le moyen de parvenir à la ſolution générale, ils pourront eſſayer ce qu'ils peuvent en fixant les idées ſur un cas particulier, qu'on leur propoſe dans le papier ci joint. Sa ſolution vient encore du même Mr. *Bernoulli.* Ainſi vous aurez la bonté de ne pas vous rendre trop tôt aux inſinuations de ceux qui nous ſont contraires, comme lorſqu'ils vous ont fait accroire que notre Problême leur étoit aiſé. Je ſuis &c.

PROBLEMA *continens caſum ſpecialem Problematis generalis de inveniendа ſerie Curvarum, quarum qualibet ſit ad aliam ſeriem Curvarum perpendicularis.*

Super recta A G tanquam axe ex puncto A, conſtructis Curvis quotcumque, T. XXV. Fig. 88.

que, qualis eſt A B D, ejus naturæ ut radius oſculi ex ſingulis ſingularum Curvarum punctis B eductus B O ſecetur ab axe A G in C in data ſemper conſtante ratione, ut nempe ſit B O: ad B C ut ad N. Conſtruendæ jam ſunt trajectoriæ qualis eſt E N F, priores Curvas A B'D ſecantes ad angulos rectos.

LETTRE DE MR. LEIBNIZ,

A Madame la Comteſſe De KILMANSEGG.

Hanover ce 18. *Avril* 1716.

MADAME,

JE ſuis bien aiſe que des Dames auſſi éclairées que vous l'êtes, prennent connoiſſance de ma controverſe avec Mr. *Newton.* Si vous ne voulez pas prendre la peine de pénétrer dans l'embarras des figures des Calculs, dont vous ſeriez capable de venir à bout, autant que qui que ce ſoit, vous pénétrerez aſſez dans l'hiſtorique pour n'être point ſurpriſe: & vous autres Dames Hanoveriennes, à Londres ou ici, vous ne devez point être fâchées, ce ſemble, qu'il y ait quelque choſe, en quoi Hanover, tout petit qu'il eſt, ne céde point au grand Londres. Il céde en grandeur, en richeſſes, en tout ce qu'il vous plaira, mais non pas en affection pour le Roi, ni par rapport au mérite des Dames, ni en Géométrie. Voici le fait.

Etant venu en France l'an 1672. jeune garçon, comme il eſt aiſé de croire, j'apportai de nos Univerſités de toutes autres connoiſſances, que celle de la profonde Géométrie. Le Droit & l'Hiſtoire étoient mon fait. Je me plaiſois pourtant à la Mathématique pratique, & je m'étois un peu exercé aux propriétés des Nombres, ayant publié un petit livre ſur l'Art des Combinaiſons dès l'an 1666, & je fis même une remarque conſidérable ſur les différences des ſuites (ou *ſeries*) des Nombres, où d'autres n'avoient pas aſſez pris garde. A Paris je me fourrois dans les grandes Bibliothéques; & je cherchois des Pièces rares, ſur-tout en Hiſtoire; mais je ne laiſſois pas de donner encore quelque tems aux curioſités de Mathématique. Je fis un tour à Londres, & m'y trouvant au commencement de l'année 1673, quoique je n'y fiſſe point un long ſéjour, je ne laiſſai pas de faire connoiſſance avec Mr. *Oldenbourg*, Secrétaire de la Societé des Sciences, que le Roi *Charles II.* avoit érigée: & comme j'aimois un peu la Chymie, je pratiquai auſſi Mr. *Boyle*, chez qui je rencontrai un jour un Mathématicien, nommé Mr. *Pell*; & lui ayant conté une certaine obſervation que j'avois faite ſur les Nombres, il m'apprit qu'un Holſteinois, qui ſe trouvoit à Londres, nommé Mr. *Mercator*, l'avoit faite auſſi dans un livre publié depuis peu ſur la figure qui s'apelle

s'apelle Hyperbole. Je cherchai ce livre, & je l'apportai avec moi en France.

Comme j'y pratiquai Mr. *Huygens* de Zulichem, inventeur du Syſtême de Saturne & des Pendules, & grand Géométre, je commençai à prendre goût aux méditations Géométriques. J'y avançai en peu de tems, & trouvai une ſuite de Nombres (ou *ſéries*) qui faiſoit pour le Cercle ce que celle de *Mercator* avoit fait pour l'Hyperbole. La découverte fit du bruit à Paris. Mr. *Huygens* la fit valoir; & cela joint à d'autres raiſons, fit qu'on me deſtina une place dans l'Académie Royale des Sciences. Nous crumes que j'étois le premier qui avoit fait quelque choſe de tel ſur le Cercle; & j'en écrivis ſur ce ton-là à Mr. *Oldenbourg* en 1674. avec qui auparavant je ne m'étois point entretenu de telles choſes, quoique nous euſſions déja échangé pluſieurs Lettres. Mr. *Oldenbourg* m'écrivit qu'un Mr. *Newton* à Cambridge avoit déja donné des choſes ſemblables, non-ſeulement ſur le Cercle, mais encore ſur toutes ſortes d'autres figures, & m'en envoya des eſſais. Cependant le mien fut aſſez applaudi par Mr. *Newton* même. Il s'eſt trouvé dans la ſuite, qu'un nommé Mr. *Gregory* avoit trouvé juſtement la même *ſéries* que moi. Mais c'eſt ce que j'appris tard.

Mais ce n'eſt pas de quoi il s'agit: car j'allai plus avant, & joignant mes anciennes obſervations ſur les différences des Nombres à mes nouvelles méditations de Géométrie, je trouvai environ en 1676. (autant qu'il m'en peut ſouvenir) un nouveau Calcul, que j'appellai *le Calcul des Différences*, dont l'application à la Géométrie produiſoit des merveilles. Mais devant retourner en Allemagne, où feu Monſeigneur le Duc *Jean Frederic*, Oncle de notre Roi, m'avoit appellé la même année, & voulant profiter du peu de ſéjour qui me reſtoit à Paris, on peut bien juger que je n'eus point le tems de demeurer long-tems dans mon cabinet, & de méditer beaucoup. Pour faire valoir d'abord ma nouvelle découverte, je paſſai par l'Angleterre & par la Hollande. Etant à Londres, mais très peu de jours, je fis connoiſſance avec Mr. *Collins*, qui me montra pluſieurs Lettres de Mr. *Newton*, de Mr. *Gregory* & d'autres, qui rouloient principalement ſur les *ſéries*. Etant arrivé à Hanover je reçus de Mr. *Oldenbourg* en 1677. une Lettre que Mr. *Newton* lui avoit écrite pour m'être communiquée, où il diſoit pouvoir mener les Tangentes d'une figure donnée ſans ôter les irrationelles, & auſſi réciproquement, qu'il avoit deux Méthodes pour trouver la figure propre aux Tangentes d'une nature donnée, & il cacha l'une & l'autre ſous des lettres tranſpoſées. Je répondis à Mr. *Oldenbourg*, par une Lettre donnée à Hanover le 21. de Juin 1677, & je lui envoyai ma méthode, que je jugeois fournir tout ce que Mr. *Newton* promettoit des ſiennes en énigme.

Les choſes en demeurérent là, & j'eus quelque loiſir de pouſſer mes mé-

méditations, tant ſur ces matiéres que ſur d'autres. Quelques années après, des Amis à *Leipſic*, de concert avec moi, commencérent un Journal des Savans en Latin, qui ſe devoit donner tous les mois, & qui a toujours été continué depuis. Je m'engageai d'y fournir quelque choſe de tems en tems. Cela commença en 1682. Je publiai alors ma *ſéries* pour le Cercle dont j'ai parlé ci-deſſus. En 1684, je publiai le nouveau Calcul des différences, que j'avois inventé & gardé preſque neuf ans ſans me preſſer de le publier. Cette invention, dont on reconnut l'uſage par l'application à des queſtions difficiles, fit du bruit. Le Marquis *de l'Hoſpital*, Vice-Préſident de l'Académie des Sciences à Paris, fit un livre exprès là-deſſus. On s'en ſervit en France, en Italie, & même en Angleterre. Mais perſonne ne s'y ſignala davantage que Meſſieurs *Bernoulli* en Suiſſe.

En 1687. Mr. *Newton* publia ſon Livre intitulé : *Principes Mathématiques de la Nature.* Il dit en Latin page 253. 254. ce qui donne ce ſens en François : *Dans le Commerce de Lettres que j'ai eu il y a dix ans* (*par l'entremiſe de Mr.* Oldenbourg) *avec Mr.* Leibniz, *très habile Géométre, lorſque je lui fis ſavoir que j'avois une méthode de déterminer les quantités les plus grandes ou les plus petites, de mener des Tangentes, & d'effectuer d'autres choſes ſemblables en termes ſourds auſſi bien qu'en termes rationaux; que je cachai ſous des letres tranſpoſées, qui renfermoient ce ſens :* „ une » équation donnée, qui contient des quantités fluentes, trouver les Flu» xions, & réciproquement : « *ce célébre perſonnage me répondit, qu'il étoit tombé ſur une Méthode, qui faiſoit auſſi cet effet, & la communiqua; qui ne différoit guére de la mienne, que dans les termes, & dans les caractères.* Ainſi, Mr. *Newton* ne me conteſta point d'avoir trouvé la choſe de mon chef. J'eus auſſi l'honnêteté de dire publiquement, & de faire dire à mes Amis, que je croyois que Mr. *Newton* avoit eu de ſon chef quelque choſe de ſemblable à mon invention.

Mais en 1711. que j'étois depuis environ 27. ans en poſſeſſion de l'invention, il y eut des gens en Angleterre, qui pouſſés, ce me ſemble, par des mouvemens d'envie, s'aviſérent de me la conteſter. On prit pour prétexte certaines paroles du Journal de Leipſic de l'an 1705. qu'on expliquoit malignement, comme ſi elles diſoient que Mr. *Newton* l'avoit priſe de moi, quoiqu'il n'y ait pas un mot qui le diſe. Là-deſſus on m'accuſa, par une eſpèce de retorſion prétendue, d'avoir plutôt appris la choſe de Mr. *Newton.* On porta la Societé Royale de Londres à donner commiſſion à certaines perſonnes d'examiner les vieux papiers ſans m'en donner aucune part, & ſans ſavoir ſi je ne recuſerois point quelques Commiſſaires, comme partiaux. Et ſous prétexte du rapport de cette Commiſſion, on publia un livre contre moi en 1711. ſous le titre de *Commerce Epiſtolique*, où l'on inſéra des vieux papiers, & des anciennes

nes lettres, mais en partie tronquées; & on ſupprima celles qui pouvoient faire contre Mr. *Newton*. Et ce qui eſt le pis, on y ajouta des remarques pleines de fauſſetés malignes, pour donner un mauvais ſens à ce qui n'en avoit point. Mais la Societé Royale n'a point voulu prononcer là-deſſus, comme j'ai appris par un extrait de ſes Regîtres: & pluſieurs perſonnes de mérite en Angleterre (même des Membres de la Societé Royale) n'ont point voulu prendre aucune part à ce qui s'eſt fait contre moi.

On me manda la nouvelle de la publication de ce livre, avant que le livre me fût rendu; & ayant ſu qu'on en avoit envoyé un exemplaire au célébre Mr. *Jean Bernoulli*, qui connoiſſoit à fond l'invention dont il s'agiſſoit, & l'avoit fait valoir mieux que perſonne par de belles découvertes, & qui étoit tout-à-fait impartial, je le priai de m'en dire ſon ſentiment. Il me répondit par une lettre dattée de Bâle le 7. de Juin 1713. dont voici l'extrait traduit en François.

» Il paroît que Mr. *Newton* a fort avancé par occaſion la doctrine des » *Séries*, en ſe ſervant de l'extraction des racines, qu'il y a employée le » premier. Et il ſemble qu'il y a mis toute ſon étude au commencement, » ſans avoir ſongé à ſon *Calcul des Fluxions*, ou *des Fluants*, ou à la ré- » duction de ce calcul à des opérations analytiques générales en forme » d'Algorithme ou de régles Arithmétiques ou Algébraïques. Ma conjec- » ture eſt appuyée ſur un indice très fort. C'eſt que dans toutes les let- » tres du *Commerce Epiſtolique*, on ne trouve pas la moindre trace, » ni ombre des lettres comme x, ou y, pointées d'un, deux, trois ou » pluſieurs points mis deſſus, qu'il employe maintenant à la place de dx, » ddx, $dddx$; dy, ddy, $dddy$ &c. Et même dans l'Ouvrage des Prin- » cipes Mathématiques de la Nature, où il y avoit ſi ſouvent occaſion » d'employer ſon Calcul des Fluxions, il n'en dit pas un mot, & on ne » voit aucune de ces marques; & tout s'y fait par les lignes des figu- » res, ſans aucune certaine Analyſe déterminée, mais ſeulement d'une » maniére qui a été employée non-ſeulement par lui, mais encore par » Mr. *Huygens*, & même en quelque façon par *Torricelli*, *Roberval*, » *Cavalieri*, & autres. Ces lettres pointées n'ont paru que dans le 3e. » volume des Oeuvres de Mr. *Wallis*, pluſieurs années après que le Cal- » cul des différences fut déja reçu par-tout. Un autre indice, qui fait » conjecturer que le Calcul des Fluxions n'eſt point né avant celui des » différences, eſt que la véritable maniére de prendre les Fluxions, c'eſt- » à dire, de différencier les différences, n'a pas été connue à Mr. *New- » ton*. C'eſt ce qui eſt manifeſte par ces *principes Mathématiques*, où non- » ſeulement l'accroiſſement conſtant de la grandeur x, qu'il marqueroit » à préſent par un point, eſt marqué par un o; mais même une fauſſe » régle eſt donnée pour les degrés ultérieurs des différences. Par où l'on

» peut juger, qu'au moins la véritable maniére de différencier les diffé-
» rences ne lui a point été connue, quand elle étoit déja fort en uſage
» auprès d'autres. «

On publia cette Lettre; & je crus avec raiſon pouvoir oppoſer ce jugement à celui de tous ceux qui pourroient approuver la maniére dont on en avoit uſé contre moi dans la publication du livre intitulé *Commerce Epiſtolique*: Et ne pouvant répondre à ce livre de point en point, & en même tems d'une maniére digne de moi, ſans faire un autre livre plus gros, & y employer bien du tems, parce que j'aurois tâché de faire ſentir aux adverſaires, qu'il leur manque encore quelque choſe, je m'en diſpenſai pour lors, ayant des occupations plus néceſſaires & preſque indiſpenſables; outre que j'avois appris d'ailleurs que leur livre ne faiſoit guéres d'impreſſion dans le monde. Mais il eſt arrivé par hazard, qu'on leur donne un os à ronger. Mr. *Bernoulli* avoit propoſé un Problême dans un Journal de Leipſic (i), & on y inſiſta dans un autre Journal de Leipſic (k), pour ceux qui mépriſent nos méthodes & s'en font accroire. On l'a répété maintenant pour ceux qui prétendent que la méthode des Fluxions de Mr. *Newton* leur ſuffit. Quelques-uns s'y ſont appliqués, mais on ne croit pas juſqu'ici qu'ils en viennent aiſément à bout.

Enfin depuis quelques ſemaines Mr. *Newton* a paru lui-même contre moi, par une lettre écrite à un ami. Elle m'a été communiquée, & j'ai fait paſſer ma réponſe par la voye de France, afin que ce qui ſe fait entre nous ſoit connu des perſonnes neutres & intelligentes.

Voilà, Madame, l'Hiſtoire de nôtre controverſe, qui ne peut manquer de vous ennuyer. Mais on ne pouvoit pas vous en donner une pleine information ſans s'étendre; & on ne ſauroit éviter que les Juges ne bâillent quelquefois, quand ils ont à prendre connoiſſance de procès auſſi longs & auſſi grands que le nôtre. Mais ſi les Spectateurs ne s'ennuyoient pas, ils prendroient trop de plaiſir: ils ſe divertiroient à nos dépens. Pour moi, je ne veux pas me mettre en colére pour vous faire rire, vous & vos amies. Vous pouvez faire (ſans comparaiſon) comme un Cordonnier à Leyde, dont j'ai mis autrefois l'hiſtoire dans une épigramme Latine. Quand on diſputoit des Thèſes à l'Univerſité, il ne manquoit jamais de ſe trouver à la Diſpute publique. Enfin quelqu'un qui le connoiſſoit lui demanda s'il entendoit le Latin? *Non*, dit-il, *& je ne veux pas même me donner la peine de l'entendre.* » Pourquoi venez-
» vous donc ſi ſouvent dans cet Auditoire, où l'on ne parle que Latin?
» *C'eſt que je prends plaiſir à juger des coups.* „ Et comment en jugez-
» vous ſans ſavoir ce qu'on dit? *C'eſt que j'ai un autre moyen de juger,*
» *qui a raiſon.* » Et comment? *C'eſt que quand je vois à la mine de quelqu'un*

(i) May 1697. (k) May 1700.

» *qu'un qu'il ſe fâche, & qu'il ſe met en colére, je juge que les raiſons lui*
» *manquent.* «

Il vous ſeroit aiſé, Madame, à vous & à votre Correſpondante (1) de ſavoir la Géométrie, auſſi-bien que nous; mais vous ne voulez pas en prendre la peine, & vous en voulez cependant juger en vous divertiſſant. Quoi qu'il en ſoit, je crois avoir fourré ici de quoi vous donner le moyen de prendre connoiſſance du point hiſtorique, ſans que vous ayez beſoin d'entrer dans la Géométrie; & du moins vous me trouverez aſſez réſolu, & aſſez gai pour un plaideur. Les Lettres que nous échangeons Mr. *Newton* & moi, vous inſtruiront du reſte. Je ſuis avec reſpect, &c.

APOSTILLE

D'UNE LETTRE DE MR. LEIBNIZ

A Mr. LE COMTE DE BOTHMAR.

JE ſuis bien obligé à V. E. de ce qu'elle paroît déſaprouver les chicanes que certaines perſonnes m'ont ſuſcitées. Mais puis-je m'empêcher de répondre, quand on n'attaque pas ſeulement ma ſcience, mais auſſi ma bonne foi & ma réputation?

Je fis connoître en 1677. par une Lettre écrite au Secrétaire de la Societé Royale d'Angleterre, que j'avois trouvé un nouveau Calcul Mathématique. Je ne le publiai qu'en 1684, & il fit grand bruit parmi les connoiſſeurs, & fut bien-tôt introduit par-tout, & appliqué utilement à cent queſtions difficiles. Mr. *Newton* publia un livre en 1686, où il marqua qu'il avoit donné, il y avoit long-tems, quelque choſe de cette nature par énigme; mais qu'il n'expliqua qu'alors, avouant que j'avois donné le mien de mon chef. Quoique l'explication de l'énigme ne dit pas aſſez, néanmoins perſuadé alors non-ſeulement du ſavoir, mais auſſi de la candeur de Mr. *Newton*, j'eus l'honnêteté de dire, & de faire dire à mes amis, que je croyois que Mr. *Newton* avoit eu de ſon chef une invention approchante de la mienne. Les choſes en demeurérent là; mais après vingt ſept ans de ma poſſeſſion, quelques perſonnes envieuſes de la réputation d'autrui, voyant le grand uſage de l'invention dont le monde m'étoit redevable, puiſqu'en effet je l'avois publiée, quoiqu'après huit ans d'attente, pendant que Mr. *Newton* avoit gardé *in petto* ce qu'il pouvoit avoir eu, ils cherchérent un prétexte pour me faire querelle; & ils le trouvérent dans certaines paroles d'un Journal Latin de Leipſic,

 qu'ils

(1) Mademoiſelle de Pölnitz, à Hanovre.

qu'ils ſuppoſérent avoir été miſes là avec mon conſentement, & qu'ils expliquérent comme ſi j'accuſois Mr. *Newton* d'avoir forgé ſon Calcul ſur le mien.

Soit que Mr. *Newton* ait été abuſé par des ſuggeſtions malignes, ſoit qu'il ait été bien aiſe d'avoir ce prétexte de s'attribuer l'invention en m'excluant; ſes adhérens publiérent un livre contre moi à Londres en 1712. plein de fauſſes interprétations de vieilles lettres, par leſquelles ils m'accuſoient, comme par forme de rétorſion, que c'étoit plû ôt moi, qui avois pris mon invention de M. *Newton*; & on eut grand ſoin d'envoyer ce Libelle en France, en Italie, & ailleurs. J'étois alors à Vienne: j'appris la publication du livre; mais aſſuré qu'il devoit contenir des fauſſetés malignes, je ne daignai point le faire venir par la poſte. J'écrivis ſeulement à Mr. *Bernoulli*, l'homme de l'Europe qui a peut être le mieux réuſſi dans la connoiſſance & dans l'uſage de ce Calcul, & qui étoit tout à-fait neutre, de m'en mander ſon ſentiment. Mr. *Bernoulli* m'écrivit une Lettre datée de Bâle le 7. Juin 1713. où il diſoit, qu'il paroiſſoit vraiſemblable, que Mr. *Newton* avoit fabriqué ſon Calcul après avoir vu le mien, parce qu'il avoit eu pluſieurs fois occaſion, dans ſes ouvrages, d'employer ce Calcul, ſans qu'il en paroiſſe aucune trace; & même qu'il avoit fait des fautes, qui paroiſſoient incompatibles avec une véritable intelligence de ce Calcul. Un de mes amis publia cette Lettre avec des réflexions; & comme j'avois aſſez d'autres occupations, je ne voulus point entrer davantage là-dedans, d'autant que Mr. *Newton* n'avoit point parlé lui-même. Ainſi je crus qu'il ſuffiſoit d'avoir oppoſé aux criailleries de ſes adhérens le jugement d'une perſonne de la ſcience & de l'impartialité de Mr. *Bernoulli.*

Mais enfin, on a trouvé le moyen de me faire parler, en donnant connoiſſance de l'affaire au Roi, & en m'envoyant en même tems un Cartel de Mr. *Newton.* J'y ai répondu par une Lettre, qui n'eſt pas trop longue; mais apparemment cela ira plus loin, & il faudra entrer dans un grand détail. Car s'il eſt permis à Mr. *Newton* & à ſes adhérens de continuer de noircir ma réputation, je ſuis obligé indiſpenſablement de me défendre, & d'uſer de repréſailles, quoique je ſouhaiterois d'employer mon tems plus utilement. Il prétend dans ſa Lettre » que je ſuis » l'aggreſſeur, que je l'accuſe d'avoir uſé de mauvaiſe foi, & que c'eſt » à moi de prouver cette accuſation. « Je ſouhaite qu'on examine cette queſtion préalable, qui de nous deux eſt l'aggreſſeur; car il eſt fort aiſé de la vuider. Il ne ſe fonde que ſur les paroles du Journal de Leipſic du mois de Janvier de l'an 1705. que voici: *Calculi differentialis ejuſque reciproci ſummatorii Elementa ab inventore D.* Godefrido Guillelmo Leibnitio *in his Actis ſunt tradita, variique uſus, tum a D. D. fratribus* Bernoulliis, *tum a D. Marchione* Hoſpitalio *ſunt oſtenſi. Pro differentiis igitur Leibni-*

Leibnitianis D. Newtonus *adhibet, ſemperque adhibuit Fluxiones, quæ ſunt quàm proximè ut fluentium augmenta æqualibus temporis particulis quàm minimis genita; iiſque tum in ſuis Principiis Naturæ Mathematicis, tum aliis poſtea editis eleganter eſt uſus; quemadmodum &* Honoratus Fabrius *in ſua Synopſi Geometrica, motuum progreſſus Cavallerianæ methodo ſubſtituit.*

Il n'y a pas un mot là dedans qui ne ſoit vrai à la rigueur: & il n'y a pas un mot qui diſe que Mr. *Newton* a fabriqué ſon Calcul ſur le mien; mais on l'en a voulu tirer par une gloſe marginale dans le livre fait contre moi, pag. 108. Car lorſque le Journal de Leipſic dit: *pro differentiis Leibnitianis D.* Newtonus *adhibet SEMPERQUE ADHIBUIT Fluxiones*, l'Auteur de la gloſe l'explique ainſi: *Senſus verborum eſt, quòd* Newtonus *fluxiones differentiis Leibnitianis SUBSTITUIT*; mais ce *ſubſtituit* eſt une interprétation maligne du Gloſſateur, & ne peut point s'accorder avec *ſemperque adhibuit*, qui paroît avoir été mis là tout exprès, pour marquer que déja avant la publication de mon calcul Mr. *Newton* s'étoit ſervi des fluxions: au lieu qu'on dit *ſubſtituit* en parlant du Père *Fabri*, qui étoit venu après *Cavallieri*, & en avoit changé les expreſſions; en quoi on a marqué la différence, en diſant que Mr. *Newton* a toujours employé ſa méthode, au lieu que le Père *Fabri* n'a forgé la ſienne qu'à l'imitation d'un autre.

Ainſi on ne peut rien tirer de dérogeant pour Mr. *Newton* de ces paroles, qu'en les empoiſonnant. Et ſi on les avoit trouvées obſcures, on auroit pu demander une explication, & les Journaliſtes auroient pris plaiſir, ſans doute, de dire ce qu'on avoit dit pluſieurs fois ailleurs, qu'on croyoit que Mr. *Newton* y étoit parvenu de ſon chef. Mais au lieu de ſe ſervir d'une telle voye, on a voulu chercher querelle: de ſorte que Mr. *Newton* ſe trouve l'aggreſſeur; & par conſéquent c'eſt à lui de prouver ſon accuſation.

LETTRE DE MR. LEIBNIZ,

A Mr. l'Abbé CONTI, pour répondre à la Lettre de Mr. le Chevalier NEWTON.

C'Eſt ſans doute pour l'amour de la vérité que vous êtes chargé d'une eſpèce de cartel de la part de Mr. *Newton*. Je n'ai point voulu entrer en lice avec des enfans perdus qu'il avoit détachés contre moi, ſoit qu'on entende celui qui a fait l'accuſateur ſur le fondement du *Commercium Epiſtolicum*, ſoit qu'on regarde la préface pleine d'aigreur qu'un autre a miſe devant la nouvelle édition de ſes *Principes*; mais puiſqu'il veut

veut bien paroître lui-même, je ſerai bien aiſe de lui donner ſatisfaction.

Je fus ſurpris au commencement de cette diſpute d'apprendre qu'on m'accuſoit d'être l'aggreſſeur ; car je ne me ſouvenois pas d'avoir parlé de Mr. *Newton* que d'une maniére fort obligeante. Mais je vis depuis qu'on abuſoit pour cela d'un paſſage des Actes de Leipſic du mois de Janvier 1705, où il y a ces mots : *Pro differentiis Leibnitianis, D.* Newtonus *adhibet, ſemperque adhibuit Fluxiones* ; où l'Auteur des Remarques ſur le *Commercium Epiſtolicum* dit, *pag.* 108. *Senſus verborum eſt, quòd* Newtonus *Fluxiones differentiis Leibnitianis ſubſtituit.* Mais c'eſt une interprétation maligne d'un homme qui cherchoit noiſe. Il ſemble que l'Auteur des paroles inſérées dans les Actes de Leipſic a voulu y obvier tout exprès par ces mots, *adhibet SEMPERQUE adhibuit*, pour inſinuer, que ce n'eſt pas après la vûe de mes Différences, mais déja auparavant, qu'il s'eſt ſervi de Fluxions : Et je défie qui que ce ſoit de donner un autre but raiſonnable à ces paroles, *ſemperque adhibuit* ; au lieu qu'on ſe ſert du mot *ſubſtituit*, en parlant de ce que le Père *Fabri* a fait après *Cavallieri.* D'où il faut conclure, ou que Mr. *Newton* s'eſt laiſſé tromper par un homme qui a empoiſonné ces paroles des Actes, qu'on ſuppoſoit n'avoir pas été publiées ſans ma connoiſſance, & s'eſt imaginé qu'on l'accuſoit d'être plagiaire ; ou bien qu'il a été bien aiſe de trouver un prétexte de s'attribuer ou faire attribuer privativement l'invention du nouveau Calcul, (depuis qu'il en remarquoit le ſuccès & le bruit qu'il faiſoit dans le monde) contre ſes connoiſſances contraires, avouées dans ſon livre des Principes, *pag.* 253. de la premiére édition. Si l'on avoit fait connoître qu'on trouvoit quelque difficulté, ou ſujet de plainte dans les paroles des Actes de Leipſic, je ſuis aſſûré, que ces Meſſieurs, qui ont part à ces Actes, auroient donné un plein contentement ; mais il ſemble qu'on cherchoit un prétexte de rupture.

Je n'ai pas eu connoiſſance du *Commité nombreux de perſonnes diſtinguées de pluſieurs nations, aſſemblé exprès par ordre de la Societé Royale* ; car on ne m'en a donné aucune part ; & je ne ſai pas encore préſentement les noms de tous ces Commiſſaires, & particuliérement de ceux qui ne ſont pas des Isles Britanniques. Je ne crois pas qu'ils approuvent tout ce qui a été mis dans l'ouvrage publié contre moi.

Il eſt aiſé de croire que j'ai été quelque tems à Vienne, avant que d'avoir vu le *Commercium Epiſtolicum* déja publié, quoique j'en euſſe des nouvelles. Ainſi un ami ſachant cela, auſſi zélé pour moi que les ſeconds de Mr. *Newton* le peuvent être pour lui, a publié un Ecrit, que Mr. *Newton* appelle *diffamatoire.* Mais cette piéce n'étant pas plus forte que ce qu'on a publié contre moi, Mr. *Newton* n'a pas droit de s'en plaindre. Si l'on n'a pas marqué l'Auteur, ni le lieu de l'impreſſion de cet écrit,

écrit, on connoit aſſez le nom & le lieu de l'Auteur de la lettre y inſérée d'un excellent Mathématicien, que j'avois prié de dire ſon ſentiment ſur le *Commercium*; & cela ſuffit. Mr. *Newton* (dont les Partiſans ont marqué qu'il ne leur étoit point inconnu) l'appelle un *Mathématicien* ou *prétendu Mathématicien*; & après avoir fait inutilement des efforts pour le gagner, il le mépriſe contre l'opinion publique, qui le met entre ceux du premier rang, & contre l'évidence des choſes vérifiées par ſes découvertes.

Lorſque j'eus enfin le *Commercium Epiſtolicum*, je vis qu'on s'y écartoit entiérement du but, & que les lettres qu'on publioit ne contenoient pas un mot qui pût faire révoquer en doute mon invention du calcul des différences, dont il s'agiſſoit. Au lieu de cela, je remarquai qu'on ſe jettoit ſur les *Series*, où l'on accorde l'avantage à Mr. *Newton*; & que les remarques contenoient des gloſes mal tournées, pour tâcher de me décrier par des ſoupçons ſans fondement, quelquefois ridicules, & quelquefois forgés contre la conſcience de quelques-uns de ceux qui en étoient les auteurs ou les approbateurs.

Pour répondre donc de point en point à l'ouvrage publié contre moi, il falloit un autre ouvrage auſſi grand pour le moins que celui-là: il falloit entrer dans un grand détail de quantité de minuties, paſſées il y a 30. à 40. ans, dont je ne me ſouvenois guéres: il me falloit chercher mes vieilles lettres, dont pluſieurs ſe ſont perdues, outre que le plus ſouvent, je n'ai point gardé les minutes des miennes, & les autres ſont enſevelies dans un grand tas de papiers, que je ne pouvois débrouiller qu'avec du tems & de la patience; mais je n'en avois guére le loiſir, étant chargé pour lors d'occupations d'une toute autre nature.

De plus, je remarquai que dans la publication du *Commercium Epiſtolicum* on a ſupprimé des endroits qui pouvoient être au déſavantage de Mr. *Newton*: au lieu qu'on n'y a rien omis de ce qu'on croyoit pouvoir tourner contre moi par des gloſes forcées. Comme je n'ai pas daigné lire le *Commercium Epiſtolicum* avec beaucoup d'attention, je me ſuis trompé dans l'exemple que j'ai cité, n'ayant pas pris garde, ou ayant oublié, qu'il s'y trouvoit; mais j'en citerai un autre. Mr. *Newton* avouoit dans une de ſes lettres à Mr. *Collins*, qu'il ne pouvoit point venir à bout des Sections ſecondes (ou Segments ſeconds,) des Sphéroïdes ou corps ſemblables; mais on n'a point inſéré ce paſſage ou cette lettre dans le *Commercium Epiſtolicum*. Il auroit été plus ſincère par rapport à la diſpute, & plus utile au public, de donner le Commerce littéraire de Mr. *Collins* tout entier, là où il contenoit quelque choſe qui méritoit d'être ſçu; & particuliérement de ne pas tronquer les lettres; car il y en a peu parmi mes papiers, ou dont il me reſte des minutes.

Ainſi tout conſidéré, voyant tant de marques de malignité & de chi-

 cane,

cane, je crus indigne de moi d'entrer en diſcuſſion avec des gens qui en uſoient ſi mal. Je voyois qu'en les refutant on auroit de la peine à éviter des reproches, & des expreſſions fortes, telles que méritoit leur procédé; & je n'avois point envie de donner ce ſpectacle au public, ayant deſſein de mieux employer mon tems, qui me doit être précieux, & mépriſant aſſez le jugement de ceux qui ſur un tel ouvrage voudroient prononcer contre moi; d'autant que la Societé Royale même ne l'a point voulu faire, comme je l'ai appris par un Extrait de ſes Regîtres.

Je ne crois point avoir dit (comme Mr. *Newton* me l'impute) que *les Anglois n'auroient point le plaiſir de me voir répondre à leurs petites raiſons*; car je ne crois point que tous les Anglois faſſent leur cauſe de celle de M. *Newton*; il y en a de trop habiles & de trop honnêtes, pour épouſer les paſſions de quelques-uns de ſes adhérens.

Après cela, il m'accuſe d'avoir voulu faire diverſion, en combattant ſa Philoſophie, & en voulant l'engager dans des Problêmes; mais quant à la Philoſophie, j'ai donné publiquement quelque choſe de mes principes ſans attaquer les ſiens; ſi ce n'eſt que par occaſion j'en ai parlé dans des lettres particuliéres, depuis qu'on m'en a donné ſujet. Et pour ce qui eſt des Problêmes, je n'ai garde d'en propoſer à M. *Newton*; car je ne voudrois pas m'y engager, quand on m'en propoſeroit à moi; nous pouvons nous en diſpenſer à l'âge où nous ſommes, mais nous avons des amis qui y peuvent ſuppléer à notre défaut.

Je ne veux point entrer ici dans le détail de ce que Mr. *Newton* dit un peu aigrement contre ma Philoſophie, ou pour la ſienne. Ce n'en eſt point le lieu. J'appelle *miracle* tout événement qui ne peut être arrivé que par la puiſſance du Créateur, ſa raiſon n'étant pas dans la nature des créatures: & quand on veut néanmoins l'attribuer aux qualités ou forces des créatures, alors j'appelle cette qualité *une qualité occulte à la Scholaſtique*: c'eſt-à-dire, qu'il eſt impoſſible de rendre manifeſte, telle que ſeroit une peſanteur primitive; car les qualités occultes qui ne ſont point chimériques, ſont celles dont nous ignorons la cauſe, mais dont nous ne l'excluons point. Et j'appelle *l'Ame de l'Homme* cette ſubſtance ſimple qui s'apperçoit de ce qui ſe paſſe dans le corps humain, & dont les appetits ou volontés ſont ſuivis par les efforts du corps. Je ne préfére pas les *Hypothèſes* aux *Argumens* tirés de l'induction des expériences; mais quelquefois on fait paſſer pour inductions générales ce qui ne conſiſte qu'en obſervations particuliéres; & quelquefois on veut faire paſſer pour une hypothèſe ce qui eſt démonſtratif. L'idée que Mr. *Newton* donne ici de mon Harmonie préétablie n'eſt pas celle qu'en ont quantité d'habiles gens hors de l'Angleterre, & quelques-uns en Angleterre; & je ne crois pas que vous-même, Monſieur, en ayez eu une ſemblable, ou l'ayez maintenant, à moins que d'être bien changé.

Je

Je n'ai jamais nié qu'à mon ſecond voyage en Angleterre j'aye vu quelques lettres de Mr. *Newton* chez Mr. *Collins*; mais je n'en ai jamais vu où Mr. *Newton* ait expliqué ſa méthode des Fluxions, & je n'en trouve point dans le *Commercium Epiſtolicum.*

Je n'ai pas vu non plus qu'il ait expliqué la méthode des *Séries* que je m'attribue: je crois qu'il veut parler de celle où je prends une *Série* arbitraire; je l'ai fait avant mon ſecond retour en Angleterre. Je ne nie pourtant pas, que Mr. *Newton* n'eût pu l'avoir auſſi, & ce n'eſt pas même une invention fort difficile.

Mr. *Newton* veut que j'avoue, & que j'accorde ce que j'ai avoué ou accordé il y a 15. ans, ou autrement que l'on en pourra conclure que je ſuis de mauvaiſe foi: on devroit en attendre autant de lui; car il y a maintenant deux fois quinze ans, que dans la premiére édition de ſes Principes, *pag.* 253. 254. il m'accorde l'invention du calcul des différences, indépendamment de la ſienne; & depuis il s'eſt aviſé, je ne ſais comment, de faire ſoutenir le contraire.

Il eſt bon de ſavoir qu'à mon premier voyage d'Angleterre en 1673. je n'avois pas la moindre connoiſſance des *Séries infinies*, telles que Mr. *Mercator* venoit de donner, ni d'autres matiéres de la Géométrie avancée par les derniéres méthodes. Je n'étois pas même aſſez verſé dans l'Analyſe de *Deſcartes*. Je ne traitois les Mathématiques que comme un *Parergon*, & je ne ſavois guére que la Géométrie des indiviſibles de *Cavallieri*, & un livre du Père *Leotaud*, où il donnoit les Quadratures des Lunules & figures ſemblables, ce qui m'avoit donné quelque curioſité. Mais je me divertiſſois plutôt aux proprietés des Nombres, à quoi le petit Traité que j'avois publié, preſque petit garçon, de l'Art des Combinaiſons, en 1666. m'avoit donné occaſion. Et ayant obſervé dès lors l'uſage des différences pour les ſommes, je l'appliquai à des ſuites de Nombres. On voit bien par mes premiéres lettres échangées avec Mr. *Oldenbourg*, que je n'étois guéres allé plus avant. Auſſi n'avois-je point alors la connoiſſance de Mr. *Collins*, quoiqu'on ait feint malicieuſement le contraire.

Ce fut peu à peu que Mr. *Huygens* me fit entrer en ces matiéres, quand je le pratiquois à Paris; & cela joint au Traité de Mr. *Mercator* (que j'avois apporté avec moi d'Angleterre, parce que Mr. *Pell* m'en avoit parlé) me fit trouver environ vers la fin de l'an 1673. ma Quadrature Arithmétique du cercle, qui fut fort approuvée par Mr. *Huygens*, & dont je parlai à Mr. *Oldenbourg* dans une lettre de l'an 1674. Alors ni Mr. *Huygens* ni moi, nous ne ſavions rien des *Series* de Mr. *Newton* ni de Mr. *Gregory*. Ainſi je crus être le premier qui eût donné la valeur du cercle par une ſuite de Nombres rationaux: & Mr. *Huygens* le crut auſſi. J'en écrivis ſur ce ton-là à Mr. *Oldenbourg*, qui me répondit qu'on avoit

déja de telles *Series* en Angleterre : & l'on voit par ma lettre du 15. Juillet de 1674, & par la réponſe de Mr. *Oldenbourg* du 8. Décembre de la même année, que je n'en devois avoir aucune connoiſſance alors. Autrement Mr. *Oldenbourg* n'auroit pas manqué de me le faire ſentir, ſi lui, & Mr. *Collins* m'en avoient communiqué quelque choſe auparavant. Ce ne fut donc qu'alors que j'en appris quelque choſe; mais je ne ſavois pas encore les extractions des racines des Equations par des *Séries*, ni les régreſſions, ou l'extraction d'une Equation infinie. J'étois encore un peu neuf en ces matiéres; mais je trouvai pourtant bientôt ma méthode générale par des *Séries* arbitraires; & j'entrai enfin dans mon calcul des différences, où les obſervations que j'avois faites, encore fort jeune, ſur les différences des ſuites des Nombres, contribuérent à m'ouvrir les yeux. Car ce n'eſt pas par les Fluxions des lignes, mais par les différences des Nombres, que j'y ſuis venu; en conſidérant enfin que ces différences appliquées aux grandeurs qui croiſſent continuellement, s'évanouïſſent en comparaiſon des grandeurs différentes, au lieu qu'elles ſubſiſtent dans les ſuites des Nombres. Et je crois que cette voye eſt la plus analytique: le Calcul Géométrique des différences, qui eſt le même que celui des Fluxions, n'étant qu'un cas ſpécial du calcul analytique des différences en général; & ce cas ſpécial devient plus commode par les évanouïſſemens.

Mr. *Newton* allégue enſuite les paſſages, où j'accorde qu'il a eu un calcul approchant de mon calcul des différences; mais il pourra bien ſe ſouvenir qu'il m'en a accordé autant; & s'il lui eſt permis de ſe rétracter, pourquoi ne me ſera-t-il point permis d'en faire autant? ſur-tout après les vériſimilitudes que Mr. *Bernoulli* a remarquées. J'ai eu une ſi grande opinion de la candeur de Mr. *Newton*, que je l'ai cru ſur ſa parole; mais le voyant conniver à des accuſations dont la fauſſeté lui eſt connue, il étoit naturel que je commençaſſe de douter.

Je ne puis avouer ni déſavouer aujourd'hui d'avoir écrit, ou reçu des lettres écrites, il y a plus de 40. ans, telles qu'on les a publiées. Je ſuis obligé de m'en rapporter à ce qui ſe trouve dans les papiers qu'on cite; mais je ne remarque rien contre moi dans celles que Mr. *Newton* allégue du 15. d'Avril & du 20. de Mai 1675. & du 24. d'Octobre 1676. ſinon dans les fauſſetés du Gloſſateur. Je crois que c'étoit purement par diſtraction, dans un ſéjour comme celui de Paris, où je m'occupois à bien d'autres choſes encore qu'aux Mathématiques, & par l'éloignement que j'avois des calculs, dont je craignois la longueur, que j'ai demandé quelquefois à Mr. *Oldenbourg* la démonſtration ou la méthode d'arriver à certaines choſes où j'aurois bien pu arriver moi-même. Par exemple, je crois avoir déja eu au douze de Mai 1676. ma méthode d'une *Séries arbitraire*, qui m'auroit pu mener à des *Séries* dont j'y demandois

mandois la raiſon. Car ayant conſulté mon vieux Traité de la Quadrature Arithmétique, achevé quelque tems avant ma ſortie de *France*, je me ſers de la *Séries* arbitraire. Cependant les *Séries* marquées dans cette lettre ſont une choſe dont je conſens d'être redevable à d'autres; & je crois de ne les avoir pas même connues en 1674.

N'entendant pas bien ce que Mr. *Newton* allégue des *Actes* de *Leipſic* du mois de Mai 1700. j'y ai regardé, & je trouve qu'il n'en a pas bien pris le ſens. Il n'y eſt point parlé de l'invention du nouveau Calcul des différences, mais d'un artifice particulier *de Maximis & Minimis*, qui en eſt indépendant, & dont je m'étois aviſé bien du tems avant que Mr. *Bernoulli* eût propoſé ſon Problême de la plus courte deſcente, mais dont je jugeois que Mr. *Newton* ſe devoit être aviſé auſſi, lorſqu'il avoit donné la figure de ſon Vaiſſeau dans ſes Principes. Ainſi j'ai voulu dire, qu'il a fait connoître publiquement avant moi, qu'il poſſédoit cet artifice: ce que je ne pouvois pas dire du calcul des différences & des Fluxions, puiſque j'en avois fait voir l'utilité publiquement avant la publication de ce livre. Cet Artifice particulier *de Maximis & Minimis* n'eſt point néceſſaire, quand il s'agit ſimplement d'une grandeur; car alors la méthode de Mr. *Fermat* perfectionnée par les nouveaux calculs ſuffit; mais quand il s'agit de toute une figure qui doit faire le mieux un effet demandé, il faut autre choſe.

Mr. *Newton* hazarde ici une accuſation, mais qui va tomber ſur lui-même. Il prétend que ce que j'ai écrit pour lui à Mr. *Oldenbourg* en 1677. eſt un déguiſement de la méthode de Mr. *Barrow*. Mais comme Mr. *Newton* avoue dans la *pag.* 253, & 254. de la premiére édition de ſes Principes, *me ipſi* (tunc) *Methodum communicaſſe à Methodo ipſius vix abludentem præterquàm in verborum & notarum formulis*; il s'enſuivra que ſa méthode n'eſt auſſi qu'un déguiſement de celle de Mr. *Barrow*.

Je crois que lui & moi nous ſerons aiſément quittes de cette accuſation: car une infinité de gens liront le livre de Mr. *Barrow*, ſans y trouver notre Calcul. Il eſt vrai que feu Mr. *Tſchirnhaus*, qui s'apperçut un peu tard de l'avantage de ce Calcul, prétendoit qu'on pouvoit arriver à tout cela par les méthodes de Mr. *Barrow*: comme l'Abbé *Catelan*, François, prétendit que même l'Analyſe de *Deſcartes* ſuffiſoit pour toutes ces choſes; mais il étoit plus aiſé de le dire que de le montrer.

Cependant ſi quelqu'un a profité de Mr. *Barrow*, ce ſera plutôt Mr. *Newton* qui a étudié ſous lui, que moi, qui, autant que je puis m'en ſouvenir, n'ai vu les livres de Mr. *Barrow* qu'à mon ſecond voyage d'Angleterre, & ne les ai jamais lus avec attention, parce qu'en voyant le livre je m'apperçus que par la conſidération du Triangle Caractériſtique (dont les côtés ſont les Elémens de l'Abſciſſe, de l'Ordonnée & de la Courbe) ſemblable à quelque Triangle aſſignable, j'étois venu com-

me en me jouant aux quadratures, ſurfaces & ſolides, dont Mr. *Barrow* avoit rempli un chapitre des plus conſidérables de ſes leçons. Outre que je ne ſuis venu à mon calcul des différences dans la Géométrie, qu'après en avoir vu l'uſage (mais moins conſidérable) dans les nombres, comme mes premiéres lettres dans le *Commercium Epiſtolicum* le peuvent inſinuer. Il ſe peut que Mr. *Barrow* en ait plus ſçu qu'il n'en a dit dans ſon livre, & qu'il ait donné des lumiéres à Mr. *Newton* que nous ne ſavons pas. Et ſi j'étois ſemblable à certains téméraires, je pourrois aſſûrer ſur de ſimples ſoupçons, ſans autre fondement, que le calcul des Fluxions de Mr. *Newton*, quel qu'il puiſſe être, lui a été enſeigné par Mr. *Barrow*.

On peut bien juger que lorſque j'ai parlé en 1676. des Problêmes qui ne dépendoient ni des Equations, ni des Quadratures, j'ai voulu parler des Equations qu'on connoiſſoit alors dans le monde; c'eſt-à-dire, des Equations de l'Analyſe ordinaire. Et on le peut juger de ce que j'ajoute les Quadratures comme quelque choſe de plus que ces Equations. Mais les Equations différentielles vont au delà même des Quadratures; & l'on voit bien que j'entendois même parler des Problêmes qui vont à ces ſortes d'Equations, inconnues alors au public. Cette objection ſe trouvoit déja dans les remarques au *Commercium*; mais je n'avois point cru que Mr. *Newton* étoit capable de l'employer.

Je juge par un endroit de ma lettre du 27. d'Août 1676. (*pag.* 65. du *Commercium Epiſtolicum*) que je devois déja avoir alors l'ouverture du calcul des différences; car j'y dis avoir réſolu d'abord par une certaine Analyſe (*certa Analyſi ſolvi*) le Problême de Mr. *de Beaune* propoſé à Mr. *Deſcartes*. Cette Analyſe n'étoit que cela. On le peut réſoudre ſans cela: & je crois que Monſieur *Huygens* & Monſieur *Barrow* l'auroient donné au beſoin, comme beaucoup d'autres choſes; mais ſelon ma maniére de noter, ce n'eſt qu'un jeu. Je trouve une petite faute dans cette page: il y a *ludus naturæ* au lieu de *hujus naturæ*; mais cette faute étoit ancienne, & ſe devoit déja trouver dans la copie de ma lettre envoyée à Mr. *Newton*; car il y répond (dans la lettre du 24. d'Octobre 1676. *pag.* 86. *du Commercium*:) *Hos caſus vix numeraverim inter ludos naturæ* (m). Je n'avois point entendu ce qu'il vouloit dire, mais à préſent je vois l'origine de la mépriſe.

Je ne ſaurois dire aujourd'hui ſi j'ai remarqué le paſſage de Mr. *Wallis*, où il dit que Mr. *Newton* ſavoit déja la méthode des Fluxions en 1666. Mais quand je l'aurois remarqué, je l'aurois laiſſé paſſer apparemment, étant fort porté alors à croire Mr. *Newton* ſur ſa parole; mais ſon procédé m'a forcé d'être plus circonſpect à cet égard.

Mr.

(m) Cette faute ſe trouve dans le III. Tome des *Oeuvres Mathématiques* de Mr. *Wallis*, pag. 633. & 645. Elle aura paſſé de là dans le *Commercium*.

Mr. *Newton* dit que je l'ai accuſé d'être plagiaire. Mais où eſt-ce que je l'ai fait? Ce ſont ſes adhérens qui ont paru intenter cette accuſation contre moi, & il y a connivé. Je ne ſais pas s'il adopte entiérement ce qu'ils ont publié; mais je conviens avec lui, que la malice de celui qui intente une telle accuſation ſans la prouver, le rend coupable de calomnie.

Il finit ſa lettre en m'accuſant d'être l'aggreſſeur, & j'ai commencé celle-ci en prouvant le contraire. Il ſera fort aiſé de vuider ce point préliminaire. Il y a eu du mal-entendu; mais ce n'eſt pas ma faute. Au reſte, je ſuis &c.

Hanover ce 9. d'Avril 1716.

APOSTILLE.

Vous avez donné, Monſieur, la ſolution d'un Problême, que les partiſans de Monſieur *Newton* n'avoient point trouvée juſqu'ici; car vous avez trouvé le moyen de me faire répondre en m'envoyant une lettre de Mr. *Newton* lui-même. Après cela vous n'avez pas beſoin de me faire des exhortations là-deſſus. Si la queſtion avoit été ſeulement, lequel de nous deux, de Mr. *Newton* ou de moi, a trouvé le premier le calcul en queſtion, je ne m'en mettrois point en peine. Auſſi eſt-il difficile de décider ce que l'un & l'autre peut avoir gardé *in petto*, & combien longtems. Mais un adhérent de Mr. *Newton* a prétendu que je l'avois appris de lui: & depuis il a paru plus probable à quelques autres, & même à Mr. *Bernoulli*, que la maniére de calculer que Mr. *Newton* a publiée dans les Oeuvres de Mr. *Wallis* a été fabriquée à l'imitation de mon Calcul des Différences déja publié. Il n'y a pas la moindre trace, ni ombre du Calcul des Différences ou Fluxions dans toutes les anciennes lettres de Mr. *Newton* que j'ai vues, excepté dans celle qu'il a écrite le 24. d'Octobre 1676, où il n'en a parlé que par énigme (n); & la ſolution de cette énigme, qu'il n'a donnée que dix ans après, dit quelque choſe, mais elle ne dit pas tout ce qu'on pourroit demander. Cependant, prévenu pour Mr. *Newton*, j'ai eu autrefois la condeſcendance d'en parler, comme ſi elle diſoit preſque tout; & c'eſt après moi que d'autres en ont parlé de même. Mon honnêteté a été mal reconnue.

Vous me dites, Monſieur, que Mr. *Jones* a publié une de mes lettres à Mr. *Newton*: ayez la bonté de m'apprendre où (o).

C'eſt aller un peu vîte, que de dire, que mon Problême a été réſolu fort

(n) *Commerc. Epiſt.* pag. 86.

(o) Mr. *Leibniz* confond ici le Traité de Mr. *Newton de Analyſi* &c. publié par Mr. *Jones*, avec la lettre de Mr. *Leibniz* à Mr. *Newton*, écrite en 1693. Voyez la note (g).

fort aiſément. Je crois qu'il n'a point été réſolu du tout. Car de donner quelques cas faciles, comme dans les Coniques, & de ſe reſtraindre au cas de la ſoutangente &c. ce n'eſt pas faire grand' choſe. Mr. *Bernoulli* l'a réſolu par une méthode générale. On fixe aſſez l'idée en diſant, qu'il s'agit généralement de toutes ſortes de lignes qui ne différent entr'elles dans leurs conſtructions que par les changemens d'une ſeule droite conſtante dans la ligne, & changeant de ligne en ligne. Prenez telle ligne qu'il vous plaira, vous aurez d'abord par cette méthode une ſuite d'infinité d'autres.

Je m'étonne, Monſieur, que vous dites, qu'*avant que de parler de la Philoſophie de Mr.* Newton, *il faut convenir de la méthode de philoſopher.* Eſt-ce qu'il y a une autre Logique à Londres qu'à Hanover? Quand on raiſonne en bonne forme ſur des faits bien avérés, ou ſur des axiomes indubitables, on ne manque pas d'avoir raiſon. Si les ſentimens de Mr. *Newton* ſont meilleurs qu'on n'a dit, tant mieux, je ſerai toujours bien aiſe de lui rendre juſtice.

Je vois bien que vous n'avez pas encore eu le loiſir, Monſieur, de toucher à rien de tout ce que j'avois eu l'honneur de vous écrire, excepté ce qui regarde Mr. *Newton.* J'aurois ſouhaité d'apprendre quelques nouvelles de Mr. *Wren* & de quelques autres excellens hommes; mais je ne puis vous les demander qu'en grace, & chacun eſt le maître des graces qu'il veut faire. Cependant ſi vous en apprenez quelque choſe, ou quelques autres particularités de doctrine, que vous voudriez bien me communiquer, comme vous me le faites eſpérer, je vous ſupplie de ne me point remettre juſqu'à l'arrivée de Mr. le Baron *Diſcau* en Angleterre, pour m'en faire part; puiſque tous les ordinaires me peuvent apporter l'honneur de vos ordres, & que vous voyez que je n'attends pas le retour de Mr. *Diſcau* de Pologne, pour vous répondre.

Je crois vous avoir dit, Monſieur, que le Régne de *Charles II.* (au moins dans ſa premiére moitié) me paroiſſoit le Siècle d'Or des Sciences en Angleterre. Il ſemble que je vous ai paru comme ce vieillard d'*Horace*, *laudator temporis acti*; & que vous avez voulu me redreſſer là-deſſus, en diſant que *les Sciences & les Arts fleuriſſent à préſent à Londres plus que jamais.* Vous m'obligerez fort ſi vous me le faites connoître; car j'en ſerai ravi. Mais des gens mieux informés que moi m'ont avoué que depuis quelque tems on s'étoit trop attaché à *i ghiribizzi della Politica*, & aux controverſes de Religion. Je voudrois voir revivre un Prince *Robert*, dans les Mécaniques; un Mr. *Boyle*, dans la Chymie; un Mr. *Hook*, dans les Obſervations du Microſcope; un Mr. *Sydenham*, ou Mr. *Liſter*, dans celles de la Médecine; un Mr. *Ray*, dans la Botanique; & ainſi des autres. Et quand Mr. *Wren*, Mr. *Newton*, Mr. *Flamſteed*, Mr. *Halley*, Mr. *Sloane*, Mr. *Wodward*, & Mr. *Wotthon*, ne

ne ſeront plus, je ne ſais ſi les gens qui paroiſſent à préſent les pourront remplacer. Il ſemble que preſque tous les adhérens de M. *Newton* ne ſont à préſent que copiſtes, & que les plus aigres le ſont le plus. Mais quand les paſſions préſentes qui diviſent la Nation ſeront appaiſées, j'eſpére que les eſprits, encouragés par le Roi & par le Prince, (pour ne rien dire de la Princeſſe) reprendront leur ancien luſtre.

J'ai peur que ma lettre précédente ſur le Syſtême de Mr. *Nigreſoli*, ne vous ait donné auſſi peu de contentement que le Syſtême même, puiſque vous n'en dites rien davantage; mais j'ai toujours voulu vous marquer mon zèle.

Vous voyez que l'*Apoſtille* eſt pour vous, Monſieur, & que la *Lettre* eſt plutôt pour Mr. *Newton*, à l'exemple de celle qu'il vous a écrite.

LETTRE DE Mr. LEIBNIZ,

A Mr. REMOND.

Hanover ce 9. d'Avril 1716.

JE prends la liberté de vous envoyer les pièces d'un Procès nouveau, ou renouvellé, puiſque vous avez eu la bonté de vous intéreſſer pour moi. Mr. l'Abbé *Conti*, qui avoit fait des démarches de Médiateur, vient de m'envoyer un cartel de défi de la part de Mr. *Newton*. Je réponds à la lettre de l'un & de l'autre, par la *Lettre*, & par l'*Apoſtille* ci-jointes, c'eſt-à-dire, à Mr. *Newton* dans la *Lettre*, & à Mr. l'Abbé dans l'*Apoſtille*; & je ſuis bien aiſe, Monſieur, que vous & vos amis, & particuliérement Mr. l'Abbé *Varignon* (& d'autres perſonnes de l'Académie Royale des Sciences, à qui il en voudra faire part) en ſoient informés. Je vous ſupplie de garder la copie des lettres de Mr. l'Abbé & de Mr. *Newton*, & d'envoyer ma réponſe à Mr. l'Abbé. Vous voyez bien, Monſieur, pourquoi j'ai voulu me ſervir de la voye de la France, au lieu de répondre directement d'ici. Si vous croyez, Monſieur, que cette réponſe vaille la peine qu'on en garde auſſi une copie, cela dépend de vôtre jugement: mais je ne voudrois pas qu'on imprimât rien ſans mon conſentement. Je ne fais point d'autres réflexions ſur ces lettres, on en fera aſſez ſans moi.

Je pris la liberté de vous dire derniérement, Monſieur, que je ſouhaiterois que l'Académie Royale des Inſcriptions vit mon diſcours *de Origine Francorum* (p), & que je voudrois que cela ſe fit avant qu'on en parlât

(p) Voyez la lettre de Mr. Leibniz du 4. de Novembre 1715. ci-après.

parlât dans les Mémoires de Trevoux. Je laiſſe la diſpoſition de cela à vos bontés.

Il y a déja du tems, Monſieur, que je vous ai envoyé mon ſentiment ſur le livre fait contre le Père *Malebranche* (q): peut-être que les Révérends Pères Jeſuites, auſſi-bien que les amis de ce Père, ne ſeront point fâchés de le voir. Ce que j'ai cru conforme à la vérité m'a fait prendre le parti du milieu.

Au reſte, je me rapporte à ma précédente, & je ſuis avec zèle, Monſieur, votre &c.

P. S. Je vous envoye la lettre à Mr. l'Abbé *Conti ſub ſigillo volante*, & il n'eſt point néceſſaire que vous la fermiez. Je veux bien qu'on ſache que vous l'avez vue, Monſieur, & que je ſuis bien aiſe que vous en ſoyez informé.

REMARQUES

DE MR. LE CHEVALIER NEWTON

Sur la Lettre de Mr. LEIBNIZ à Mr. l'Abbé CONTI.

MOnſieur *Leibniz*, dans ſa lettre du 29. Décembre 1711. a juſtifié le paſſage des Actes de Leipſic du mois de Janvier 1705. pag. 34. & 35. & par-là il ſe l'eſt approprié; à préſent il tâche vainement de l'adoucir, prétendant que les mots, *adhibet ſemperque adhibuit*, ſont interprétés malignement par le mot *ſubſtituit.* Mais dans l'interprétation qu'il voudroit y donner, il ſupprime la force des termes *igitur* & *quemadmodum*: dont le premier fait que les mots *ſemperque adhibuit*, ſont une conſéquence de ce qui précéde, & dont le dernier les rend équivalens à *ſubſtituit*; cette omiſſion étant rétablie, le ſens qu'il tâche de donner préſentement à ces paroles ne ſauroit ſubſiſter. J'ai donc eu raiſon de dire qu'il avoit formé une accuſation contre moi. Dans les deux lettres qu'il écrivoit au Docteur *Sloane*, dont l'une eſt du 4. Mars, & l'autre du 29. Décembre 1711, il preſſa la Societé Royale de condamner le Docteur *Keill*, & voulut m'obliger à déclarer mon opinion avant que j'euſſe pris aucun parti dans cette affaire. Voici les termes de la ſeconde lettre: *itaque veſtræ æquitati committo, an non coercendæ ſint vanæ & injuſtæ* Keillii *vociferationes, quas ipſi* Newtono *Viro inſigni & geſtorum optimè conſcio improbari arbitror; ejuſque ſententiæ ſuæ libenter daturum indicia mihi perſuadeo.* Ces termes ſont très civils; mais le ſens en eſt, qu'il faut ou que je condamne le Docteur *Keill*, ou que je m'attende à avoir querelle avec Mr. *Leibniz*,

(q) Voyez le Tom. II. P. I. p. 201. & ſeqq.

Leibniz, comme cela eſt arrivé. C'eſt donc lui qui eſt l'aggreſſeur; car on ſait très bien dans ce Pays que j'ai toujours cherché à éviter ces diſputes, juſqu'à-ce qu'on m'ait forcé d'y entrer, auſſi-bien que la Societé Royale.

Dans ſa lettre du 4. Mars 1711. N. S. il a preſſé la Societé Royale de condamner le Docteur *Keill* avant que d'entendre les deux parties; & lorſque Mr. *Keill* a donné ſes raiſons, Mr. *Leibniz* a refuſé d'y répondre, & a prétendu qu'il y avoit de l'injuſtice à vouloir exiger une réponſe de lui; & cependant il s'eſt obſtiné à demander que l'on condamnât Mr. *Keill* (r). Ce fut ce procédé de Monſieur *Leibniz* qui obligea la Societé à faire aſſembler un Committé de ſes Membres, pour examiner tous les vieux Ecrits qui pouvoient avoir relation à cette affaire, & pour en faire un rapport. Si l'on a fait cette démarche à ſon inſçu, ç'a été ſa propre faute. Quels égards méritoit un homme qui vouloit l'emporter de hauteur ſur la Societé, & qui déclaroit qu'on ne pouvoit ſans injuſtice s'attendre qu'il défendit ſa candeur, & qu'il plaidât ſa cauſe devant elle? Si on ne lui a pas donné lieu de marquer les perſonnes qu'il auroit ſouhaité qui fuſſent exceptées du Committé, ç'a été ſimplement parce qu'il refuſoit de ſe juſtifier, parce qu'on avoit une authorité ſuffiſante pour faire aſſembler un Committé ſans ſon conſentement, & qu'il n'avoit aucun droit de former des difficultés ſur la conduite qu'on avoit tenue pour être inſtruit des faits. Si l'on n'a pas encore prononcé de jugement contre lui, c'eſt parce que le Committé n'étoit pas une aſſemblée de Jurés, & que la Societé Royale n'eſt pas une Cour de Judicature. Le Committé s'eſt contenté d'examiner les lettres & les autres vieux écrits; il a porté ſon jugement ſur cela ſeul, & a laiſſé à Monſieur *Leibniz* une pleine liberté de ſe juſtifier, s'il le pouvoit. Il ſuffit que la Societé Royale ait fait imprimer le rapport de ce Committé, avec les écrits qui en étoient le fondement, & que Monſieur *Leibniz*, dans trois ans & quatre mois qui ſe ſont écoulés depuis cette impreſſion (s), n'ait pas pu produire une ſeule preuve contre Mr. *Keill*.

Monſieur *Leibniz* dit que la *lettre* que j'appelle *diffamatoire*, n'étant pas plus piquante que ce qui a été publié contre lui, je n'ai aucune raiſon de m'en plaindre. Mais ce qu'il y a de piquant dans cette lettre conſiſte en accuſations & en réflexions injurieuſes, & entiérement deſtituées de preuves: laquelle maniére d'écrire a toujours été regardée comme très indigne, & comme n'étant employée qu'à ſoutenir les mauvaiſes cauſes. Si le *Commercium* eſt piquant, il l'eſt par rapport à des faits qu'il eſt permis

(r) Voyez le *Commercium Epiſtolicum*, pag. 110. 118. 119.

(s) Mr. *Newton* a écrit ces *Remarques* au mois de Mai 1716; & le *Commercium Epiſtolicum* avoit paru à la fin de Décembre 1712.

permis & juſte de rapporter. La lettre a été publiée d'une maniére clandeſtine & inſidieuſe, comme le ſont ordinairement les écrits *diffamatoires*: ſans le nom ni de l'Auteur ni du Mathématicien, qui a écrit la lettre que celle-là contient; ni de l'Imprimeur, ni de la Ville où l'impreſſion s'eſt faite; & elle avoit été imprimée plus de deux ans avant qu'on nous eût appris que le Mathématicien, Auteur de la lettre inſérée dans celle dont il s'agit, étoit Monſieur *Jean Bernoulli.* A l'égard du *Commercium*, il a été imprimé ouvertement à Londres par ordre de la Societé Royale.

Mr. *Leibniz* ſuppoſant que je n'ignorois pas que Mr. *Bernoulli* étoit l'Auteur de la lettre du 7. de Juin 1713, inſérée dans celle dont je viens de parler, trouve mauvais que je l'aye appellé *Mathématicien* ou *prétendu Mathématicien*; mais je ne me ſuis pas ſervi de cette expreſſion pour ravaler le mérite de Mr. *Bernoulli.* J'ai ſeulement voulu faire entendre, que le Mathématicien, Auteur de cette lettre, ayant cité Mr. *Bernoulli*, (même avec éloge, l'appellant *excellent Mathématicien*,) il s'eſt repréſenté comme une perſonne différente de Mr. *Bernoulli*; & que d'un autre côté Mr. *Leibniz* ayant fait réimprimer depuis peu cette même lettre ſous le nom de Mr. *Bernoulli*, & ſupprimé la citation (t), a marqué que Mr. *Bernoulli* en étoit l'Auteur, de ſorte que je ne ſavois lequel des deux on en devoit croire, ou du *Mathématicien* qui *prétendoit* n'être pas Monſieur *Bernoulli*, ou de Mr. *Leibniz* qui aſſûroit que c'étoit Mr. *Bernoulli* lui même.

Monſieur *Bernoulli* tient de Mr. *Leibniz* la méthode différentielle; il eſt le Chef de ſes diſciples; il a pris le parti de ſon Maître dans le Journal de Leipſic, avant que d'avoir vu le *Commercium Epiſtolicum*; il étoit donc dans ce tems-là *homo novus & rerum anteactarum parum peritus*, ce que Monſieur *Leibniz* avoit reproché à Mr. *Keill.* Ce qu'il a écrit depuis ce tems-là, n'a été que pour ſa propre défenſe, & tout ſon ſavoir en Mathématique n'empêche pas qu'il ne ſoit devenu partie dans cette diſpute. Il n'en peut donc pas être juge desintereſſé.

Mr. *Leibniz* ſe plaint que le Committé s'eſt écarté du but, en ſe jettant ſur l'examen des Suites infinies; mais il devoit conſidérer que les deux méthodes dont je me ſers, ſont deux branches d'une méthode générale d'Analyſe. Je les ai jointes enſemble dans mon Traité de l'Analyſe, envoyé par le Docteur *Barrow* à Mr. *Collins* en 1669; je les ai entremêlées dans le Traité que j'écrivis en 1671. comme j'en ai averti dans mes lettres du 10. Décembre 1672. & du 24. Octobre 1676. Dans ma lettre du 13. Juin 1676, j'ai dit que ma méthode des Suites s'étendoit preſque à tous les Problêmes, mais qu'elle ne devenoit pas générale ſans l'aide d'autres méthodes; entendant par-là, comme je m'en explique dans la lettre

(t) Dans les *Nouvelles Littéraires* du 28. Décembre 1715. pag. 413. *& ſuiv.*

lettre ſuivante, la méthode des Fluxions & la méthode des Suites arbitraires. A préſent de vouloir me ravir ces deux autres méthodes, c'eſt me reſtraindre à la méthode des Suites, & me réduire à une méthode qui n'eſt pas générale. Dans ma lettre du 24. Octobre 1676, j'appelle toutes ces méthodes priſes enſemble, ma méthode générale; comme on le peut voir dans le *Commercium Epiſtolicum* pag. 36. ligne 16. Et s'il a plu à Mr. *Leibniz* de mettre en pièces ma méthode générale, & tantôt de m'en prendre une partie, & tantôt une autre, & par-là de tronquer le reſte, il a donné une juſte occaſion à la Societé Royale d'examiner le tout enſemble. Il eſt auſſi à remarquer qu'il ſe rend perpétuellement témoignage à lui-même; mais c'eſt la coutume d'examiner la validité des témoins.

Il repréſente que le Committé de la Societé Royale a omis pluſieurs choſes qui faiſoient contre moi, & a fait imprimer tout ce qui pouvoit être tourné contre lui par des gloſes forcées. Pour prouver cela, il produit dans ſa lettre pénultième un exemple de mon ignorance, lequel il dit avoir été omis par le Committé; mais il avoue à préſent qu'il n'a pas été omis, & que ce n'a été que par mépriſe qu'il l'avoit aſſuré. Mais en récompenſe il a un autre exemple à citer, c'eſt que, dans une de mes lettres à Monſieur *Collins*, je confeſſe ne pouvoir trouver les ſeconds Segments des Sphéroides, lequel paſſage il dit n'avoir point été inſéré dans le *Commercium*. Si ce paſſage avoit été véritablement omis, je crois qu'il n'en eût été que mieux, puiſqu'il ne fait rien à la choſe en queſtion; mais bien loin d'avoir été omis, Monſieur *Collins* dans une de ſes lettres à Mr. *Jaques Gregory* du 24. Décembre 1670. & dans une autre écrite à Mr. *Bertet* du 21. Février 1671. toutes deux imprimées dans le *Commercium* pag. 24, 26. marque que ma méthode s'étendoit aux ſeconds Segments des Solides engendrés par rotation. Mr. *Oldenbourg* avoit marqué la même choſe à Mr. *Leibniz* dans une lettre à lui écrite du 8. Décembre 1674. comme on le peut voir dans le *Commercium* pag. 39. Ainſi il paroît que Mr. *Leibniz* a accuſé le Committé de la Societé Royale, ſans être ſûr de la vérité de ſon accuſation; ce qui eſt une très grande témérité, pour ne rien dire de plus fort. Le Committé étoit ſi éloigné d'agir injuſtement par rapport à Mr. *Leibniz*, qu'il a bien voulu ſe taire ſur l'ignorance qu'il avoit de la Géométrie dans ce tems-là, & omettre pluſieurs faits qui lui auroient été déſavantageux, tels ſont les deux lettres que j'avois alors par devers moi (u) comme auſſi le Paragraphe de la Préface du I. Tome des Oeuvres Mathématiques de *Wallis* (x). Ils auroient pu remarquer auſſi que la copie d'une lettre de Mr. *Gregory* du 5.

 Septem-

(u) Ces deux Lettres écrites à Mr. *Newton* par Meſſieurs *Leibniz* & *Wallis*, en 1693. & 1695. ſe trouvent ci-après.

(x) Ce paragraphe ſe trouve auſſi ci-après.

Septembre 1670. fut envoyée à Mr. *Leibniz* au mois de Juin 1676, dans un Recueil des lettres de Mr. *Gregory*.

Le Committé affirme dans ſon rapport, que tout ce qui avoit relation à l'affaire qu'il étoit chargé d'examiner, avoit été extrait des lettres, des Regîtres & autres vieux écrits, leſquels il regardoit comme fidèles & authentiques. Mr. *Leibniz* les accuſe de n'avoir pas donné les lettres entiéres, tant ſur ce qui regardoit l'affaire en queſtion, que ſur ce qui n'y avoit aucun rapport; comme s'il n'étoit pas permis de citer ou tranſcrire un paſſage d'un livre ſans tranſcrire le livre tout entier. Il ſe plaint donc que le *Commercium Epiſtolicum* n'eſt pas à beaucoup près aſſez étendu; mais quand il faut qu'il y réponde, il ſe plaint qu'il l'eſt trop, & qu'il demanderoit une réponſe du même volume. A ce compte il faut écarter toutes les Piéces authentiques du Procès, pour faire dégénérer la queſtion en conteſtations frivoles ſur la Philoſophie, & ſur d'autres matiéres qui ne font rien à la choſe. Il faut que le grand Mathématicien, qui dans la lettre du 7. Juin 1713. adreſſée à Mr. *Leibniz* cache ſon nom, afin de mieux paſſer pour juge deſintereſſé; il faut, dis-je, que ce grand Mathématicien ſe démaſque à préſent, prenne parti dans la diſpute, & qu'il envoye un défi à tous les Mathématiciens d'Angleterre par l'entremiſe de Mr. *Leibniz*: comme ſi un duel, ou peut-être une bataille entre ce qu'il appelle mes enfans perdus & cette armée de Diſciples, dont il ſe vante, étoit une voye plus propre pour décider qui a raiſon dans cette diſpute, qu'un appel fait à d'anciens & authentiques manuſcrits; & qu'il fallût qu'à l'avenir les Mathématiques fuſſent remplies des proueſſes d'une Chevalerie errante, au lieu de raiſons & de démonſtrations.

Monſieur *Leibniz* avoue que lorſqu'il étoit à Londres pour la ſeconde fois, il vit quelques-unes de mes lettres entre les mains de Mr. *Collins*, & entr'autres celles qui regardent les Suites; & il fait mention de deux de ces lettres en particulier, ſavoir de celle dont la date eſt du 24. Octobre 1676. & de celle où il dit que je confeſſe mon ignorance ſur les ſeconds Segments. Par conſéquent il n'y a aucun lieu de douter qu'il ne ſouhaitât de voir ſur-tout la lettre qui contenoit mes Suites principales, particuliérement celles qui regardoient la maniére de trouver *l'Arc* par le moyen du *Sinus*, & le *Sinus* par le moyen de l'*Arc*, & la démonſtration de ces Suites: laquelle lettre peu de mois auparavant il avoit prié Mr. *Oldenbourg* d'obtenir pour lui de Mr. *Collins*, & qui a pour titre, *Analyſis per æquationes numero terminorum infinitas*. Cependant il nous dit, qu'il ne ſait point dans quel endroit j'ai appliqué la méthode des Fluxions, & qu'il n'en trouve rien dans le *Commercium Epiſtolicum*, où cette Analyſe auſſi-bien que mes lettres du 10. Décembre 1672. du 13. Juin 1676. & du 24. Octobre 1676. ſe trouvent inſérées. Je m'imagine qu'il veut dire qu'il n'y trouve pas cette méthode, parce qu'il n'y trouve

trouve aucune lettre pointée. Par la même maniére de raiſonner, lui & Mr. *Bernoulli* peuvent conclure qu'ils ne trouvent rien de la méthode des Fluxions dans l'introduction à mon livre des *Quadratures*.

Il dit auſſi qu'il ne voit point où j'ai expliqué la méthode que je m'attribue, qui eſt de prendre des Suites arbitraires; mais s'il lui plaît de regarder à la page 56. & à la 86. du *Commercium Epiſtolicum*, il verra que je poſſedois cette méthode dans l'année 1676. & même cinq ans auparavant. Il peut avoir vu dans le ſecond volume des Oeuvres du Docteur *Wallis*, page 393. ligne 32. que cette méthode n'a pas beſoin d'une explication plus ample que celle que j'en donne, & qui eſt là raportée. Je ne diſconviens pas que Mr. *Leibniz* ne l'ait pu trouver de lui-même; mais ç'a été depuis moi, & on ſait que les ſeconds inventeurs n'ont pas de droit à l'invention.

Il prétend que dans mon livre des *Principes* pag. 253. & 254. je lui ai paſſé qu'il tenoit indépendamment de moi l'invention du Calcul différentiel; & que de m'en attribuer préſentement l'invention à moi-même, c'eſt revoquer la conceſſion que je lui ai faite. Mais dans le Paragraphe qu'il cite, je ne trouve pas un ſeul mot qui le favoriſe. Tout au contraire, j'y repréſente que j'avois donné avis de ma méthode à Mr. *Leibniz*, avant qu'il m'eût donné avis de la ſienne; & je le mets dans l'obligation de prouver qu'il eût trouvé la méthode avant la date de ma lettre, c'eſt-à-dire, huit mois pour le moins avant la date de la ſienne. De plus, en renvoyant, comme je fais, aux lettres que nous nous étions écrites Mr. *Leibniz* & moi, dix ans auparavant, j'ai laiſſé aux Lecteurs à conſulter ces lettres, qui peuvent ſervir à expliquer le Paragraphe en queſtion. Car ils pouvoient voir par ces lettres, que cinq ans avant qu'elles fuſſent écrites, c'eſt-à-dire, en 1671. j'avois compoſé un Traité de cette méthode & de la méthode des Suites, jointes enſemble. Ainſi ce Paragraphe qu'il cite de mon livre, donne ſuffiſamment à entendre en peu de mots, ce qu'on doit penſer ſur ce ſujet; le but du livre n'étant pas de diſcuter cette matiére.

Il dit que lorſqu'il étoit à Londres pour la premiére fois, ce qui fut dans les mois de Janvier & de Février 1673, il ne ſavoit rien des Suites infinies, ni de la *Géométrie avancée*; & même qu'il n'avoit point la connoiſſance de Mr. *Collins*, comme on l'a *feint malicieuſement*. Mais qui l'a feint, ou quelle néceſſité y avoit-il de le feindre? c'eſt ce que j'ignore. Dans ce tems-là le Docteur *Pell* lui avoit parlé de la Suite de *Mercator* pour la Quadrature de l'*Hyperbole*; il emporta à Paris le livre de *Mercator*, quoiqu'il n'entendit pas encore la *Géométrie avancée*; & ceux à qui Mr. *Collins* avoit communiqué mes Suites & celles de Mr. *Gregory*, avoient pu lui en parler, & les lui communiquer auſſi, ſans qu'il connût Monſieur *Collins*.

Il

Il dit qu'à ſon arrivée de Londres à Paris, ſes premiéres lettres roulérent ſur d'autres ſujets que la Géométrie, ce qui dura juſqu'à-ce que Mr. *Huygens* l'eût inſtruit de ces matiéres : qu'il trouva la *Quadrature arithmétique* du Cercle vers la fin de l'année 1673 : qu'il commença à en écrire à Mr. *Oldenbourg* l'année ſuivante : que peu de tems après il trouva la méthode générale d'une Suite arbitraire, & le *Calcul différentiel* dans l'année 1676. l'ayant déduit de la Suite des Nombres dont on conſidére les différences; & que dans ſa lettre du 27. Août 1676. par les mots *certa Analyſi* il faut entendre l'Analyſe différentielle. Mais n'ai-je pas un droit égal de me rendre témoignage à moi-même, & d'aſſurer que j'ai inventé les méthodes des Suites & des Fluxions dans l'année 1665 : que je les ai pouſſées plus loin dans l'année 1666 : qu'à préſent j'ai entre les mains pluſieurs papiers Mathématiques écrits en 1664, 1665, & 1666, dont quelques-uns ſont avec date, parmi leſquels il s'en trouve un, dont la date eſt du 13. Novembre 1665, lequel contient la directe méthode des Fluxions en ces termes :

Prob. *Etant donnée une Equation exprimant la relation de deux ou pluſieurs lignes* x, y, z, &c. *décrites dans le même tems, par deux ou pluſieurs Mobiles* A, B, C, &c. *trouver la relation de leurs viteſſes*, p, q, r, &c.

» SOLUTION. Mettez tous les termes d'un ſeul côté de l'Equation,
» en ſorte qu'ils ſoient égaux à zéro ; multipliez chaque terme par au-
» tant de fois $\frac{p}{x}$ que x a de dimenſions dans ce terme : Secondement,
» multipliez chaque terme par autant de fois $\frac{q}{y}$ que y a de dimenſions
» dans ce terme : Troiſiémement multipliez chaque terme par autant
» de fois $\frac{r}{z}$ que z a de dimenſions dans ce terme, *&c.* ; & la ſomme
» de ces produits ſera égale à zéro, laquelle équation donne la relation
» de p, q, r, &c. «

Je puis ajouter que cette Solution y eſt illuſtrée par pluſieurs exemples : qu'elle y eſt démontrée, & qu'elle y eſt appliquée à des Problêmes qui regardent les Tangentes & les Curvatures des Courbes : qu'un autre papier, dont la date eſt du 16. Mai 1666. contient en ſept Propoſitions une méthode générale de réſoudre les Problêmes qui regardent le mouvement ; & que la derniére de ces Propoſitions eſt la même que le problême mentionné ci-deſſus, daté du 13. Novembre 1665. Que dans un petit Traité, écrit au mois de Novembre 1666, leſdites ſept Propoſitions ſont encore répétées, avec cette différence, que la ſeptiéme y eſt pouſſée juſques-là que de n'être point arrêtée par les fractions ou les quantités ſourdes, ni même par celles qu'on appelle à préſent Tranſcendantes : qu'une

qu'une huitiéme Propoſition eſt ajoutée à ce Traîté, contenant la Méthode Inverſe des Fluxions, telle que je l'avois en ce tems-là : c'eſt-à-dire, autant qu'elle peut dépendre de la Quadrature des Figures curvilignes des trois Régles, ſur leſquelles eſt fondée mon Analyſe *per Æquationes numero terminorum infinitas*, & de la plûpart des autres Théorémes contenus dans le *Scholium* de la dixiéme Propoſition de mon livre des Quadratures : que dans ce Traité, lorſque l'Aire provenante de quelqu'un des termes de l'Ordonnée ne peut pas être exprimée par l'Analyſe vulgaire, elle eſt repréſentée en écrivant le Symbole ▭ au devant de ce terme: par exemple, ſi l'Abſciſſe eſt x, & l'Ordonnée $a\,x - b + \frac{b\,b}{a + x}$, l'Aire totale eſt $\frac{o}{2}\,a\,x\,x - b\,x + ▭\,\frac{b\,b}{a + x}$: que dans ce Traité je me ſuis quelquefois ſervi de lettres marquées d'un ſeul point, pour dénoter des quantités qui enveloppoient des Fluxions premiéres, & quelquefois des mêmes lettres marquées de deux points pour des quantités qui enveloppoient des Fluxions ſecondes: qu'un Traité plus ample que j'avois écrit en 1671, & mentionné dans ma lettre du 24. Octobre 1706. étoit fondé ſur ce petit Traité, & commençoit par la reduction des Quantités finies en Suites convergentes, & par la Solution de ces deux Problêmes. 1. *Relatione Quantitatum fluentium inter ſe data, Fluxionum relationem determinare.* 2. *Expoſita æquatione Fluxiones Quantitatum involvente, invenire relationem Quantitatum inter ſe*: Et que, lorſque j'écrivois ce Traité, j'avois rendu mon Analyſe ſi univerſelle, par le moyen de la méthode des Suites, & de la méthode des Fluxions jointes enſemble, qu'elle s'étendoit à preſque toute ſorte de Problêmes: ce que j'ai mentionné dans ma lettre du 13. de Juin 1676; & que c'eſt là cette Méthode que j'avois décrite dans ma lettre du 10. Décembre 1672.

Dans l'année 1684. Mr. *Leibniz* publia ſeulement les Elémens du Calcul différentiel, qu'il appliqua à quelques queſtions ſur les Tangentes, & à quelques autres qui regardent la Méthode *de Maximis & Minimis*, comme *Fermat* & *Gregory* avoient fait avant lui; & fit voir comment on pouvoit procéder dans ces ſortes de queſtions ſans ôter les Quantités irrationnelles; mais il ne paſſa pas aux Problêmes de la plus haute Géométrie. Le livre des *Principes Mathématiques* contient les premiers exemples qui ayent été publiés, de l'application de ce Calcul aux Problêmes les plus relevés; & c'eſt dans ce ſens que j'ai entendu ce que Mr. *Leibniz* avoit dit dans les Actes de Leipſic du mois de Mai 1700. pag. 206. Mais Mr. *Leibniz* fait remarquer, que ce qu'il avoit dit alors devoit s'entendre d'un Artifice particulier *de Maximis & Minimis*, dont il convient que j'étois inſtruit lorſque je donnai, dans mes *Principes*, la figure du

Vaiſſeau, ou du Solide de la moindre réſiſtance. Mais puiſque cet Artifice ſuppoſe la Méthode différentielle comme connue, & qu'il s'étend encore au delà: que d'ailleurs c'eſt à cet Artifice que Mr. *Leibniz* & ſes diſciples doivent la ſolution des Problêmes dont il fait le plus de cas; enfin, puiſque Mr. *Leibniz* appelle cet Artifice une Méthode de la plus haute conſéquence & de la plus grande étendue, je me contente de l'aveu qu'il fait, que j'ai été le premier qui dans un ouvrage donné au public, ai prouvé que cet Artifice m'étoit connu.

Dans l'année 1689. Mr. *Leibniz* publia comme ſiennes, les Propoſitions principales du livre des *Principes*, dans trois écrits différens, intitulés: *Epiſtola de Lineis Opticis*: *Schediaſma de reſiſtentia Medii & Motu Projectilium gravium in Medio reſiſtente*: & *Tentamen de Motuum Cœleſtium cauſis*: prétendant qu'il avoit trouvé toutes ces Propoſitions avant que le Livre des *Principes* parût; & afin de mieux s'approprier la principale de ces Propoſitions, il jugea à propos d'y joindre uné démonſtration qu'il avoit fabriquée. Mais comme elle étoit erronée, il ſe trahit lui-même, & fit voir qu'il n'entendoit pas la maniére d'opérer dans les ſecondes Différences. Ce fut là le ſecond eſſai donné au public, où l'on appliquât cette méthode aux Problêmes de la plus haute Géométrie. Juſques-là cette méthode étoit peu connue; mais un an ou deux après elle commença à ſe divulguer.

Le Docteur *Barrow* avoit publié ſa Méthode différentielle pour les Tangentes, l'année 1670. Mr. *Gregory* à l'aide de cette méthode, comparée avec la ſienne, déduiſit une méthode générale pour les Tangentes, qui n'avoit pas beſoin de Calcul; il en donna avis à Mr. *Collins* par une lettre du 5. Septembre 1670. Mr. *Sluſius* en Novembre 1672. donna avis d'une pareille méthode à Mr. *Oldenbourg*. Dans une de mes lettres du 10. Décembre 1672, j'envoyai à Monſieur *Collins* une Méthode ſemblable, & j'ajoutai, que j'en avois parlé au Docteur *Barrow*, dans le tems qu'il faiſoit imprimer ſes *Lectiones Geometricæ*: que je concevois que les méthodes de Mr. *Gregory* & de *Sluſius* étoient les mêmes que la mienne; & que cette méthode n'étoit qu'une branche ou un corollaire d'une méthode plus générale, laquelle ſans aucun calcul pénible s'étendoit nonſeulement aux Tangentes, mais encore aux autres Problêmes plus abſtrus, tels que ſont ceux qui regardent les Courbures, les Aires, les Longueurs, les Centres de gravité des Courbes, &c. & cela ſans être obligé de délivrer les Equations des Quantités irrationnelles. J'ajoutai auſſi que j'avois joint cette méthode à celle des Suites infinies, voulant dire, dans le Traité que j'avois compoſé en 1671. Mr. *Oldenbourg* en Juin 1676. envoya à Mr. *Leibniz* des copies de ces deux lettres, parmi les extraits des lettres de Mr. *Gregory*; & Mr. *Leibniz*, dans ſa lettre du 21. Juin 1677, n'envoya rien en échange qui n'eût déja été fait auparavant, &

& dont il n'eût reçu avis par ces lettres. La Méthode différentielle pour les Tangentes, qu'il envoya pour lors, n'étant que la Méthode même de *Barrow*, qu'il avoit déguiſée ſous une Notation nouvelle, & qu'il avoit étendue aux méthodes des Tangentes de *Gregory* & de *Sluſius*, aux Equations enveloppant des quantités irrationnelles, & au cas le plus ſimple de mes Quadratures. Mais on ne peut pas me reprocher la même choſe par rapport à Mr. *Barrow*: il avoit vu mon Traité d'Analyſe en 1669, & avoit témoigné qu'il lui avoit plu (y). Et avant que les *Leçons Géométriques* paruſſent, j'avois déduit la Méthode des Tangentes de Mrs. *Gregory* & *Sluſius* de ma Méthode générale. Alors Mr. *Leibniz* non-ſeulement ignoroit la haute Géométrie, mais même l'Algèbre vulgaire.

Dans ſa lettre du 27. Août 1676, on lit ces paroles; *Quod dicere videmini pleraſque difficultates (exceptis Problematibus* Diophantæis) *ad Series infinitas reduci, id mihi non videtur. Sunt enim multa uſque adeo mira & implexa, ut neque ab æquationibus pendeant, neque ex Quadraturis. Qualia ſunt ex multis aliis Problemata Methodi Tangentium inverſæ.* Mais lorſque je lui eus fait réponſe, que ces ſortes de Problêmes étoient en mon pouvoir, il repliqua dans ſa lettre du 21. de Juin 1677, qu'apparemment je voulois dire par les Suites infinies, mais qu'il l'entendoit par les Equations vulgaires; à quoi on peut voir une réponſe dans le *Commercium Epiſtolicum*, pag. 92.

Il dit qu'on peut juger que, lorſqu'il écrivit ſa lettre du 27. Août 1666, il avoit quelque entrée dans le Calcul différentiel, parce que dans cette lettre il marque qu'il avoit réſolu le Problême de Mr. *de Beaune* par une *Analyſe certaine.* Mais que dira-t-il, ſi on lui fait voir que ce Problême peut ſe réſoudre par une *Analyſe certaine*, ſans qu'il ſoit beſoin de la méthode différentielle? Car pour cela il ne faut point d'autre Analyſe que celle-ci, ſavoir que l'Ordonnée de la Courbe demandée croiſſe en progreſſion géométrique, quand l'Abſciſſe croît en progreſſion arithmétique; & que par conſéquent l'Abſciſſe & l'Ordonnée ont entr'elles la même relation que le Logarithme & ſon Nombre correſpondant. Mais d'inférer de là que Mr. *Leibniz* avoit eu entrée dans la Méthode différentielle, c'eſt préciſément comme ſi l'on diſoit qu'*Archimède* y étoit entré, parce qu'il ſavoit tirer les Tangentes de la Spirale, quarrer la Parabole, & qu'il avoit trouvé la proportion de la Sphére au Cylindre; ou comme ſi l'on diſoit que Mrs. *Cavallerius*, *Fermat* & *Wallis* y étoient entrés,

 parce

(y) Mr. *Barrow* envoya ce Traité à Mr. *Collins*, comme un ouvrage que Mr. *Newton* avoit compoſé, & lui dit, que par cet écrit & par d'autres que Mr. *Newton* lui avoit envoyés auparavant, il paroiſſoit qu'il y avoit déja quelques années qu'il avoit inventé la méthode qui y étoit décrite, & qu'il en avoit une application générale. Voyez la lettre de Mr. *Collins* à Mr. *Strode*, du 26. Juillet 1672, inſérée dans le *Commercium Epiſtolicum*, pag. 28.

parce qu'ils avoient fait pluſieurs autres choſes qui étoient du même genre de celles que nous venons de marquer.

Le $\frac{18}{29}$ *de Mai* 1716.

APPENDIX.

Lorſque le Committé de la Societé Royale publia le *Commercium Epiſtolicum*, les lettres & autres papiers qui étoient en ma poſſeſſion ne lui furent pas communiqués. J'avois deux lettres, l'une de Mr. *Leibniz* datée du $\frac{7}{17}$ de Mars 1693. & l'autre du Docteur *Wallis* datée du 10. d'Avril 1695. leſquelles, ſur une occaſion qui le demandoit, furent produites il y a deux ans, examinées & placées dans les Archives de la Societé Royale. La premiére fait voir ce que Mr. *Leibniz* penſoit ſur cette matiére, avant qu'il connû mes Symboles, ou qu'il ſût rien de plus de la méthode des Fluxions, que ce qu'il en avoit appris par mes lettres & mes autres papiers, écrits dans l'année 1676. & auparavant, ou de mes *Principes Mathématiques*, c'eſt-à-dire, avant le tems que j'euſſe pu former le deſſein de le tromper. On y verra clairement, que dans ce tems-là il me donnoit ſur lui le rang de préſéance. Si l'on compare la ſeconde de ces lettres avec la Préface des Oeuvres Mathématiques du Docteur *Wallis*, on pourra découvrir quelle opinion les Mathématiciens Anglois, auſſi-bien que ceux du déhors, avoient de cette affaire, lorſqu'ils apprirent que cette Méthode différentielle commençoit à faire du bruit en Hollande, & qu'on en attribuoit l'invention à Mr. *Leibniz*. On a ajouté ici la premiére de ces deux lettres toute entiére, & une partie de la ſeconde.

LETTRE DE MR. LEIBNIZ A MR. NEWTON,

écrite en 1693.

» Quantum tibi Scientiam rerum Mathematicarum totiuſque Naturæ
» debere arbitrer, occaſione data, etiam publicè ſum profeſſus. Mi-
» rificè ampliaveras Geometriam tuis Seriebus, ſed edito Principio-
» rum Opere oſtendiſti patere tibi etiam quæ Analyſi receptæ non ſub-
» ſunt. Conatus ſum ego quoque Notis commodis adhibitis, quæ Dif-
» ferentias & Summas exhibent, Geometriam illam, quam Tranſcenden-
» tem appello, Analyſi quodammodo ſubjicere, nec res malè proceſſit.
» Sed à te adhuc magni aliquod expecto ad ſummam manum imponen-
» dam, tum ut Problemata, quæ ex data Tangentium proprietate quæ-
» runt Lineas, reducantur optimè ad Quadraturas; tum ut Quadraturæ
» ipſæ

» ipſæ (quod valde vellem,) reducantur ad Curvarum rectificationes,
» ubique ſuperficierum aut corporum dimenſionibus ſimpliciores.

» Sed ſuper omnia optem, ut Geometricis abſolutis, naturam, uti cœ-
» piſti Mathematicè tractare pergas; in quo genere certè tu unus cum
» pauciſſimis ingens operæ pretium feciſti. Mirificum eſt quod inveniſti
» Ellipſes Keplerianas prodire, ſi tantummodò Attractio, ſive Gravita-
» tio, & Trajectio in Planeta concipiantur. Tametſi enim eò inclinem,
» ut credam hæc omnia fluidi ambientis motu ſive effici, ſive regi, ana-
» logia gravitatis & magnetiſmi apud nos, nihil tamen ea res dignitati &
» veritati inventi tui detraxerit.

» Quæ ſummus & ipſe Mathematicus *Chriſtianus Huygenius* in tua no-
» tavit Appendice Libelli de Cauſa Luminis & Gravitatis, expenſa ti-
» bi non dubito; & ſententiam viciſſim tuam velim. Veſtra enim amica
» collatione potiſſimum, qui in hoc genere eminetis, erui veritas poteſt.

» Cùm verò maximum tu quoque lumen ipſi Dioptricæ intuleris, ex-
» plicatis colorum phænomenis inexpectatis, velim quid ſentias de Huy-
» geniana explicatione radiationis, utique ingenioſiſſima, cùm feliciter adeo
» prodeat lex ſinuum. Significavit mihi *Huygenius*, neſcio quæ nova phæ-
» nomena colorum ſibi à te communicata. Ego valde optem ut ratio
» colorum, quos fixos vocant, ex apparentibus deduci poſſit; ſeu ut oſ-
» tendatur ratio efficiendi per refractiones, ut tota aliqua ſuperficies cer-
» tum colorem oſtendat.

» In Librorum apud Anglos editorum indicibus occurrêre mihi aliquo-
» ties Libri Mathematici autore *Newtono*, ſed dubitavi an a te eſſent,
» quod vellem, an ab alio homonymo.

» *Heinſius* noſter redux teſtis fuit benevolentiæ erga me tuæ. De cul-
» tu verò meo erga te, non ille tantùm teſtari poteſt, ſed & *Stepneius*,
» tecum ejuſdem olim Collegii habitator, nunc Magnæ Britanniæ Regis
» negotia apud Cæſarem, nuper apud Sereniſſimum Electorem Brande-
» burgicum, curans.

» Hæc ſcribo magis ut ſtudia erga te mea intelligas, quæ nihil tot
» annorum ſilentio amisêre, quàm ut tua ego ſtudia, quibus auges hu-
» mani generis opes, interrumpere velim vacuis litteris & ſupervacuis.
» Vale.

Dabam Hanoveræ $\frac{7}{17}$ *Martii* 1693.

Extrait d'une Lettre de Mr. Wallis *à Mr.* Newton, *datée d'Oxford le* 10. *Avril* 1695, *traduit de l'Anglois.*

JE ſouhaiterois que vous vouluſſiez faire imprimer vos deux grandes Lettres du mois de Juin, & du mois d'Octobre 1676. On m'a don-

né avis de Hollande, que les Amis que vous avez en ce Pays-là ſouhaiteroient que quelque choſe de cette nature pût être donné au Public, par la raiſon que votre Doctrine des *Fluxions* y eſt fort applaudie, ſous le nom de *Calcul différentiel de Mr. Leibniz.* J'ai reçu cet avis lorſque toutes les feuilles de mon Livre étoient tirées, à l'exception d'une partie de la Préface; ainſi tout ce que j'ai pu faire a été, pendant que la preſſe ſe repoſoit, d'y inſérer le paſſage que vous y trouverez. Ce n'eſt pas avoir de juſtes égards pour votre réputation, ni pour celle de la Nation, que de laiſſer dans votre cabinet des Piéces d'un très grand prix, puiſqu'il pourra arriver enfin que d'autres ſe ſaiſiront de la réputation qui vous eſt due.

Voici le Paſſage qu'on vient de citer, & qui eſt tiré de la Préface de Mr. Wallis, *imprimée au mois d'Avril de l'année* 1695.

QUæ in ſecundo Volumine habentur, in Præfatione eidem præfixa dicitur. Ubi (inter alia) habetur *Newtoni* Methodus de *Fluxionibus* (ut ille loquitur) conſimilis Naturæ cum *Leibnitii* (ut hic loquitur) *Calculo Differentiali*, (quod qui utramque Methodum contulerit, ſatis animadvertat, utut ſub loquendi formulis diverſis,) quam ego deſcripſi (*Algebræ Cap.* 91. &c. præſertim *Cap.* 95.) ex binis *Newtoni* Litteris (aut earum alteris) Junii 13, & Octob. 24. 1676, ad *Oldenburgium* datis, cum *Leibnitio* tum communicandis (iiſdem ferè verbis, ſaltem leviter mutatis, quæ in illis Litteris habentur;) ubi Methodum hanc *Leibnitio* exponit, tum ante decem annos, nedum plures, ab ipſo excogitatam. Quod moneo ne quis cauſetur de hoc *Calculo Differentiali* nihil à nobis dictum eſſe.

Fragment de l'Extrait des Oeuvres de Mr. Wallis, *donné dans les* Acta Eruditorum *du mois de Juin* 1696. *pag.* 257. 258.

CÆterùm ipſe *Newtonus*, non minus candore quàm præclaris in rem Mathematicam meritis inſignis, publicè & privatim agnovit, *Leibnitium* tum, cum (interveniente celeberrimo Viro *Henrico Oldenburgio* Bremenſi Societatis Regiæ Anglicanæ tunc Secretario) inter ipſos (ejuſdem jam tum Societatis Socios) Commercium intercederet, id eſt jam ferè ante annos viginti & ampliùs, Calculum ſuum differentialem, Seriesque infinitas, & pro iis quoque methodos generales habuiſſe; quod *Walliſius*, in Præfatione Operum factæ inter eos communicationis mentionem faciens, præteriit, quoniam de eo fortaſſe non ſatis ipſi conſtabat. Cæterum Differentiarum conſideratio Leibnitiana, cujus mentionem facit

Walliſius,

Walliſius, (ne quis ſcilicet, ut ipſe ait, cauſaretur de Calculo Differentiali nihil ab ipſo dictum fuiſſe) meditationes aperuit, quæ aliunde non æquè naſcebantur. Eſt enim Differentia Analyticum quiddam, & Calculi capax, & quod rei caput eſt, Summæ reciprocum.

REMARQUE DE Mr. NEWTON.

DAns mes Lettres du 13. Juin & du 24. Octobre 1676, j'ai affirmé que j'avois la Méthode des Fluxions quelques années auparavant; mais je n'ai jamais avoué que Mr. *Leibniz* eût la Méthode différentielle avant l'année 1677. Je ne ſavois rien de ſes prétentions en ce tems là, puiſque ce ne fut que dans ſa Lettre du 21. Juin de la même année, qu'il commença à les manifeſter. Je n'ai point accordé que ſa Méthode des Tranſmutations fût une Méthode générale pour les Suites, & je ne ſavois point alors que la Suite qu'il m'avoit envoyée lui eût été envoyée l'année d'auparavant par Mr. *Oldenbourg*, & eût été inventée par Mr. *Gregory* dans l'année 1671. La Méthode des Tranſmutations n'eſt pas une méthode pour les Suites, mais un Théorême particulier pour la Tranſmutation des Figures de l'une en l'autre, tels que ſont ceux de *Gregory* & de *Barrow*. A l'égard du *Scholium* qui eſt mis à la ſuite du ſecond Lemme du ſecond Livre de mes *Principes Mathématiques*, & qu'on a tant cité mal-à-propos contre moi, il n'a pas été écrit dans le deſſein de faire honneur de ce Lemme à Mr. *Leibniz*, mais bien de m'en aſſurer la poſſeſſion. Que Mr. *Leibniz* l'ait inventé après moi, ou l'ait eu de moi, c'eſt une queſtion qui n'eſt de nulle conſéquence, puiſque les ſeconds inventeurs n'ont proprement aucun droit à l'invention.

Le Docteur *Wallis*, par une Lettre du premier Décembre 1696, imprimée dans le troiſiéme Tome de ſes Oeuvres, donna avis à Mr. *Leibniz* du paſſage qu'il avoit inſéré dans la Préface de ſon premier Volume, & dont on a fait mention ci-deſſus; & Mr. *Leibniz* ne nia point alors ce que Mr. *Wallis* avoit avancé, ſavoir que dans l'année 1676, je lui avois expliqué la méthode des Fluxions, trouvée par moi dix ans ou plus auparavant; & ne forma à ce ſujet aucune plainte contre lui. Dans ſa Lettre du 29. Mars 1697, il dit: *De te autem queri nunquam mihi in mentem venit, quem facilè appareret noſtra in Actis Lipſienſibus prodita non ſatis vidiſſe.* Il convenoit que ces méthodes étoient ſemblables, comme Mr. *Wallis* l'avoit affirmé; c'eſt pour cela que dans ſa Lettre du 28. Mai 1697, il dit qu'il les appelloit du commun nom de *Méthode infinitéſimale*: à quoi il ajoute que comme l'*Analyſe* de *Viete* & celle de *Deſcartes* étoient appellées du commun nom d'*Analyſe Spécieuſe*, quoiqu'elles différaſſent en quelque choſe, auſſi mon *Analyſe Infinitéſimale* & la ſienne pouvoient différer en quelque choſe; voulant dire par-là qu'elles différoient par rap-

port

port aux Additions qu'il y avoit faites. Là-deſſus il excuſe Mr. *Wallis* de n'avoir pas fait mention de ces Additions, ſur ce qu'il ne les avoit pas vues dans les Actes de Leipſic, & déclare qu'il ne lui eſt jamais venu en penſée de ſe plaindre de lui, pour quelque autre ſujet que ce fût.

Mais ſi *Deſcartes* n'a jamais prétendu être Auteur de l'*Analyſe Spécieuſe* de *Viete*, Mr. *Leibniz* en a agi autrement par rapport à la Méthode Infinitéſimale, qu'il a toujours appellée ſa Méthode; ce qui donna lieu à Mr. *Fatio* d'écrire ce qui ſuit.

Extrait du Traité de Mr. Nicolas Fatio de Duillier, *intitulé* Inveſtigatio Geometrica Solidi rotundi, in quo minima fiat reſiſtentia, *publié en* 1699.

» QUæret forſan *Cl. Leibnitius*, unde mihi cognitus ſit iſte Calculus quo
» utor. Ejus equidem fundamenta, ac pleraſque Regulas proprio
» marte, anno 1687, circa menſem Aprilem & ſequentes, aliiſque
» deinceps annis, inveni; quo tempore neminem eo Calculi genere præ-
» ter me ipſum, uti putabam. Nec mihi minùs cognitus foret, ſi non-
» dum natus eſſet *Leibnitius*. Aliis igitur glorietur Diſcipulis, me certè
» non poteſt. Quod ſatis patebit, ſi olim Litteræ quæ inter clariſſimum
» *Hugenium* meque interceſſerunt, publici juris fiant. *Newtonum* tamen
» primum ac pluribus annis vetuſtiſſimum hujus Calculi Inventorem,
» ipſa rerum evidentia coactus agnoſco: a quo utrum quicquam mutua-
» tus ſit *Leibnitius*, ſecundus ejus Inventor, malo eorum, quàm meum
» ſit judicium, quibus viſæ fuerint *Newtoni* Litteræ aliique ejuſdem ma-
» nuſcripti Codices. Neque modeſtioris *Newtoni* ſilentium, aut prona
» *Leibnitii* ſedulitas inventionem hujus Calculi ſibi paſſim tribuentis, ul-
» lis imponet, qui ea pertractarint, quæ ipſe evolvi, Inſtrumenta.

REMARQUE DE Mr. NEWTON.

Monſieur *Fatio* parle ici en témoin. Il rapporte ce qu'il a vu, & ſon témoignage eſt d'autant plus fort, qu'il eſt porté contre ſes propres interêts; & que n'étant point Anglois, il peut moins être ſoupçonné d'avoir voulu me favoriſer. Il entendoit nos Méthodes; & il étoit en état de former un jugement véritable, à l'aide de ce qu'il avoit vu & connu.

LETTRE

LETTRE DE MR. LEIBNIZ

A Mr. CHAMBERLAYNE à Londres.

Vienne ce 28. *Avril* 1714.

MONSIEUR,

JE vous ſuis obligé tant de la communication de la Lettre de l'inſigne Mr. *Wotton*, qui m'eſt plus favorable que je ne pouvois eſpérer, & que je vous prie de remercier de ſes bons ſentimens; que de votre offre obligeante de moyenner une bonne intelligence entre Mr. *Newton* & moi. Un nommé Mr. *Keill* inſéra quelque choſe contre moi dans une de vos *Tranſactions Philoſophiques* (z); j'en fus fort ſurpris, & j'en demandai réparation par une Lettre à Mr. *Sloane* Secrétaire de la Societé. Mr. *Sloane* m'envoya un diſcours de Mr. *Keill*, où il juſtifioit ſon droit d'une maniére qui attaquoit même ma bonne foi. Je pris cela pour une animoſité particuliére de ce perſonnage, ſans avoir le moindre ſoupçon que la Societé, & même Mr. *Newton*, y euſſent part: & ne trouvant pas à propos d'entrer en diſpute avec un homme mal inſtruit des affaires antérieures, & ſuppoſant d'ailleurs que Mr. *Newton* lui-même, mieux informé de ce qui s'étoit paſſé, me feroit rendre juſtice, je continuai ſeulement à demander la ſatisfaction qui m'étoit due.

Mais je ne ſçai par quelle chicane & quelle ſupercherie, quelques-uns firent enſorte qu'on prît la choſe comme ſi je plaidois devant la Societé, & me ſoumettois à ſa juriſdiction, à quoi je n'avois jamais penſé; & ſelon la juſtice, on devoit me faire ſavoir que la Societé vouloit examiner le fond de l'affaire, & l'on devoit me donner lieu de déclarer ſi j'y voulois propoſer mes raiſons, & ſi je ne tenois aucun des Juges pour ſuſpect. Ainſi, on n'y a prononcé qu'*una parte audita*, d'une maniére dont la nullité eſt viſible. Auſſi ne crois-je pas que le Jugement qu'on a porté puiſſe être pris pour un Arrêt de la Societé.

Cependant Mr. *Newton* l'a fait publier dans le monde par un Livre imprimé exprès pour me décréditer, & envoyé en Allemagne, en France, & en Italie, comme au nom de la Societé (aa). Ce Jugement prétendu,

(z) Voyez la Lettre ſuivante de Mr. *Newton.*

(aa) Mr. *Leibniz* veut parler du *Commercium Epiſtolicum* &c.

tendu, & cet affront fait ſans ſujet à un des plus anciens Membres de la Societé même, & qui ne lui a point fait deshonneur, ne trouvera guères d'Approbateurs dans le monde; & dans la Societé même, j'eſpére que tous les Membres n'en conviendroient pas. Des habiles François, Italiens, & autres deſaprouvent hautement ce procédé, & s'en étonnent; & on a là-deſſus des Lettres en main; les preuves produites contre moi leur paroiſſent bien minces.

Pour moi, j'en avois toujours uſé le plus honnêtement du monde envers Mr. *Newton*; & quoiqu'il ſe trouve maintenant qu'il y a grand lieu de douter s'il a ſu mon invention avant que de l'avoir euë de moi, j'avois parlé comme ſi de ſon chef il avoit eu quelque choſe de ſemblable à ma Méthode. Mais abuſé par quelques flatteurs mal aviſés, il s'eſt laiſſé porter à m'attaquer d'une maniére très ſenſible. Jugez maintenant, Monſieur, de quel côté doit venir principalement ce qui eſt néceſſaire pour faire ceſſer cette conteſtation.

Je n'ai pas encore vu le Livre publié contre moi, étant à Vienne, qui eſt l'extrémité de l'Allemagne, où de tels livres ſont portés bien tard. Et je n'ai point daigné le faire venir tout exprès par la poſte. Ainſi je n'ai pas encore pu faire une Apologie telle que l'affaire demande; mais d'autres ont déja eu ſoin de ma réputation. J'abhorre les diſputes desobligeantes entre les Gens de Lettres, & je les ai toujours évitées; mais à préſent on a pris toutes les meſures poſſibles pour m'y engager. Si le mal pouvoit être redreſſé, Monſieur, par votre entremiſe, à laquelle vous vous offrez ſi obligeamment, j'en ſerois bien aiſe; & je vous en ai déja beaucoup d'obligation par avance.

Vous rendrez, Monſieur, un ſervice conſidérable au Public, en faiſant travailler à un Dictionnaire de la Langue Biſcayenne, qui eſt ſi ancienne, & dont la connoiſſance ſerviroit à éclaircir les noms propres de beaucoup de Lieux, non ſeulement en Eſpagne, mais encore dans la France voiſine; car je vois qu'il y a des noms de Riviéres, de Montagnes, & de Villes ou de Villages, communs à l'Eſpagne & à la France Méridionale, où je ſoupçonne que la Langue des Aquitains du tems de *Céſar*, diſtinguée par lui-même de celle de la Gaule Celtique, a eu quelque choſe d'approchant de la Biſcayenne. Et il ſera auſſi fort important d'examiner, s'il n'y a pas dans l'Hibernois quelque choſe du Biſcayen. La Langue Biſcayenne méritéroit bien auſſi que la Bible, c'eſt-à-dire, le Vieux Teſtament, fût traduit; puiſque vous m'apprenez que le Nouveau s'y trouve déja. Je ſuis avec zèle, Monſieur, votre &c.

P. S. J'ai quelque ſoupçon que *Cadis* & *Calis* ou *Calais*, ſont à peu près le même mot, & ſignifient la même choſe, c'eſt-à-dire, un *Détroit*. Ainſi une Langue ancienne, commune ou approchante, paroit avoir été répandue par la France & par l'Eſpagne.

LETTRE

LETTRE DE Mr. NEWTON

A Mr. CHAMBERLAYNE.

Le 11. *de Mai* 1714. *V. St.*

JE n'entens pas aſſez à fond la Langue Françoiſe, pour ſentir toute la force des termes de la Lettre de Mr. *Leibniz*; mais je comprens qu'il croit que la Societé Royale & moi, ne lui avons pas rendu juſtice.

Ce que Mr. *Fatio* a écrit contre lui (bb), il l'a fait ſans que j'y aye eu la moindre part.

Il y a environ neuf ans que Mr. *Leibniz* attaqua ma réputation, en donnant à entendre que j'avois emprunté de lui la Méthode des Fluxions (cc). Mr. *Keill* m'a défendu (dd); & je n'ai rien ſçu de ce que Mr. *Leibniz* avoit fait imprimer dans le Journal de Leipſic, juſqu'à l'arrivée de ſa premiére Réponſe à Mr. *Keill* (ee), où il demandoit, en effet, que je retractaſſe ce que j'avois publié (ff).

Si vous pouvez me marquer quelque choſe en quoi je lui aye fait tort, je tâcherai de lui donner ſatisfaction; mais je ne veux pas rétracter ce que je ſçai être véritable, & je crois que le Commité de la Societé Royale ne lui a fait aucun tort. Je ſuis &c.

LETTRE DE Mr. LEIBNIZ

A Mr. CHAMBERLAYNE.

Vienne ce 25. *d'Août* 1714.

JE vous ſuis obligé de la tentative que vous avez faite à la Societé Royale. L'Extrait de ſon Journal du 20. de Mai fait connoître qu'elle ne prétend pas que le rapport de ſes Commiſſaires paſſe pour une déciſion de la Societé. Ainſi je ne me ſuis point trompé en croyant qu'elle n'y prenoit point de part. Quant à la Lettre peu polie, dont vous m'avez envoyé la copie, je la tiens *pro non ſcripta*, auſſi-bien que l'imprimé

(bb) Dans ſa Diſſertation *de la Courbe de la plus vite deſcente*, publiée à Londres en 1699.

(cc) Voyez le *Journal de Leipſic* du Mois de Janvier 1705.

(dd) Dans les *Tranſactions Philoſophiques* de Septembre & Octobre 1708.

(ee) Voyez le *Commercium Epiſtolicum*, pag. 109. 110.

(ff) Dans l'introduction du Livre *des Quadratures*, imprimé en 1704.

primé François. Je ne ſuis pas d'humeur de vouloir me mettre en colére contre de telles gens.

Puiſqu'il ſemble qu'on a encore des Lettres qui me regardent, parmi celles de Mr. *Oldenbourg* & de Mr. *Collins*, qui n'ont pas été publiées, je ſouhaiterois que la Societé Royale voulût donner ordre de me les communiquer. Car quand je ſerai de retour à Hanover, je pourrai publier auſſi un *Commercium Epiſtolicum*, qui pourra ſervir à l'Hiſtoire Littéraire. Je ne ſerai pas moins diſpoſé de publier les Lettres qu'on peut alléguer contre moi, que celles qui me favoriſent; & j'en laiſſerai le jugement au Public.

Ce ſeroit beaucoup ſi la Langue Irlandoiſe étoit ſi voiſine de la Biſcayenne, que les gens de l'un & de l'autre Pays ſe puſſent entendre ſans beaucoup de difficulté, comme on l'a rapporté à la Societé Royale. Cela ne paroit point par les eſſais que l'on voit des deux Langues. Peut-être eſt-ce que le Garçon Irlandois avoit déja converſé autrefois avec des Biſcayens. Cependant la choſe mérite une plus ample diſcuſſion, & ſeroit de conſéquence ſi elle ſe pouvoit vérifier. Je ſuis avec paſſion, Monſieur, Votre &c.

N°. LXXXIII.

N°. LXXXIII.

PROBLEMA POSTHUMUM

a G. G. Leibnitio ante mortem ſuam miſſum & commiſſum ſolutioni R. P. *Auguſtini Thomæ a Sto. Joſepho* Ordinis Scholarum Piarum Decani.

$$bx + 1 = yy.$$

Ex Actis Erudit. Lipſ. ann. 1717.

IN quo b eſt numerus datus quicumque integer poſſibilis, x & y quæſiti hac lege, ut y ſemper maneat minor quàm b. Petitur ejus ſolutio in integris toties, quoties fieri poteſt.

In hoc Problemate, ut ut leve, breve, ac facile appareat, latent non contemnenda arcana hactenus Arithmeticis incognita, ut in ſequentibus ſolutionibus patebit. Itaque ſit

Solutio prima pro omnibus numeris poſſibilibus conſtans, & unica, omnium facillima. Ponatur $b - z = y$. erit $b^2 - 2bz + z^2 = yy = bx + 1$. Si itaque z ſupponatur $= 1$. erit $b^2 - 2b = bx$, & $b - 2 = x$, & $b - z = b - 1 = y$. Unde colligitur numerum datum b non poſſe minorem eſſe ternario, licèt poſſit eſſe major, atque major in infinitum, ad quos omnes ſe ſe extendit hæc unica ſolutio; ita ut in quovis numero a 3 incipiendo verum ſit $b - 1$ eſſe $= y$. & $b - 2 = x$. Verùm quia Problema innuit pro quibuſdam numeris plures ſolutiones, ſeu variationes, quàm hanc unicam, nempe toties quoties fieri poteſt; idcircò, ne quærantur variationes fruſtraneæ, operæ pretium erit præſcire, quot variationes patiatur num. b. Quare ſit

Præliminare Univerſale.

Omnis numerus b integer a 3 incluſivè uſque in infinitum ex diligenti ſcrutatione naturæ numerorum obſervatus eſt habere ſolutiones, ſeu variationes, vel unicam tantùm, vel 3. vel 7. vel 15. vel 31. vel 63. &c. & hac in infinitum progreſſione, quæ ſic propagatur: Unitas dupla $+ 1 = 3$. hujus duplum $+ 1 = 7$. duplum $+ 1 = 15$. duplum $+ 1 = 31$. duplum $+ 1 = 63$. &c. in infinitum.

Regula 1. Omnes numeri primi, & eorum poteſtates qualeſcumque unicam habent ſolutionem. Ut 3. 9. 27. (5. 25. 125) 7. 49. 343. 2401. &c. &c.

Regula 2. Omnia producta duorum diverſorum primorum numerorum, aut duarum poteſtatum qualiumcumque a diverſis primis ortarum, aut permiſtim numeri primi cum poteſtate alterius primi tres habent ſolutiones, ſeu variationes. Ut 15 ex 3 per 5. 21 ex 3 per 7. 35 ex 5 per 7. 225 ex 9 per 25. 675 ex 27 per 25. 45 ex 5. per 9. 189 ex 7 per 27. &c.

Regula 3. Omnia producta trium diverſorum primorum, aut trium poteſtatum quarumcumque a diverſis primis ortarum, aut permiſtim, 7 habent ſolutiones, ſeu variationes. Ut 105 productum a 3, 5, 7, 33075 a 49, 25, 27, 735 a 3, 5, 49 &c. Atque ita porrò producta ex quatuor diverſis primis ſolutiones habent 15 ex quinque 31. ex 6, 63. &c. ſemper uno gradu in præcedenti Præliminari plures &c.

Regula 4. Dupla numerorum, ſeu productorum in prioribus tribus Regulis non immutant, neque augent numerum ſolutionum. Quadrupla verò attollunt uno, & octupla duobus gradibus. Sic quadrupla Iæ *Reg*. 3. 9. 5. nempe 12. 36. 20. &c. habent tres, & octupla 24. 72. 40 &c. 7 ſolutiones. In *Reg*. 2*da* 15. 21 quadrupla 60. 84 habent 7. & octupla 120, 168 &c. 15 ſolutiones. In *Reg*. 3*a* 105. 735 quadrupla 420, 2940 &c. habent 15, & octupla 840, 5880 &c. 31. ſolutiones. Sic quadrupla productorum ex quatuor primis habent 31, & octupla 63 ſolutiones &c. neque ultra octuplum altiùs aſcenditur. Nam licèt 24 octuplum ipſius 3 admittat 7 ſolutiones, tamen ſedecuplum 48 non admittit plures. Quod & proportionaliter de aliis intelligendum eſt.

Regula 5. Numerus 4 habet unicam ſolutionem, ejus duplum 8 tres, neque porrò aſcenditur. Hinc 16. 32. 64. 128 &c. in infinitum tres tantùm habent ſolutiones. Præſuppoſitis admirandis hiſce numerum proprietatibus ſequitur

Solutio 2da.

Exhibens in ſpecie ſolutiones poſſibiles omnium numerorum b. per quadrata

$$bx + 1 = yy. \text{ Ergò } x = \frac{yy - 1}{b}.$$ Hæc æquatio nos docet ex Tabula quadratorum *Neperi*, vel alterius Auctoris excerpenda eſſe inter b & bb tot quadrata quot ſolutiones, ſeu variationes recipit num. datus b, & quidem talia, quæ abjecta unitate exactè dividi poſſint per b ad habendos valores x & y.

Proponatur b = 7. qui cùm ſit num. primus, unicam habet ſolutionem ex *Reg*. 1*a*. ideoque unicum tantùm quadratum intermedium inter b & bb, hoc

hoc eſt, inter 7 & 49 quod — 1 dividi poſſit exactè per b = 7. nempe 36 = yy. unde yy — 1 = 36 — 1 = 35.

ideoque $\frac{yy - 1}{b} = \frac{35}{7} = 5 = x$. & y = b rad. □ ex 36. Quod idem per I. ſolutionem invenitur. Ubi notandum pro iis numeris, qui unicam tantùm habent ſolutionem, ſemper aſſumendum eſſe tantùm quadratum proximum ante bb, ut hic 36 ante 49.

Sit b = 15 habens tres ſolutiones ex *Reg.* 5. bb = 225. ideoque tria apta quadrata intermedia inter 15 & 225 quæ — 1 dividi poſſint per 15 ſeu per 3 & 5. nempe 16. 121. 196 = y^2 quæ — 1 ſunt 15. 120. 195. & diviſa per 15 exhibent 1. 8. 13 pro x. pro y verò ſunt 4. 11. 14. radices excerptorum quadratorum.

Sit b = 24 habens 7. ſolutiones ex *Reg.* 4. ideoque 7 apta quadrata intermedia inter b & bb, ſeu inter 24 & 576. quæ — 1 dividuntur per 24. ſeu per 3 & 8 nempe 25. 49. 121. 169. 289. 361. 529. quæ — 1 ſunt 24. 48. 120. 168. 288. 360. 528. diviſa per 24. dant 1. 2. 5. 7. 12. 15. 22. pro x. pro y verò 5. 7. 11. 13. 17. 19. 23. radices dictorum quadratorum. Ubi notandum ultimum quadratum ex intermediis inter b & bb ſemper eſſe aptum ſolutioni. Et hæc methodus operandi per quadrata eſt breviſſima & facillima pro numeris, qui patiuntur plures ſolutiones, ſeu variationes, quàm unam; ſi tamen Tabula quadratorum tam procul extenſa ſit uſque ad bb. Quod ſi non, utendum erit Factoribus dati numeri b. Ideoque ſit

Solutio 3tia per Factores.

Definitio. Factores vocantur duo quicumque numeri, qui ſimul multiplicati producunt datum numerum b. Habentque quipiam numeri tantum unum par Factorum, quales ſunt omnes primi, quipiam plura, ut omnes compoſiti. Sic 3. Factores habet 1. 3. &c. 12 habet factores 1 per 12. & 2. per 6. & 3 per 4.

Operatio. bx + 1 = yy. Ergo bx = yy — 1 quod producitur ab y + 1 per y — 1. & ſic exprimitur: $\overline{y + 1} \times \overline{y - 1}$. quare $x = \frac{y^2 - 1}{b} = \frac{\overline{y + 1} \times \overline{y - 1}}{b}$. Quia igitur $y^2 - 1$ duos habet factores y + 1 & y — 1, quorum differentia ſemper = 2. idcirco & b dirimendum eſt in duos factores, quorum unus exactè dividat y + 1. alter y — 1. Porrò hi factores vocentur m & n ſtabitque operatio ſic:

$\frac{y + 1}{m}$

$$\frac{y+1}{m} \text{ ſit} = \text{quotienti } z$$

$$\& \frac{y-1}{n} \text{ ſit} = \text{quotienti } v$$

ideoque $y + 1 = m z$

$\& \; y - 1 = n v$

mutuo ductu $y^2 - 1 = m n z v = b x$. eſt autem $m n = b$

ideoque $z v = x$. & y jam ſupra notum eſt.

Ex his formatur in numeris hic proceſſus: Eſto $b = 7$. factores $1 = n$. $7 = m$. & cùm b ſemper petatur major quàm y, non poterit hic $y + 1$ majus eſſe quàm $b + 1 = 7$. & $y - 1 = b - 1 = 5$. hinc

$$\frac{y+1}{m} = \frac{7}{7} = 1 = z$$

$$\frac{y-1}{n} = \frac{5}{1} = 5 = v$$

atque ita $zv = 5 = x$. & $y = 6$.

Sit $b = 12$. habet ex Reg. 4. tres ſolutiones. Factores m n

vel n m

1. 12

2. 6.

3. 4.

Hic $y + 1$ & $y - 1$ ſumendi ſunt tales numeri, ut unus per m, alter per n exactè dividatur, nempe $\frac{y+1}{m} = \frac{12}{12} = 1 = z$. & $\frac{y-1}{n} = \frac{10}{1} = 10 = v$

hinc $z v = 10 = x$. & $y = 11$. Sequitur

Sit $\frac{y+1}{m} = \frac{6}{6} = 1 = z$. & $\frac{y-1}{n} = \frac{4}{2} = 2 = v$

hinc $z v = 2 = x$. & $y = 5$.

Sit $\frac{y+1}{m} = \frac{8}{4} = 2 = z$. & $\frac{y-1}{n} = \frac{6}{3} = 2 = v$

hinc $z v = 4 = x$ & $y = 7$

Sunt itaque pro num. $b = 12$ tres ſolutiones, ſeu variationes pro x. pro y.

2	5
4	7
10	11

Notandum

Notandum hìc occurrere quæpiam compendia. Primò ſi unus factorum ſit 2. & alter ejus confactor numerus par, ſimpliciter ſic locantur:

8 diviſum per	2 fit	4	} 4 = x. 7 = y.
6	6	1	
4	2	2	} 2 = x. 5 = y.

Quod & cum factore 4 practicatur.

2do. Cùm præter Im. valorẽ $y = 11$ reliqui duo ſint 5 & 7 ſimul $= 12 = b$ tunc habito minori 5. habetur illicò alter major 7 per ſubtractionem 5 a 12.

3tio. per Crucẽ ſic: $y + 1 = 6$ div. per 6 eſt $1.2 - 1 = 1.2$ per 4 ductũ dat $8 = y + 1$

$y - 1 = 4$ 2 ⋈ $2.6 - 2 = 4.1$ ⋈ per 6. $6 = y - 1$

Eſto nunc datus num. $b = 24$. habens ex Reg. 4 ſeptem ſolutiones

Factores m. n	$y + 1 = 24$ diviſum per	24 fit	1	} $22 = x.\ y = 23$
vel n. n.	$y - 1 = 22$	1	22	
1. 24	&c. 14	2	7	} $7 = x.\ y = 13$
2. 12	12	12	1	
3. 8	10	2	5	} $5 = x.\ y = 11$
4. 6	8	4	2	} $2 = x.\ y = 7$
	6	6	1	
	4	4	1	} $1 = x.\ y = 5$

NB. nunc per Crucem reſumantur Factores 4. 6

ſic: 4 ⋈	2.	2 a 6 reſt. 4 ductum per	4 fit	16 div. per	4 fit	4	} $12 = x.\ y = 17$
6	1.	1 a 4 ⋈ 3	6	18	6	3	
4 ⋈	1.	1 a 6 ⋈ 5	4	20	4	5	} $15 = x.\ y = 19$

Hic per ſuperiora compendia 1m. & 3tium proceſſum eſt, & factores 2. 12. dederunt duos, 4. 6 verò quatuor valores; & 1. 24 unum.

Supereſt, ut per 2dum compendium operemur. Eximantur tres minores valores y.

Sic: Valor	$b = 24$	24	24	
Min. valores	$y = 5$	7	11	Subtr.
Maj. val.	$y = 19$	17	13	ut ſupra

$y + 1 = 20$	div. per	4 fit	5	} $15 = x$
$y - 1 = 18$		6	3	
&c. 16		4	4	} $12 = x$
14		2	7	} $7 = x$
12		12	1	

Per hoc compendium tollitur dimidius labor operationum.

Proponatur jam exercitii cauſa $b = 1716$ numero anni, quo mihi D. Proponens jam lecto detentus hoc Problema ſolvendum commiſit. Hic num. ex Reg. 4. recipit 15. ſolutiones, ſeu variationes, quia quadruplus eſt producti trium primorum 3. 11. 13.

Factores: m. n vel n. m					
1. 1716	y + 1 =	1716 div. per n =	1716 fit	1	1714 = x. y = 1715.
2. 858	y — 1 =	1714	m = 1	1714	
3. 572	y + 1 =	858	858	1	428 = x. y = 857.
4. 429	y — 1 =	856	2	428	
6. 286	&c.	288	- - 6	48	48 = x. y = 287.
11. 156		286	286	1	
12. 143		156	- - - 156	1	14 = x. y = 155.
13. 132		154	- - - 11	14	
22. 78		132	- - 132	1	10 = x. y = 131.
26. 66		130	- - 13	10	
33. 52		572	- - 572	1	190 = x. y = 571.
39. 44		570	- - 3	190	
NB. Aptiſſimi fac-		728	- - 52	14	308 = x. y = 727.
tores ſunt, qui in di-		726	- - 33	22	
viſione proferunt		704	- - 44	16	288 = x. y = 703.
unitatem, cùm fie-		702	- - 39	18	
ri poteſt.	b =	1716	1716.	1716. 1716. 1716.	1716. 1716.
	Min. valores y =	857	727.	703. 571. 287	155. 131. ſubtr.
	Maj. valores y =	859	989.	1013. 1145. 1429.	1561. 1585. Reſt.
	y + 1 =	860 diviſum per	2 fit	430	430 = x. y = 859.
	y — 1 =	858	- - 858	1	
Hic adhibentur ii	&c.	990	- - 33	30	570 = x. y = 989.
dem factores, qui		988	- - 52	19	
ſuprà pro minori-		1014	- - 39	26	598 = x. y = 1013.
bus valoribus adhi		1012	- - 44	23	
biti fuerunt.		1146	- 3	382	764 = x. y = 1145.
		1144	- 572	2	
		1430	- 286	5	1190 = x. y = 1429.
		1428	- 6	238	
		1562	- 11	142	1420 = x. y = 1561.
		1560	- 156	10	
		1586	- 13	122	1464 = x. y = 1585.
		1584	- 132	12	

Hoc compendio qui volet uti, poterit illud quoque adhibere in pragmatia ſolutionis 2dæ per quadrata.

Demùm $b = 840$ habens ex Reg. 4ta. 31. ſolutiones exercitio Lectoris relinquimus. Ubi quærendi priùs erunt 15 minores valores pro x & y, majores 15 habentur per ſubtractionem. Maximus denique valor eſt $b - 1 = 829 = y$. & $b - 2 = 838 = x$.

Con-

Conclusio.

Atque ita videmur intentum Perill. Dn. *de Leibniz* aſſecuti, quod erat, ut per hoc ultimum ſuum, nunc poſthumum Problema Arithmeticam altiùs attolleret, & rariora ſub eo contenta arcana & artificia, hactenùs omnibus Arithmeticis incognita, eruditiori ſæculo patefaceret. Hoc verò ſuum laudabile propoſitum ægritudine, & morte præventus exſequi nequiit. Idcircò ab eodem per epiſtolam ſpecialem Hanovera requiſiti illud pro virili noſtrum effectum ad conſervandam immortalis Viri gloriam deduximus. Nam

Dignum laude Virum Muſa vetat mori.

Hor. Lib. 4. *carm. Ode* 8.

Hornæ Auſtriæ 22. *Apr.* 1717.

N°. LXXXIV.

LETTRE A Mr. DANGICOURT

écrite en Septembre 1716.

Sur les Monades & le Calcul infinitéſimal.

Tirée du Recueil de Kortholt *T. III.*

I. *Des Monades.* II. III. IV. & V. *Du Calcul des Infinitéſimales.*

I. JE ſuis ravi qu'un eſprit auſſi mathématicien que le vôtre s'applique auſſi à des recherches philoſophiques. Cela aidera à mon deſſein de rendre la Philoſophie démonſtrative. Il me ſemble que nos ſentimens ne ſont pas fort éloignés l'un de l'autre. Je ſuis auſſi d'opinion qu'à parler exactement il n'y a point de ſubſtance étendue. C'eſt pourquoi j'appelle la matiére *non ſubſtantiam ſed ſubſtantiatum.* J'ai dit en quelques endroits (peut-être de la Théodicée, ſi je ne me trompe) que la matiére n'eſt qu'un phénomène réglé & exact qui ne trompe point, quand on prend garde aux régles abſtraites de la raiſon. Les véritables ſubſtances ne ſont que les ſubſtances ſimples, ou ce que j'apelle *Monades.* Et je crois qu'il n'y a que des monades dans la nature, le reſte n'étant que les phénomènes qui en réſultent. Chaque monade eſt un miroir de l'univers ſelon ſon point

point de vuë, accompagnée d'une multitude d'autres monades qui compoſent ſon corps organique dont elle eſt la monade dominante. Et en elle-même il n'y a que perceptions & tendances à des nouvelles perceptions & appetits; comme dans l'univers des phénomènes il n'y a que figures & mouvemens. La monade donc enveloppe par avance en elle ſes états paſſés ou futurs, en ſorte qu'un *omniſcient* l'y peut lire, & les monades s'accordent entr'elles, étant des miroirs d'un même univers, mais différemment repréſenté : c'eſt comme une multiplication d'un même univers à l'infini quoique l'univers même ſoit d'une diffuſion infinie. C'eſt en cela que conſiſte mon Harmonie préétablie. Les monades (dont celles qui nous ſont connues ſont appellées ames) changent leur état d'elles-mêmes ſelon les loix des cauſes finales ou des appetits, & cependant le régne des cauſes finales s'accorde avec le régne des cauſes efficientes qui eſt celui des phénomènes. Cependant je ne dis point que le *continuum* ſoit compoſé de points géométriques, car la matiére n'eſt point le *continuum*, & l'étendue continuelle n'eſt qu'une choſe idéale, conſiſtant en poſſibilités qui n'a point en elle des parties actuelles. Les touts intellectuels n'ont des parties qu'en puiſſance. Ainſi la ligne droite n'a des parties actuelles qu'autant qu'elle eſt actuellement ſous-diviſée à l'infini; mais s'il y avoit un autre ordre des choſes, les phénomènes feroient qu'elle ſeroit autrement ſous diviſée. C'eſt comme l'unité dans l'Arithmétique, qui eſt auſſi un tout intellectuel ou idéal diviſible en parties, comme, par exemple, en fractions, non pas actuellement en ſoi, (autrement elle ſeroit reduiſible à des parties minimes qui ne ſe trouvent point en nombres), mais ſelon qu'on aura des fractions aſſignées. Je dis donc, que la matiére qui eſt quelque choſe d'actuel ne réſulte que des monades, c'eſt-à-dire, de ſubſtances ſimples indiviſibles, mais que l'étendue ou la grandeur géométrique n'eſt point compoſée des parties poſſibles qu'on y peut ſeulement aſſigner, ni réſoluble en points, & que les points auſſi ne ſont que des extrémités & nullement des parties ou compoſans de la ligne.

II. Pour ce qui eſt du calcul des Infinitéſimales, je ne ſuis pas tout-à-fait content des expreſſions de Monſieur *Herman* dans ſa réponſe à Monſieur *Nieuwentyt*, ni de nos autres amis. Et Mr. *Naudé* a raiſon d'y faire des oppoſitions. Quand ils diſputérent en France avec l'Abbé *Gallois*, le Père *Gouge* & d'autres, je leur témoignai, que je ne croyois point qu'il y eût des grandeurs véritablement infinies ni véritablement infinitéſimales, que ce n'étoient que des fictions, mais des fictions utiles pour abréger & pour parler univerſellement, comme les racines imaginaires dans l'Algébre, telles que $\sqrt[2]{(-1)}$; qu'il faut concevoir, par exemple, (1) le diamètre d'un petit élément d'un grain de ſable, (2) le diamètre du grain de ſable même, (3) celui du globe de la terre, (4) la diſtance

ſtance

ſtance d'une fixe de nous, (5) la grandeur de tout le ſyſtème des fixes, comme (1) une différentielle du ſecond degré, (2) une différence du premier degré, (3) une ligne ordinaire aſſignable, (4) une ligne infinie, (5) une ligne infiniment infinie. Et plus on faiſoit la proportion ou l'intervalle grand entre ces degrés, plus on aprochoit de l'exactitude, & plus on pouvoit rendre l'erreur petite & même la retrancher tout d'un coup par la fiction d'un intervalle infini, qui pouvoit toujours être réaliſée à la façon de démontrer d'*Archimède*. Mais comme Mr. le Marquis *de l'Hoſpital* croyoit que par là je trahiſſois la cauſe, ils me priérent de n'en rien dire, outre ce que j'en avois dit dans un endroit des Actes de Leipſic, & il me fut aiſé de déférer à leur priére.

III. Pour venir enfin à $\frac{0}{\infty}$ ou zéro diviſé par l'infini, & choſes ſemblables, je dis que cela auſſi ne peut avoir lieu que dans une interprétation commode, en prenant zéro pour un nombre d'une grande petiteſſe, & l'infini pour un nombre très grand. Or plus vous diminuerez le numerateur, & plus vous augmenterez à proportion le dénominateur de la fraction, plus vous aprocherez du zéro $\frac{1:10}{10} = \frac{1}{100}$ & $\frac{1:100}{100} = \frac{1}{10000}$ & $\frac{1:1000}{1000} = \frac{1}{1000000}$ ce qui va vers $\frac{0}{\infty} = 0$, ou $\frac{1:\infty}{\infty} = 0$, ou $\frac{1}{\infty\infty} = 0$, de ſorte que le quarré de l'infini, multiplié par le zéro, donneroit l'unité. Mais on peut dire que cela y va, & non pas qu'il y arrive ; car à la rigueur *nihilum*, qui eſt l'extrémité des nombres en diminuant, devroit ainſi être diviſé par *omnia*, qui eſt l'extrémité des nombres en augmentant. Mais l'*omnia* pris comme *numerus maximus* eſt une choſe contradictoire comme *numerus minimus*. Les deux extrémités *nihil* & *omnia* ſont hors des nombres, *extremitates excluſæ non incluſæ*.

IV. Il eſt aiſé de tomber dans des paralogiſmes quand on ne rectifie pas ces choſes par les idées que je viens de donner. Un habile Mathématicien de Piſe nommé *Guido Grandi* avoit ſoutenu, qu'une infinité de riens ou zéros ajoutés enſemble, faiſoient une grandeur aſſignable, & ainſi par une élégante allégorie il illuſtroit la production des créatures du rien par le moyen de l'infini. Mr. *Aleſſandro Marchetti*, autre habile Mathématicien de Piſe, s'y oppoſa, diſant, qu'une infinité de riens ne feroit jamais autre choſe que rien. Et prenant le rien à la rigueur, il avoit raiſon. Cependant le Père *Grandi* prouvoit ſa propoſition par la diviſion: Vous ſavez, Monſieur, qu'en diviſant $\frac{1}{1+a}$ ou $1 : 1 + a = 1 - a + a^2$

 $- a^3$

$- a^3 \bowtie a^4 - a^5$ &c. à l'infini. Donc a étant 1. il viendra $\frac{1}{1 \bowtie 1} = 1:2 = 1 - 1 \bowtie 1 - 1 \bowtie 1 - 1$ &c. à l'infini, ce qui fera $\frac{1}{2} = 0 \bowtie 0 \bowtie 0 \bowtie 0 \bowtie 0$ &c. On m'a conſulté là-deſſus, & voici comme je crois d'avoir déchifré l'énigme. Il ne faut point dire qu'une infinité de riens pris à la rigueur faſſent quelque choſe, auſſi cette ſeries ne le dit point, quoiqu'elle paroiſſe le dire. Pour le bien entendre il faut la réſoudre en ſéries finies aprochantes de l'infinie. Soit donc la ſéries $1 - 1 \bowtie 1 - 1$ &c. finie, alors ſi vous prenez un nombre impair, par exemple, 7 unités $1 - 1 \bowtie 1 - 1 \bowtie 1 - 1 \bowtie 1$ le tout fait 1. Or lorſque cela ſe termine dans l'infini où il n'y a ni pair ni impair, il faut prendre le milieu arithmétique entre 1 & 0 qui eſt $\frac{1}{2}$. Car dans les eſtimes ambiguës, quand il n'y a pas plus de raiſon pour l'un que pour l'autre, il faut prendre le milieu arithmétique. Par exemple, entre l & m il faut prendre $\frac{l \bowtie m}{2}$ c'eſt-à-dire, $\frac{0 \bowtie 1}{2}$ c'eſt-à-dire $\frac{1}{2}$.

V. J'ai tâché de m'expliquer, & j'eſpère d'avoir réuſſi paſſablement à l'égard d'une perſonne de votre pénétration; mais quant aux difficultés qui peuvent reſter dans une matiére auſſi difficile que celle dont il s'agit, je tâcherai d'y ſatisfaire, & ce ſera le moyen d'éclaircir la vérité. Au reſte je ſuis &c.

Hann. le 11. *Septembre* 1716.

N°. LXXXV.

REMARQUES

SUR LES HORLOGES,

Tirées des Mémoires de Trevoux ann. 1718.

IL ſeroit fort à ſouhaiter qu'il y eût un ouvrage ſur l'horlogerie, propre à faire entendre toute la pratique de l'Art, non ſeulement dans le principal, qui eſt la meſure du tems, mais encore par rapport à l'acceſſoire, qui conſiſte en quantité de jolies inventions pratiquées par les maîtres

maîtres de l'Art. L'Auteur de ce diſcours (a), qui a joint la théorie à la pratique, & qui a encore le talent de s'exprimer aſſez bien, y ſeroit très propre.

La partie Arithmétique, par rapport à la denture, a été bien traitée en Latin par Mr. *Oughtread.* Ce qui appartient au réglement des pendules, c'eſt-à-dire, des poids en vibration, a été bien expliqué par Mr. *Huygens*, premiérement dans un diſcours Flamand, qu'il fit imprimer lorſqu'il donna au public les premiéres pendules; & puis plus amplement, & plus entiérement dans ſon ouvrage Latin, *de pendulis*, où il rend raiſon de la cycloide. Mais il y auroit encore quelque choſe à dire de la nature des vibrations des reſſorts, dont l'égalité eſt vérifiée par celles des cordes touchées, qui rendent toujours le même ton, quand elles ſont également tendues.

Ce fut environ en 1674. qu'on fit paroitre dans le monde le premier reſſort ſpiral réglant la montre par ſes vibrations. Je fus alors à Paris, où Mr. *Huygens* fit exécuter cette invention par Mr. *Turet*, fameux Horloger. Mr. *Hook* lui fit une querelle là-deſſus, prétendant dans un écrit public d'avoir déja fait auparavant une montre réglée par les vibrations d'un reſſort; mais on n'avoit encore point vû de montres de ſa façon, au moins avec un reſſort vibrant ſpiral. Un François nommé Monſieur *Haute-feuille*, intenta même un procès au Parlement de Paris à Mr. *Huygens*, prétendant que c'étoit ſon invention; mais il fut débouté. Il y a des horloges à pendule d'une eſpèce toute particuliére, où le poids vibrant ne va pas en allant & retournant, mais toujours d'un même côté. Ces horloges ont cela de particulier, qu'elles vont ſans bruit, & ont été recherchées quelquefois par ceux qui manquent de ſommeil, & veulent avoir des horloges dans leur chambre qui ne les empêchent pas de dormir. Mr. *Huygens* en a fait un diſcours, qui n'a pas été imprimé; où au lieu de cycloide, il a employé une eſpèce de ſolide parabolique, pour en rendre les vibrations égales.

Lorſque Mr. *Huygens* publia ſon reſſort vibrant ſpiral, je publiai un peu après, dans le Journal des Sçavans, un autre principe d'égalité, qui n'eſt pas phyſique, comme eſt la ſuppoſition de l'égalité des vibrations des pendules, ou des reſſorts, mais purement mécanique; conſiſtant dans une parfaite reſtitution de ce qui doit vibrer, puiſqu'alors les vibrations ſont égales, parce qu'elles ſont juſtement les mêmes. Mr. *Hook* en écrivant contre Mr. *Huygens*, dit, qu'il avoit auſſi eu la même penſée que moi, mais qu'il avoüoit ne l'avoir point fait paroître. J'ai penſé quelquefois à faire exécuter cette invention, qui promet de nouveaux avantages aſſez conſidérables; mais j'ai toujours manqué de l'aſſiſtance d'un bon maître,

(a) Ce diſcours eſt la régle artificielle du Tems par H. *Sulli*, Paris 1717. in 12.

maître, qui eût la volonté d'y travailler ; les ouvriers ordinaires, ſur-tout en Allemagne, n'ayant point d'envie de s'écarter de leur routine. Cependant une montre, ou horloge, faite de cette maniére, pourroit ſe paſſer de la fuſée, & iroit de même, quand on en redoubleroit le poids, ou la force du premier mobile; elle ſeroit auſſi plus propre aux horloges de mer que l'horloge à pendule.

Par rapport au reſſort ſpiral, dont on ſe ſert dans les montres de poche, il ſeroit important d'examiner, combien l'air a d'influence ſur les vibrations d'un tel reſſort, & particuliérement combien le froid & le chaud en changent l'égalité. Entre les cauſes qui changent la juſteſſe de l'horloge, ou de la montre vulgaire, eſt auſſi le tems qui ſe perd en les remontant, lorſqu'elles ſont arrêtées pendant ce tems là, comme il arrive ordinairement; car le tems de la remonte n'eſt pas toûjours de même; mais des bonnes & d'excellentes montres, ont, ou peuvent avoir une conſtruction, ſuivant laquelle elles continuent d'aller pendant qu'on les remonte.

Dans la comparaiſon de la réſiſtance de l'air aux vibrations du balancier des montres, avec la réſiſtance que l'air fait aux oſcillations des pendules, il ſemble qu'il faudroit rabattre quelque choſe, parce que le chemin du poids, qui va & vient, eſt plus grand que celui du balancier.

Il eſt vrai que la pendule a beaucoup plus de part au gouvernement de l'horloge, que le reſſort ſpiral n'en a au gouvernement de la montre. Outre la preuve qu'on a alleguée, en voici une autre tout auſſi ſenſible, c'eſt que l'horloge à pendule ne ſçauroit aller, à moins qu'on ne mette la pendule en vibration; mais la montre va par ſa propre force, & fait vibrer le reſſort ſpiral.

Les longues pendules à ſecondes font des vibrations aſſez égales, par la raiſon, qu'un ſi petit arc de cercle d'un ſi grand rayon ne ſçauroit guère être diſtingué ſenſiblement d'un arc de cycloide. Cependant il faut avoüer, que le premier mobile & le rouage ont encore quelque influence ſur les tems de la pendule, puiſque dans l'axe de ſa vibration elle tombe dans la denture, & agiſſant ſur les dents qui réſiſtent, ne ſçauroit vibrer avec une liberté entiére, ce qui fait auſſi que la pendule eſt un peu avancée par une grande augmentation de la force du premier mobile.

On pourroit régler la figure de la fuſée des montres par expérience, en bandant le reſſort avec des poids, & marquant par quelque addition de poids, juſqu'où le reſſort eſt bandé; & les diamètres des endroits de la fuſée ſeront réciproquement comme les poids, qui peuvent tenir les reſſorts dans l'état où il eſt, en agiſſant ſur cet endroit de la fuſée.

Je ne veux point parler ici de la reduction du tems égal au tems apparent; cependant je reconnois que ſi la machine de l'horloge, ou de la montre, faiſoit cette réduction par elle-même, ſuivant ce que l'ingénieux Auteur de ce Diſcours nous fait eſpérer, ce ſeroit quelque choſe de très beau & de très commode.

N°. LXXXVI.

N°. LXXXVI.

ADDITIO G. G. LEIBNITII

Oſtendens Explanationem Superficiei conoidalis cujuſcunque; & ſpeciatim explanationem Superficiei Coni Scaleni, ita ut ipſi vel ejus portioni cuicunque exhibeatur rectangulum æquale, interventu extenſionis in rectam curvæ, per Geometriam ordinariam conſtruendæ.

Ex Miſcellan. Berolin. Tom. II. P. II. Art. XIX.

SUperficies Coni recti jam ab *Archimede* explanata eſt; & æqualis ei circulus aſſignatus. Coni Scaleni ſuperficiem veteres, quod conſtet, non attigêre. *Ægidius Robervallius*, me juvene ajebat, ejus explanationem ſibi eſſe notam, ſed qualem habuerit non dixit nihilque ea de re inter ejus ſchedas repertum accepi. Equidem hodie ad eum modum quo proceſſum eſt *in ſchediaſmate præcedenti*, poſſumus facilè dare figuras planas eaſque per Geometriam ordinariam conſtruendas, non tantùm quæ æquentur ſuperficiebus coni Scaleni, ſed etiam cujuſque Conoeidis generati recta BH (vide eandem quæ ſuprà *Figuram*) per punctum B, conſtans, in ſubli- T. xxiv.
mi tranſeunte, & circumlata per curvam quamcunque H (H) in plano Fig. 86.
ſubjecto AHC poſitam. Nam cùm BC ſit normalis ad planum ſubjectum, adeoque & ad rectam AC, quæ ſit directrix ipſarum HG normaliter applicatarum ex curva Hh, & ipſi AC occurrentium in G; patet $BC = V(BC.BC + CG.CG)$ fore normalem ad HG; atque adeò BH fore $V(BG.BG + GH.GH)$. Datur autem CH ex AG per naturam curvæ; & BC, AG ſunt datæ, & CG eſt ſumma vel differentia ipſarum CA, AG; habetur ergo & BH ex AG. Ergò & ratio datur incrementi momentanei ſeu elementi ipſarum BH; nempe ipſius HK (ſi ponatur ex h demiſſa in BH normalis hk) ad HV elementum ipſarum AG. Quod ſi jam quadratum ipſius HK detrahatur à quadratu ipſius Hh, elementis arcus curvæ, ſupererit quadratum ipſius hK, cujus rectæ adeò etiam dabitur ratio ad HV, incrementum ipſius AG; quæ ratio vocetur $r : a$, poſitâ a conſtante quacunque pro arbitrio ſemel aſſumta, & r determinatâ ex AG. Erit ergò $hK = (r : a)\, d\,AG$. Sed dimidium rectanguli ex BH in hK eſt æquale triangulo BHh, id eſt elemento ſuperficiei Conoidis, ergò ſi ad $d\,AG$, id eſt, ad Gg, ſeu ſumatur ſemper in ipſa GH ex G versùs H; fiet figura curvilinea, cujus elementum erit $(r : 2a)$ BH. $d\,AG$ idem cum

elemento ſuperficiei conoidis. Itaque ipſius hujus Figuræ portio ritè ſumta æquabitur reſpondenti ſuperficiei Conoeidis portioni, binis rectis ex puncto in ſublimi, & arcu baſis comprehenſæ; & proinde quævis ſuperficies Conoidalis explanari poteſt, adhibita figura plana ei æquali, per Geometriam ordinariam conſtruenda, ſi ipſa A H h baſis Conoidis, ſit figura Geometriæ ordinariæ.

Sed quia *Archimedes* Circulum, vel Circuli portiones, ſuperficiei coni recti vel ejus portionibus æquales exhibuit: Circuli autem vel ejus portionum area vel converſio in figuram rectilineam facillimè habetur per extenſionem curvæ (nempe ipſius arcus circularis) in rectam: hinc à Viro Celeberrimo *Petro Varignone* quæſitus eſt inventuſque modus elegans paulo antè poſitus, quo figura plana æqualis ſuperficiei coni Scaleni etiam menſurari poteſt, per extenſionem curvæ alicujus in rectam. Cùm verò curva illa quam exhibet non ſit ordinaria, ſed tranſcendens, quamvis non niſi tetragoniſmo Circuli ſeu rectificatione arcus Circularis ad conſtructionem indigeat; placuit mihi quærere curvam ordinariam quæ idem præſtet, ſeu cujus rectificatione exhibeatur ſuperficiei Coni Scaleni vel ejus portioni cuivis æqualis figura rectilinea. Hoc ita ſum conſecutus.

Iiſdem quæ antea poſitis, à puncto G versùs D ſumatur GW, quæ ſit ad AG ut CD ad radium DO & jungatur BW, quæ erit $\sqrt{}(ccrr - 2rfgx + ffxx) : r$. Pono autem A eſſe extremum diametri AD remotius à B. Ex puncto H ad rectam AC ducatur HI ita ut ex O ducta ad HI normalis O ψ ſit ad HO radium ut dimidia BW ad rectam conſtantem, quæ ſit major dimidia BA; Et recta HI ipſam O φ ex centro O perpendiculariter ad CO eductam ad partes H, ſecet in φ. Eadem omnia fiant ad puncta *h* & *g*, ut ducatur BW, ducatur & *h i*, quæ ipſam O φ ſecet in (φ). Jam ipſis O φ, O (φ), &c. æquales I o, *i c o*, &c. ordinatim applicentur normaliter ad OI, O i, &c. ut fiat curva Ω ω, cujus tangens Ω T occurrat ipſi AC in T. Tandem in AC ex I ſumatur IX ad partes ad quas convergunt IH, *i h*, quæ IX ſit ad IO ut TI ad TO; & ex puncto X quovis, hoc modo reperto, normaliter educta XY, occurrens reſpondenti rectæ poſitione datæ HI in Y, erit ordinatim applicata curvæ novæ Y (Y) cujus ſub arcu elementari inter puncta Y & (Y) præſcripta ratione determinanda intercepto, & ſub conſtante ſupradicta, non minore quàm $\frac{1}{2}$ BA, comprehenſum rectangulum æquabitur triangulo BH h, nempe elemento ſuperficiei coni Scaleni: atque adeò evolutione ſeu extenſione debita curvæ Y. (Y) in rectam, filo evoluto ducto in ipſum conſtantem ſupradictam, exhibebitur rectangulum æquale ipſi ABDHA ſuperficiei dimidiæ coni Scaleni vel ejus portioni (rectis ſcilicet binis ex B & arcu baſis comprehenſæ) cuicunque.

N°. LXXXVII.

N°. LXXXVII.

G. G. LEIBNITII

EPISTOLÆ XXVII.

AD JOH. JAC. HERMANNUM,

In Academiâ tandem Baſileenſi Philoſophiæ Moralis Juriſque Naturæ & Gentium Profeſſorem publicum:

ET UNICA

AD JACOBUM BERNOULLIUM,

In eadem Academiâ Matheſeos Profeſſorem.

Publici juris factæ in Memoriis Academiæ Berolinenſis anni 1757.

EDITORIS MONITUM.

CEleb. *Eulerum* inter & *Kônigium* omnibus nota eſt ab hoc ſuſcitata controverſia: Hanc minutim narrare noſtri non eſt inſtituti. Verbo dicemus Cl. *Kônigium*, ut *Eulero* gloriam præclariſſimorum ſuorum repertorum eriperet, contendiſſe D. *Leibnitium* quadraginta abhinc annis ante *Eulerum* mentionem feciſſe, utque opinionem ſuam auctoritate fulciret, fragmentum epiſtolæ a *Leibnitio* ad D. *J. J. Hermannum* menſe Octobris anni 1707 ſcriptæ indicaſſe.

Academia Berolinenſis apud quam res erat pendens, multa adverſùs fragmenti iſtius authenticitatem, ut probationem juris ſtabiliret, objicienda habebat, ſed ut probationem facti conſtituere volens, faſciculum ipſarum Ill. *Leibnitii* ad D. *Hermannum* epiſtolarum, [ipſius epiſtolæ ubi fragmentum ſupradictum ſupponebatur viſendæ causâ] reperiri cupiebat, vel etiam inveſtigandi an aliquid in aliis ad eundem epiſtolis eſſet, quod fragmentum iſtud aut confirmaret, aut irritum redderet.

Tandem iſte Epiſtolarum faſciculus Illuſtrium Baſileæ Magiſtratuum inveſtigationibus, & curis repertus fuit: D. *Hermannus* Baſileæ mercator, frater & Profeſſoris *Hermanni* heres, eas poſſidebat, & earum apographum auctoritate publicâ omnibus formalitatibus, ideoque plenâ authenticitate munitum, ad Academiam Berolinenſem libenter miſit, annis 1752 & 1753.

Epiſtola a *Kônigio* indicata non reperta fuit, & lectione earum quæ iſtam vel præcedere vel ſequi debebant, judicari facilè poterat, an veriſimile eſſet, illam ibi reperiri debere, adeo ut fragmenti citati exiſtentia impoſſibilis denunciata fuerit.

Alium iſtius epiſtolarum faſciculi uſum facere decreverat Academia, ſed obitus *Kônigii* finem impoſuit ei quod erat polemicum in illâ controverſiâ; Academiaque Profeſſoris illius

cineres turbare nolens, eas literas ſine ullâ perſonali notâ publici juris fecit; tantummodo quaſdam obſervationes (quas etiam ipſiſmet Epiſtolis adjecimus) ſub finem epiſtolarum XV & XXII, fragmenti ſupradicti reſpectu, addidit.

Hunc Epiſtolarum faſciculum in ſuis memoriis anni 1757 inſeruit Academia, ex quibus eas excerpſimus, ut & verba quæ ſupra nunc damus. Tantùm addemus Academiam, has Epiſtolas publicantem tanquam inſtrumenta litis ordinationi inſervientia, eas eodem ordine quo ad eam Baſileâ miſſæ fuerunt, edidiſſe; Nos verò qui eas operibus *Leibnitii* adjicimus, eas ſecundùm ordinem temporum typis mandare convenientius duximus, in hoc, legem juxta quam ipſa Academia in iſtarum Epiſtolarum præfatione, coordinandæ eſſent, nobis præſcribit, ſequentes.

G. G,

G. G. LEIBNITII
EPISTOLÆ
AD JOH. JAC. HERMANNUM.

EPISTOLA I.

Vir celeberrime,

CUm dudum magnifecerim præclara ſtudia tua, nunc, & notitiâ perſonæ delector, ex quo literas humanitatis, & doctrinæ plenas a te accepi. Cùm te commendavi Excellentiſſimis viris Reformatoribus ſtudii Patavini, vel potiùs Amico apud eos valido, feci quod tua erudi-tione ac virtute dignum putavi, & conveniens officio meo. Judicavi etiam in publicum utile, & tibi honorificum fore, ſi nova Analyſis noſtra tuo ingenio ornata in Italiam introduceretur. Itaque cùm te excuſaſſes religionis causâ, diſſimulavi reſponſum tuum apud Amicum Italum, dilato tempore, ut cogitandi tibi ſpatium relinqueretur, præſertim cùm expectandum videretur, quid Cl. *Naudæo* noſtro reſponſurus eſſes. Is ergò cùm nuper à te literas mecum communicaverit, quibus re ampliùs deliberata, ſententiam ut mihi quidem videtur, in melius mutaſti; jam, & Amico illi ſignifico, te à conditione oblata non abhorrere, & tibi ſuadeo, ut recta ad illum des literas; tum quòd ita evitatur ingens circuitus, tum quòd veſtrâ intereſt amborum, quàm primùm invicem noſci. Eſt ille V. Cl. *Mich. Angelus Fardella* Siculus, ſcriptis in re Mathematica, & Philoſophica elegantibus notus, cujus amicitia mihi conciliata Venetiis, ubi ille apud nobiliſſimos Viros gratiâ, & eruditionis famâ florebat, ex eo tempore ſemper ſum uſus. Cathedram Meteorologicæ profeſſionis apud Patavinos tenet ipſe; & licèt juvenes generoſos ex patriciis Venetis Matheſin theoreticam practicamque docuerit, maluit tamen hanc ſpartam Patavii deferri Viro erudito Tranſalpino; amat enim noſtros mirificè, & officiis colit. Itaque habebis in eo Amicum fidum, & cujus conſiliis niti poſſis. Literas, quas ad eum deſtinabis ita inſcribere licebit.

All' Illuſtr. Signor mio, e Padrone Colendiſſimo Il Sig. Abbate Fardella *Lettore publico nello ſtudio di Padoa.*

Huic

Huic ergo potiſſimùm ages gratias, & tanquam cum Viro præclaro & candido ages, ut par eſt. Nec dubito ejus opera, quæ ad ſtipendium, & reliqua pertinent, ritè confectum iri. De religione non eſt, cur in literis mentionem ullam facias. Nemo ignorabit, quis, cujasve ſis; ſed nemo curabit, ſi, ut credere de te par eſt, prudenter agas, nec temerè mentionem rei injicias, quæ ad rem, cujus cauſa accerſitus es, non facit. Satis ad amplificandam Dei gloriam, verumque cultum propugnandum facies, ſi ſcientiis auctis admiranda Dei magis magiſque detegantur, & apud gentem, ubi inconſulta ſuperſtitio hactenus cum *Copernico* verum Mundi ſyſtema interioremque rerum notitiam proſcripſit, aditus novus ad hæc arcana poſtliminio aperiatur. Cæterùm Venetiis ſcio Reformatæ Religionis exercitia frequentari, non publicè quidem, non ita tamen ut rem publicam fallant. Duos alios Viros egregios, & mihi amicos Patavii reperies, Medicos inſignes, & ſcriptis celebres, priorem etiam in re Mathematica præclarum, *Dominicum Gulielminum*, & *Bernardum Ramazzinum.* Hi vel in mei gratiam tibi favituri eſſent, quanquam (ſat ſcio) tutè per te facilè tales conciliare tibi poſſis. *Gulielminus* de aquis decurrentibus librum egregium & practicum Italicâ linguâ edidit, quo in ſumma plurimum ſum delectatus ob multam & curioſam obſervationem variorum accidentium in fluminum curſu, prudentemque conſiderationem incommodorum, & remediorum, quæ Bononiæ publico nomine aquas curanti per multos annos ſeſe obtulere, tametſi quæſtiones quaſdam θεωρητικωτέρυς ad Analyſin noſtram ex parte pertinentes, examinare non vacarit. Elegans calculus tuus circa Radios Oſculi perplacuit. Nec dubito quin novis in dies inventis egregiis aucturus ſis ſcientiam.

Viros doctos apud vos, qui mihi favent à me ſaluta; inprimis Cl. *Battierium*, tum vicinos vobis *Fatium*, atque *Ottium*, quorum illum novam quandam ſeriem tetragoniſticam ex mea eruiſſe V. Cl. *Jac. Bernoullius* ad me perſcripſit; id, qua ratione factum ſit, fortè ex te diſcam. Vale, & me ama. *Dabam Berolini* 24. *Novemb.* 1704.

P. S. Pariſiis Faſcis expectatur Baſileam mittendus, atque inde Auguſtam. Ei inerit Tabula ænea iconem continens Sereniſſ. Electoris Brunſvicenſis. Scripſi, ut ad Dominum *Bernoullium* dirigatur, & hunc rogo, ut inde Auguſtam curare velit. Sed dum vereor ne fortè abſit domo, rogo, ut favere velis, & aliquam ſi opus, rei curam gerere. Auguſtam deferri debet ad Dn. *Schrôck*, *Agent de Brunſvick.*

EPIS-

EPISTOLA II.

Literæ tuæ 21. Januarii datæ heri demum ad me pervenere: nam triſtiſſima morte Reginæ Boruſſorum factum eſt, ut paulo diutiùs Berolini hæſerim, quàm deſtinaram. Plurimum me affecit nuntius hujus fati tam immaturi, atque acerbi; nam Princeps erat omnibus virtutibus, decoribuſque cumulata, & quæ mihi mirificè favebat, ut quando in ejus Aula verſabar, vix unum mihi diem ab ea abeſſe liceret: colloquio ejus nihil ſuavius fingi poterat, aut magis conditum ingenii ſale. Ita bono ingenti mihi impoſterum carendum eſt, quod in omne reliquum vitæ tempus jure quodam meo mihi ſpondebam, ſed hæc apud te ἀπροσδιόνυσα mihi neſcio quomodo excidere, quando cogitationem rei funeſtæ renovat apparatus feralis corporis Berolinum tranſvehendi. Ut ad res tuas redeam, mirabar equidem nihil ampliùs a Cl. *Fardella* ad me perſcribi, credebamque rem inter vos tranſigi. Nunc verò penè vereor, ne quid ipſi acciderit, itaque proximo pulſore non tantùm ad ipſum mittam literas, ſed etiam ad Dn. *Zanovellum* noſtras res Venetiis agentem, cui Dn. Abbas *Fardella* non eſt ignotus, ut diſcam tandem, quo res ſit loco. Si quid poſſum Caſſellis per amicos, non deero quidem, interim inquiram, an id agatur ut Dn. *Papinus* profeſſione ſeſe abdicet. Placet methodus, quam excogitavit Dn. *Fatius*, & tu quoque tuo Marte detexiſti, ſeriem propoſitam in aliam convertendi. Si tres termini, aut plures in unum adderentur, & aſſumeretur ſemper pars tertia, vel alia adhuc minor, totidem aliæ ſeries prodirent. In expreſſione numerorum dyadica plura latent, quàm quis facilè ſuſpicetur. Quidam Pater Congregationis Oratorii Pariſiis Algebram novam edet, cujus conſpectus aliquis ad me fuit tranſmiſſus. In ea mentionem quoque faciet meæ novæ cogitationis characteriſticæ, cujus ſpecimen aliquando dedi in Actis Eruditorum, cùm expoſui extractionem univerſalem radicis ex æquatione per ſeriem, quod neſcio, an animadverteris, nempe pro literis a, b, c, d &c. non exprimentibus ſatis habitudinem ipſorum ex datis, exhibeo numeros eam exhibentes. Idque præclari usûs eſſe deprehendo ad Canones calculandos. Exemp. gr. ſi ex duabus æquationibus, duarum incognitarum reperienda ſit una unius incognitæ, ſic procedo in ipſis æquationibus generatim formandis, & quidem pro ſecundo gradu

$$0 = 100 + 110x + 101y + 111xy + 120xx + 102yy.$$
$$0 = 200 + 210x + 201y + 211xy + 220xx + 202yy.$$

ubi numeri, velut 111, 211. &c. ſignificant prima nota ſua (1 vel 2) utrum ex prima an ſecunda æquatione ſint ſumti; duabus verò ſeqq. notis exprimitur; quomodo ſe habeant x & y in termino, cujus ſunt coefficientes, ſic 111, vel 211, coefficiens eſt termini $x^1 y^1$, vel xy, ſed 120,

coefficiens eſt termini $x^2 y^0$, ſeu xx, & ita porrò. Hoc modo jam calculando prodeunt ſemper Canones quàm maximè regulares, & harmoniam quam continent prodentes. Optandum eſſet incipiendo a ſimplicibus, hoc modo conſtitui progreſſionem Canonum pro tollendis incognitis. Ita magno calculi labore impoſterum levaremur, nec contemnendi uſus theoremata acquireremus. Sed de his, & ſimilibus aliis plura. Nunc vale, & me ama. *Dabam Hanoveræ* 10. *Martii* 1705.

P. S. Inſignem Virum Dn. *Bernoullium* veſtrum imò noſtrum à me ſaluta. Optarem vel ipſe vel alius varia ludendi genera Mathematicè tractaret.

EPISTOLA III.

Gaudeo rem Patavinam eo loco eſſe, ut ſpes ſit omnia ritè, & ex animi tui ſententia conſtitutum iri. Id ex Domini *Bernoullii* veſtri, aut potiùs noſtri, literis non ita pridem Baſilea ad me datis intellexi. Interea meas quoque tibi redditas puto, quas ſcripſeram cùm nondum ſcirem Cl. *Fardellam* tibi reſpondiſſe. Cæterum rogo, ut maturè mihi indices, quandonam in Italiam ſis abiturus, ut antequam id fiat, deliberare poſſim, quæ fortè e re eſſe queant. Si vacat, rogo, ut cogites de quadam Analytica inquiſitione, quam & Dn. *Jacobo Bernoullio* acuminis inſignis Viro commendavi. Scis omnium æquationum radices poſſe exprimi rationaliter per ſeriem infinitam. Idque etiam in eo Schediaſmate, quo Dno. *Fatio* in Actis Eruditorum reſpondi, generali canone præſtare docui. Sed quid fiet, ſi æquatio habeat omnes radices impoſſibiles, & præterea quomodo diverſæ ejuſdem Æquationis radices in ſerie illa a ſe invicem diſtinguerentur? Hoc nondum quiſquam ſatis expoſuit. Vellem autem inprimis explicari caput illud de impoſſibilitate quantitatis ex valore ejus rationali per ſeriem infinitam expreſſo agnoſcenda; & quidem ex ipſa ſerie independenter ab æquatione, ex qua deducta eſt. Interdum enim ignoratur hæc æquatio, interdum nulla planè datur, cùm quantitas eſt tranſcendens. Et quidem in caſu impoſſibilitatis neceſſe eſt ſeriem non eſſe advergentem, ſeu ſi pars ejus ſemper major atque major ſumatur, neceſſe eſt differentiam a quæſita quantitate non fieri minorem quantitate data; ſed hoc prævidere ex conſtructione ſeriei, & cùm ſeries illa ex generali ſui æquationis gradu deducta eſt, velut ex $xx + bx + ac = 0$ invenire ex ipſa ſerie, ſeu ex defectu advergentiæ, limites ſeu quandonam incipiat aut definiat impoſſibilitas, id inquiſitione dignum puto. Quòd ſi id ex ſeriebus eruere poſſumus, quæ ex æquationibus ſunt deductæ, faciliùs etiam deinde idem præſtabimus in ſeriebus itidem generalibus, ſed valorem quantitatis tranſcendentis exprimentibus. De cætero me ad priores refero. Vale, & me ama. *Dabam Hanoveræ* 7. *April.* 1705.

Poſt-

Poſtſcriptum. (a) Ante multos annos excogitavi Arithmeticæ genus novum tanquam ipſius Analyſeos tranſcendentis inſtrumentum inexpectatum. Publicavi nondum, quòd uſus ejus reapſe oſtendere non vacarit, volui tamen, ut neſcius ne eſſes. Binariam voco hanc Arithmeticam, vel dyadicam imitatione decadicæ, nam ut alii progreſſione Denaria, ita
0 | 0 ego dupla utor; eaque ratione non aliis egeo notis quàm
1 | 1 0, & 1, ut in tabula adjecta vides, quæ utcunque conti-
10 | 2 nuari poteſt. Ex hac ſcribendi ratione ſtatim conſtat, quod
11 | 3 alicubi per ambages demonſtravit *Schotenius*, & norunt
100 | 4 Examinatores monetarum paucis ponderibus progreſſionis
101 | 5 geometricæ duplæ multæ ponderari poſſe. Cæterum uſus
110 | 6 hujus ſcribendi rationis non eſſe debet in populari compu-
111 | 7 to, ſed Numerorum arcanis eruendis. Habet enim id præ-
1000 | 8 clarum hæc expreſſio, quòd cùm ſit ſimpliciſſima, ſtatim
1001 | 9 miras exhibet connexiones, dum ſeries omnes numericæ or-
1010 | 10 dinatim procedunt. Vires numerorum naturalem ſeriem
1011 | 11 periodis conſtare ſcriptu facillimis, primæque columnæ pe-
1100 | 12 riodum eſſe 01, 01, 01, &c. ſecundæ 0011, 0011, &c;
1101 | 13 tertiæ 00001111, 00001111, &c. atque ita porrò. De-
1110 | 14 monſtravi autem, quod momenti eſt maximi, ſeriem nu-
1111 | 15 merorum triangulorum, quadratorum, cubicorum, biqua-
10000 | 16 draticorum, ſurde ſolidorum, &c., & ut verbo dicam,
potentiæ cujuſcunque quantumvis altæ, ſimiliter periodum habere in unaquaque columna ſeu finitum intervallum, quo decurſo redeunt notæ priores. Dantur & in aliis præter dyadicam progreſſionibus hæc intervalla, ſed propter multiplicitatem notarum non facilè erui poſſunt, & longiùs differuntur; hic in ſumma ſimplicitate notarum, quæ non aliæ quàm 0, & 1, facillimus aditus patet. Vellem vacaret eruere cujuſque potentiæ periodos, fortaſſe ſuccurrerent amici tui, meique. Et ne putes rem eſſe exigui momenti, conſiderandum eſt pro ſeriebus infinitis generalibus, ubi ſcilicet indeterminata ineſt, & pro determinatis, ſed per fractos, qualis eſt mea tetragonoſtica. $\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5}$ &c. ſupereſſe ſeries in integris inveſtigandas tanquam ultimum, quod in quantitatibus tranſcendentibus determinatis per numeros exprimendis quæri poteſt. Ita ſi haberemus, qua ratione continuari in infinitum poſſet ſeries *Ludolphina* pro circulo, nihil ampliùs in numeris rationalibus pro circuli magnitudine, quærendum ſupereſt. Quod autem difficile erit, dum notis utemur decadicis, id faciliùs (opinor) obtinebimus per dyadicas, ubi non aliæ erunt notæ quàm

(a) Poſtſcriptum ſuperius in Memoriis Berolinenſibus ex quibus faſciculus iſte epiſtolarum deſumptus fuit, indicatur ſub N°. 26. Illud verò, judicio iſtarum memoriarum authorum obſequentes, ad finem epiſtolæ 7. April. 1705. datæ, reponimus.

0 & 1. Et viam eo perveniendi commodiſſimam video, ubi conſtituta erunt, prout par eſt, novæ hujus ſcientiæ Numerica Elementa, quæ cùm ita ſint, nolim ſuadere, ut tempus teras *Ludolphinis* calculis extendendis, ubi nec magna laus ingenii, nec artis inveniendi augmentum apparet. Unum adhuc adjicio, cùm crebris objectionibus Virorum doctorum pulſatus fuerim, qui noſtra infinitè parva, abjectionemque eorum pro nullis concoquere non poſſunt, convincendis illis ſubinde methodum meam hanc eſſe, ut tantùm poſtulem, caſum quo quantitas aliqua ſit 0, in generali calculo comprehendi, ubi ubi eſt quantacunque, aut quantulacunque. Hoc uno enim admiſſo (quod eſt poſtulatum, quo vulgares etiam Analyſtæ ſunt uſi) neceſſe eſt incidi in calculi noſtri leges. Cæterum revera ita ſentio, quantitates infinitas, & infinitè parvas non magis reales eſſe quàm ſunt radices imaginariæ; nec minùs tamen quàm has uſum in Analyſi præſtare. Cæterum pro ipſis facilè ſubſtitui utcunque magnas, aut utcunque parvas, ut ſcilicet error minor ſit quovis dato.

EPISTOLA IV.

Ipſe ad me ſcripſit D. Abbas *Fardella*, literas inter vos tardè commeare, id difficultati itinerum tribui debet turbulentis his temporibus, ex eâque morâ id natum incommodi, quod Ill. *Marcellus*, qui rebus Academiæ Patavinæ præerat, apud quem non parum poteſt *Fardella*, abiit magiſtratu. Spero tamen non ideo minùs rem proceſſuram, & mirum non eſt, ſi reſidenti id negotii datum ut ad Dominos referat.

Videtur mihi determinatio limitum pars eſſe eſſentialis doctrinæ de ſeriebus infinitis plenè tradendæ. Nam utique niſi demonſtretur ſeriem advergere quæſito, ita ut continuatione reddere quæramus errorem minorem datâ quantitate, non poſſemus pronuntiare ipſam ſeriem totam dare quæſitum. Hâc autem demonſtratione habitâ, via utique ſtrata eſt ad determinandum limitem, ſeu ultimum caſum advergentiæ, qui utique ultimus eſt caſus poſſibilitatis. Quoties talis eſt ſeries, aut in talem transformata, ut conſtet ex partibus $a - b + c - d + e - f$ &c. ubi ſcilicet plus, & minus alternant, ſive quævis harum partium a b c &c. quam quantitatem poſitivam ſignificare ſuppono, ſit ſimplex, ſive rurſus ex aliis partibus conſtet, tunc ad ſciendum, utrum ſeries advergat quæſito, tantum opus eſt videre, an ipſa membra a, b, c &c. advergant nihilo, ſeu fiant minores quantitate quavis datâ. Hoc Theorema olim demonſtravi cùm meam quadraturam arithmeticam in Galliâ edere vellem. Nempe ſi ſeries $a - b + c - d + e - f$ &c. $= y$. Et fiat

$y = a$		major	ita tamen	b
$y = a - b$	erit	minor	ut ſit	
$y = a - b + c$	valor	major	error	c
$y = a - b + c - d$	juſto	minor	minor	d
&c. &c.		&c.	quam	e

ſemper ſcilicet minor termino proximo, quos habemus, itaque ubi transformaretur propoſita ſeries in aliam, in qua + & — in membris alternarent, tunc limes vel transformationis qui poſſibilitatem ejus reſtringeret, vel advergentiæ ad nihilum in ipſis terminis foret limes poſſibilitatis ſeriei. In radicibus æquationum limites aliundè, nempe ex ipsâ æquatione nobis noti ſunt, & poſſumus etiam transformare æquationes pro arbitrio, itaque in ipſis opinor faciliùs dabitur modus ex ipsâ lege ſeriei limitem poſſibilitatis deducendi, & res deinde faciliùs promovebitur ad ſeries quarum origo ex æquatione aliquâ ordinariâ nobis non eſt explorata, ſed ſunt multæ aliæ viæ perveniendi ad quæſitum una alia commodior pro re natâ. Sufficit in genere nos ob oculos id habere, ut demonſtremus ſeriem reverâ advergere, & ſuſpicor rem D. *Bernoullio* veſtro expenſam, qui in argumento ſerierum infinitarum plurimum ſtudii poſuit. Cæterum ad demonſtrandam poſſibilitatem advergentiæ neceſſe eſt, ut determinemus legem, ſeu progreſſionem ſeriei, vel etiam ut determinemus terminum quemcunque progreſſionis. Exempli causâ in ſerie $\frac{x}{1} + \frac{x2}{2} + \frac{x3}{3} + \frac{x4}{4}$ &c. lex progreſſionis eſt, ut poſito Terminum eſſe T, ſit T = X n : n, neque verò niſi cognitâ lege ſeriei ad demonſtrationem advergentiæ poteſt perveniri.

Quod de Arithmetica dyadica illuſtranda cogitas, gaudeo. Omnino ſentio in ea latere non tantùm perfectionem ſcientiæ numerorum, & etiam applicationis numerorum ad Geometriam, ut ſcilicet determinatas quantitates ſive irrationales, ſive etiam tranſcendentes quàm optimè in numeris ſerie ſcilicet bimalium, ut vulgo decimalium, exprimamus, definiamusque, quod in eo genere primarium eſt, legem progreſſionis. Putem autem poſt Algorithmum eſſe veniendum ad determinationem periodorum, quas habent columnæ ſeriei numerorum Arithmeticæ progreſſionis, & potentiarum ab iis quarumcumque, aut formularum inde conflatarum. Eumque in finem dedi demonſtrationem, qua oſtendo quaslibet talium ſerierum columnas eſſe periodicas, ita ut priores notæ conſtanter redeant poſt aliquod intervallum. Hæc demonſtratio ſimul viam aperit ad periodos has determinandas. Itaque communicare eam volui, tanquam potiſſimùm profuturam. Ignoſci autem peto lituris, nam ut rurſus deſcriberetur, nunc commodè & ſtatim fieri non potuit.

 Si

Si numerorum naturalium columnæ primæ terminos quoslibet vocemus 10, columnæ ſecundæ vocemus 11, tertiæ terminos quoslibet 12, quartæ 13, &c. periodus columnæ terminorum 10 eſt 010101, ſeu breviter 01, columnæ ipſorum 11. eſt 0011, columnæ ipſorum 12 eſt 00001111 ſeu 0414, columnæ quartæ ſeu pro 13 eſt 0818, &c. & generatim columnæ (n — 1) mæ ſeu terminorum 1 n eſt 0. 2n. 1. 2n, ſeu nullarum 2n. & unitatum totidem. Hinc porrò indago, quas periodos faciant 10. 11, (ſeu factum ex 10. in reſpondentem 11) 10. 12, & 10. 13 &c. Nempe 10. 11. habet periodum 02 (01) 1 (ſeu nullarum duarum & deinde 01 ſemel) & 10.12. habet periodum 04 (01) 2, (ſeu nullarum 4. & deinde 01. bis ſeu 0101, ut tota periodus ſit 00000101) 10. 13 dat 08 (01) 4 & generaliter 20 in 1 n dat periodum 02 n (10) 2^{n-1}. Et ſimiliter 11 in 1 n dat periodum 0 2 n (0212) 2^{n-2}, & generaliſſimè 1 m in 1 n dat 02n. (02 m 1. 2m) 2^{n-m-1}, id eſt ſi terminus columnæ, cujus periodus habet 2m nullas & deinde 2m unitates, multipliciter in terminum reſpondentem columnæ, cujus periodus eſt nullarum 2 n, & unitatum totidem, poſito *n* eſſe majorem quàm *m*, periodus columnæ productæ erit primum nullarum 2n, deinde repetet ipſam periodum columnæ *l m* tot vicibus, quot in 2^{n-m-1}. Sunt unitates. Eodem modo pergi poteſt ad productum ex quibuſcunque naturalium columnis tribus, quatuor &c. Regulaque condi generalis. Id jam prodeſt ad potentiarum periodos determinandas, nam numeri &c. 13 | 12 | 11 | 10 quadratum eſt

*	12	*	11	*	10
&c. 10. 14	10. 13	10. 12	10. 11		
&c. 11. 12	11. 12				
&c.	&c.				

Hæc in ſpeciem perplexa aggredienti facillima comperientur. *Dat. Hanoveræ* 26. *Junii* 1705.

P. S. Inſigni Viro Dn. *Bernoullio* veſtro proximis ſcribam, nunc ſaluta quæſo quàm officioſiſſimè, & ſignifica pecuniæ refuſionem, & quæ ad tranſitum vectarum rerum pertinent, mox curatum iri, interea me multas gratias agere. Vale, & me ama.

EPISTOLA V.

Spero redditum iri nuperas meas, nec minùs quas nunc ſcribo. Adjeceram illis demonſtrationem profuturam ad intelligendam periodorum in ſeriebus numerorum Arithmeticæ progreſſionis utcunque replicatæ neceſſitatem, rationemque. Voco autem progreſſionem Arithmeticam replicatam,

tam, omnes ſummas, aut ſummarum ſummas utcunque replicatas Arithmeticæ progreſſionis, atque adeo omnes Arithmeticorum potentiæ ejuſdem gradûs, aut ex his conflatæ formulæ, ſunt termini progreſſionis Arithmeticæ replicatæ. De Geometria tranſcribo, quæ Amicus ingenioſus ad me ſcripſit, cui voluPe fuit non nihil in hæc inſpicere, me invitante.

In progreſſionibus, inquit, *Geometricis duplis* noſtra *Arithmetica* vulgari ſeu *Decadica* expreſſis notæ primæ columnæ redeunt eædem poſt quartam quamque, in ſecunda columna poſt vigeſimam quamque, in tertia poſt centeſimam quamque, in quarta poſt quingenteſimam quamque, Numeris ordinalibus ſemper in quintupla progreſſione creſcentibus.

In progreſſionibus Geometricis *triplæ*, *octupla*, & aliis quibuſdam, ut credi par eſt, eadem lex obſervatur. Notandum tamen ſi *octuplam*, à numero 5. incipias, nullas meras prodire pro prima columna, ſed in ſecunda eaſdem notas redire poſt quartam quamque, in tertia poſt vigeſimam quamque, & ita porrò ut antè.

In *proportione quadrupla* eædem notæ redeunt in prima columna poſt alteram quamque, in ſecunda poſt decimam quamque, in tertia poſt vigeſimam quamque &c.

In *quintupla* à quocumque numero incipias 5., aut 0 in prima columna reperies. In ſecunda columna ſemper eadem nota 2. aut 7. aut 0; ſed in tertia columna redeunt notæ poſt alteram quamque, in quarta columna poſt notam quartam quamque, in quinta columna poſt notam octavam quamque, & ita porrò ſemper notas duplicando.

In *proportione ſextupla* una, eademque nota eſt in prima columna, in ſecunda redeunt notæ poſt quintam quamque, in tertia poſt 25tam quamque, in quarta poſt 125tam quamque, & ita porrò.

In *ſeptuplæ* prima columna eædem notæ redeunt poſt quartam quamque. Cæteræ columnæ legem priſtinam ſervant, nempe ut in tertia notæ redeant poſt 20mam quamque, in quarta poſt 100am quamque &c.

In *noncuplæ* prima columna ſunt binæ tantùm notæ, in ſecunda eædem redeunt poſt 10mam quamque, in tertia poſt 50mam quamque &c. Decupla cognita eſt. In *undecuplæ* prima columna non niſi una eſt nota, in ſecunda redeunt notæ poſt decimam quamque, in tertia poſt 50mam quamque &c.

Si pro noſtra Arithmetica decadica aliam verbi gratiâ *Heptadicam* ſequeremur, in *progreſſionis duplæ* prima columna notæ redibunt poſt tertiam quamque, in ſecunda poſt 21mam quamque, in tertia poſt 147am quamque &c.

In *Octoadica* progreſſionis *duplæ* ſingularis quædam lex eſt. In tripla ſi a 3. incipias, notæ primæ columnæ redeunt poſt ſecundam ſeu alteram quamque, in ſecunda poſt notam decimam ſextam quamque, in tertia poſt 128mam quamque &c.

In

In Arithmetica *Enneadica* pro *dupla* progreſſione in columna prima notæ redeunt poſt ſextam quamque, in ſecunda poſt notam 54tam quamque, in 3tia poſt notam 486tam quamque &c. Pro progreſſione *tripla* (quæ eſt aliquota noncuplæ lex revolutionis accedit ei, quæ eſt in dupla ſecundùm Arithmeticam Octoadicam. Si *quadruplam* a 3. incipias, ſolæ notæ 3. erunt in prima columna, ſed in ſecunda notæ redibunt poſt nonam quamque, in tertia poſt 81am quamque.

In Arithmetica *Hendecadica*, ſive incipias per 1, ſive per 3, in prima columna notæ redeunt poſt 10mam quamque, in ſecunda poſt 110mam quamque, in tertia poſt 1210mam quamque, &c. Tandem in Arithmetica *pentadecadica* pro progreſſione *dupla* ſi incipias ab 1, notæ in columna prima redeunt poſt quartam quamque, in 2da poſt 60am quamque, in 3tia poſt 900mam quamque, &c. Ex his ſpeciminibus intelligi poteſt, quantum hic campus novæ numerorum ſcientiæ ſit apertus, quæ non in ſimplici conſiſtat ſpeculatione, ſed inſignia compendia, maximaſque præbeat utilitates, non tantùm in numerorum rationalium ſeriebus, ſummis, terminis longè remotis quàm facillimè licèt inveniendis, ſed etiam in irrationalium imò tranſcendentium valoribus ad leges revocandis. Et quamquam in quocumque Arithmeticæ genere aliquid tale locum habeat, ipſaque comparatio diverſarum Arithmeticarum majorem lucem fœnerari debeat; neceſſe eſt tamen Dyadicam utilitatem eminere, ubi ob binas tantùm notas plerumque omnia ſimpliciora, & legis patientiora eſſe oportet. Cæterum quia de Algorithmo quatuor, quas vocant, ſpecierum cogitaſti, ibique omnis ferè difficultas ad additionem redit, tranſcribam tibi modum, quem pro additione adhibeo meum, quo ſimul errores meliùs excluduntur, & facilitati reviſionique conſulitur.

HGFEDCBA

HGFEDCBA
1 0 1 1 1
1 1 1 1
1 0 1 1 1
$1\,0\,1\,1^{2}0$
$1^{2}1\,1^{2}1\,1^{2}$
$1\,0\,1^{2}1$
1 0 0 0 0 0 0 1
1 1 1
1 0 1 1 1
1 0 1 0
1 1 1 0 1
1 1 1 1 1
0 1 1 1
1 0 0 1 0
1 1 0 1 1
$1\,1\,0\,1^{3}0$
1 0 0 0 1
1 0 0 0
$1^{3}0\,1\,0\,1^{3}$
1 1 0 1 1
$1^{3}1\,1\,1$
1 0 1 1
$1\,1\,1^{3}1^{2}0$
$1^{2}1^{2}1\,0\,1^{2}$
1 0 1 1
1 0 1 0 1 1 0 1 1

1	ſigni-	ſummam	$2^1 = 2$
2	ficat	præcedentium	$2^2 = 4$
3		unitatum	$2^3 = 8$
&c.		eſſe	&c. &c.

Proceſſus Additionis dyadicæ hic eſt

In columna M, ut A, in unum addo Univerſitates maximum conficientes Numerum progreſſionis Geometricæ duplæ, quem columna dare poteſt, qui in A eſt 4, cujus a 2. potentiæ exponens, cùm ſit 2, ideo noviſſimæ quatuor unitatum aſcribo 2. Inde rurſus colligo maximum numerum progreſſionis geometricæ duplæ, quem dare ſolum poteſt reliquum columnæ, ſed cum hoc loco det nullum, ſuperſitque 1, ideo ſcribere oportet 1. ſub columna. Numerus autem 2. transfertur in columnam à præſente ſecundam, (ſi eſſet numerus 3, transferretur in 3tiam & ita porrò) & ibi ſignatur punctum in loco ſecundo columnæ ab hinc ſecundæ C (ſi eſſet 3, ſignaretur punctum in loco tertio columnæ ab hinc tertiæ D) intelligo autem primum, ſecundum, vel tertium locum de intervallis inter notas ſumtis ab imo aſcendendo. Puncta autem in columna, ubi ſignantur ſignificant unitates. (*) In *columna* B unitati quartæ rurſus adſcribo 2, ob rationem præcedentem, & ab hinc unitati ſecundæ aſcribo 1 loco 1, ut ambiguitas evitetur, nec unitas collectitia cum unitate columnæ confundatur, cumque nihil reſtet ſub columna B ſcribo 0, & ob 2 ſigno punctum in columnæ poſt præſentem ſecundæ D loco ſecundo. Et ob 1 ſeu unitatem ſigno punctum in loco primo columnæ à præſenti B primæ C. Similiter in *columna* C unitati quartæ adſcribo 2, & ſecundæ ab hac aſcribo 1, & quia nihil reſtat ideo ſub columna C ſcribo 2, & ob 2. ſigno in ſecundo loco columnæ à C ſecundæ E, & ob 1. ſigno punctum in primo loco columnæ à C primæ d, & ita porrò. Cùm ergo examen, ſeu reviſionem inſtituo (nam hâc methodo puncta punctorumque ſedes cum numeris conferendo ſemper calculus

(*) Ductus hinc appinxi ad oſtendendam connexionem inter puncta, & eos, ex quibus oriuntur numeros collectionum exponentes, ut ratio proceſſus appareat, in praxi autem hic ductibus opus non eſt.

lus ab intuente examinari poteſt ex integro, vel per partes) primùm confero quod ſub columna ſcriptum eſt, cum eo, quod in columna ſupereſt poſt numerorum collectitiorum exponentes aſcriptos. Deinde percurro puncta notata infimo, ſeu primo loco, & video an cuique reſpondeat 1 in columna proximè præcedente, mox percurro puncta notata ſecundo (tertio) loco, & video, an cujus reſpondeat 2. in columna ſecunda retro (3 in columna tertia retro, &c. Vale. *Dabam Hanoveræ* 2. *Julii* 1705.

P. S. Quod ad ſeries infinitas, (de quibus in præcedentibus noſtris literis) attinet, non id ſuadeo, ut magnoperè ſis ſollicitus de ſeriei valore finito inveniendo, quam id licet (hoc enim num fuerit nimium e re publica mathematica petere) ſed tantùm ut conſtituatur modus agnoſcendi, an valor per ſeriem ſit poſſibilis, ſeu advergens, & quis ſit limes poſſibilitatis, idque ex ipſa ſerie, origine ſcilicet ejus ignorata, vel diſſimulata? Id enim eſſentiale eſt ad conſtitutionem ſeriei infinitæ, quæ finitæ quantitati æquari debet, ut certi ſimus, ac demonſtrare poſſimus ex lege ſeriei advergentiam ei ineſſe, ſeu ſatis longè procedendo errorem fieri minorem dato.

EPISTOLA VI.

EX nuntio de obitu inſignis Viri, & ſemper memorandi Dn. *Jacobi Bernoullii* plurimum doloris accepi, tum ob ingens profundioris doctrinæ detrimentum, tum quòd me privatum videam amico eximio, & adjutore magno communium ſtudiorum. Honoratiſſimæ Dominæ viduæ, fratribuſque defuncti ſpectatiſſimis rogo, ut gratias agas meo nomine, quòd me acerbi caſus certiorem reddentes affectum ſuum teſtari, meique ſe affectus certos oſtendere voluere. Societati Scientiarum Regiæ, quæ Berolini eſt, ſignificavi, & veſtram & noſtram jacturam. Non dubito magno omnium ſenſu acceptum iri: nam acumen Viri quod pauci æquabunt, nemo ignorat harum literarum intelligens. Ipſius certè operâ potiſſimum effectum eſt, ut meæ meditationes circa interiorem Geometriam ampliorem uſum acciperent, latiuſque ſpargerentur, quod ille præſtitit non tantùm fratrem ingenioſiſſimum excitando, ſed & propria pulcherrima inventa conferendo. Quorum ne quid pereat noſtrum monere eſt, curare cognatorum, & tuum quoque, Vir eximie, & amicitiæ, & viciniæ jure, ſpero ultima voluntate defuncti aliquid de affectis laboribus, ſchediſque conſtitutum eſſe; ſin minùs poſſent inferri publico loco, veluti Bibliothecæ patriæ, aut Tabulario Societatis: Vitam etiam delineari cum elogio velim, quod egregius Vir *Otto Menkenius* libenter actis ſuis inſeret. De Dn. *Joh. Bernoullio* diu eſt quòd nihil intelligo. Eum nunc puto apud vos agere, aut certè non diu abfuturum. Itaque ſpeciatim à me ſalutari, & dolorem meum ſignificari peto. Vidi quæ in Actis dixit de mea ratione

con-

conſtruendi problematis, quod propoſuerat Curvarum datæ æqualium. Illud miror ſuſpicatum, neſcio quas, mirificas calculi difficultates: credo quod exequi declinaſſem, quod etiam in leviſſimis facio, adeo nunc alia urgent. Venit in mentem ſuadere hæredibus tuo interventu, ut congerantur omnes defuncti Schedæ Mathematicæ, addo, & philoſophicæ, & ut ſpeciatim omnium, quæ in Actis, diariiſque dedit, Analyſes colligantur, ut aliquando edi poſſint. Interdum cum non omnibus harum rerum peritis obviæ videbuntur. Calculum etiam nuperum de curvis tertii gradûs, ex quibus jam 33. deſcripſerat, aſſervari è re putem. Spero intelligere quæ ſive in dyadicis, ſive in aliis ipſe pro inſigni acumine tuo ſubinde agis, & optem imprimis progreſſionis Geometricæ periodos exhiberi in columnis. Malè me habet, (etſi fortunæ tuæ faveam) quòd diſceſſu tuo exigua mihi ſpes relinquatur videndi tui, neque enim credo antè Italicum iter excurres in Germaniam hactenùs tibi præteritam. Ex Cl. *Fardellæ* litteris conſtantem in ipſo conatum deprehendo conficiendi negotium tuum, nec ſpem abeſſe, mutatiſque licet Perſonis priora conſilia ſupereſſe. Quod ſupereſt, vale, & me ama. *Dabam Hanoveræ* 21. *Sept.* 1705.

EPISTOLA VII.

Lipſiam miſi quæ beneficio tuo accepi pertinentia ad vitam inclyti Viri *Jacobi Bernoullii.* Fluebat mihi olim venula quædam poëtica, cujus & ſpecimina habentur, ſed nunc exaruit, itaque diſticho quæſo ut contenti ſitis, quo ita celebravi memoriam amici.

Infinita tibi terris lux fulſit in ipſis,
Bernoulli, & quiſquam te ſupereſſe neget.

Dabam Hanoveræ 24. *Decemb.* 1705.

P. S. Expecto avidè decretum animi tui intelligere in Negotio Patavino, cui non unam ob cauſam faveo.

EPISTOLA VIII.

Diu eſt, quòd de negotio tuo nihil intellexi. Epigrammation in memoriam Bernoullianam Lipſienſes Actorum Collectores brevi compendio vitæ à nobis tranſmiſſo adjecere, ita non peribit, ſi modò tanti eſt. Neſcio an tibi ſignificaverim V. Cl. *Dominicum Gulielminum* ad me dediſſe literas, quibus ſignificat inter alia, ſe ſententiam de te rogatum, communicato etiam ſcripto tuo, quo noſtra contra Batavum objectiorem defendis; ſi verò merito tibi favere, & pergratum ſibi fore ſi advoceris. Reſpondi ipſi multa alia interim à te eſſe præſtita ad ſcientiæ augmentum, quæ etiam extent in Actis; interim fortaſsè proderit Dn. Abbatem *Fardellam* ex te intelligere quod de Domino *Gulielmino* ſcripſi. Ex Gal-

lia mihi ſcriptum eſt Dn. *Saurinum* cum *Rollio* de calculo noſtro litigantem typis edi curaſſe tuum judicium, ſimulque V. Cl. *Joh. Bernoullii*, & meum, ſed jubente Dn. Abbate *Bignonio* ſupprimere coactum exemplaria; *Bignonio* ægrè ferente, quòd hoc factum eſſet lite pendente, & judicio jam conſtituto; quanquam non novum ſit etiam poſt litem in tribunalibus conteſtatam edi ſcripta à litigantibus.

Quis Monachus ille Benedictinus, qui de Cathedra Mathematica tecum certare audet, neſcio; an fortè quidam eſt, qui ſe, ni fallor, *Grandium* vocat, & quædam circa calculum differentialem attentavit utcunque, mihi, ſi bene memini, per Cl. *Magliabechium* tranſmiſſa, ſed nihil hac de re affirmare poſſum. Curva datæ æqualis effici poteſt modis infinitis per cujuſvis formæ ſpeculum, imò, & per vitrum figuræ datæ, adeoque catacauſtice; ſed Ellipſis, & Hyperbola hanc præbent commoditatem, quòd tibi nullo opus eſt Calculo ad definiendam ſpeculi poſitionem, magnitudinem aut ſpeciem infimam, ut differentia inter fila evaneſcat. Eleganter notavit Dn. *Bernoullius* aliquando Ellipſin abire in circulum, ſeu duo foci coeunt in unum, hoc nempe intelligo fieri ſi curva in ſe redeat. Doctiſſimus *Jac. Bernoullius* paulo ante obitum inquiſierat in Curvas tertii gradûs, quas *Newtonus* etiam determinare aggreſſus eſt, idque fecit Libro *Newtoni* nondum inſpecto; putabat plures prodituras curvas quàm dedit *Newtonus*, & jam ultra 30. determinaverat, quas multum adhuc a numeri medietate abeſſe putabat. Vellem hæc, aliaque multa egregii Viri meditata non interire, & Hæredes vel tibi, vel alteri committere, ut ex ſchedis ejus utiliora excerperentur in publicos uſus. Mereretur proſecutionem quod de curva per data puncta tranſeunte ſcripſiſti. Quod ſupereſt, Vale, & fave. *Dabam Hanoveræ* 15. *April.* 1705.

EPISTOLA IX.

GAudeo non mediocriter Patavinæ Profeſſionis negotium tandem eſſe confectum. Idem mihi ſignificat Dn. Abbas *Fardella*, Vir doctrina non minùs quàm virtute excellens, & qui plurimum in ea re laboravit, utilitatis publicæ causâ. Ei nunc gratias ago, & plurimum me quoque debere profiteor: ipſi enim uni acceptum ferendum eſt, non tantum quòd propoſita res eſt, ſed etiam quòd confecta tot difficultatibus ſuperatis, quas facilè animo complecti licet. Neſcio, an religioſus, ut vocant tibi æmulus, non ſit *P. Guido Grandius*, cujus nuper aliquid prodiit in noſtro etiam Calculo tentatum, ſed ita ut non longè progreſſum appareat. Multum ſpero Italiam tibi debituram, ſed Patavium in primis, quanquam ſatis agnoſcam per longum ſatis tempus tibi non vacaturum admodum incumbere ſubtilitatibus. Profeſſores enim ſæpe captui juvenum ſe accommodare, eaque magis docere oportet, quæ proſunt diſcentibus, quàm

quæ

quæ ſplendent inter profectos. Cæterum uti tibi gratulor honorem, & emolumentum, ita propemodum doleo longiùs te recedere, quàm ut aliquando te videre ſperem, ſed meam voluptatem commodo tuo, imò publico, poſthabendam putavi. Sperò autem communicatione crebra abſentiæ damnum levatum iri; nam facilis inter nos eſſe poteſt literarum commutatio per Dn. *Zanovellum* Agentem in rebus Sereniſſimi Electoris apud Venetorum Sereniſſimam Rempublicam. Non dubito, quin ſubinde aliquid elegans, & profuturum meditatus ſis; id à te diſcere gratum erit. Nobiliſſimo *Battierio*, rogo, ut meo nomine gratias agas, quòd tam honorificè noſtri meminit in S. Oratione de vita inſignis Viri *Bernoullii*; ibidem ait ipſummet defunctum conſtituiſſe, quid de ſchedis ſuis fieri vellet. Quale id ſit, fac quæſo, ut ſciam, ſimulque indica ſi placet, an non impetrari poſſint in publicos uſus. Aliquoties cogitavi, poſſe Elementa quædam hujus Analyſis confici, meliora, quàm habentur hactenùs, & in eum ferè modum, quo ad *Carteſii* Geometriam factum eſt; egregia ſpecimina excellentium Virorum adjici; ibi locus foret Analyſibus, quarum fructum ipſe *Bernoullius* p. m. inſeruit Actis, analyſi non rarò ſuppreſſa; aliaque id genus accedere poſſent, de quibus nondum quidquam dedit, veluti de ducenda minima linea in quibuſdam ſuperficiebus, de curvarum gradûs tertii determinatione. Cogita quæſo hac de re, & ſi quid ante abitum perficere potes, tenta, tum ut honori defuncti, tum etiam ut profectui ſcientiæ velificemur. Interea vale, & me ama. *Dabam Hanoveræ* 21. *Maii* 1706.

EPISTOLA X.

VAldè cupio noſſe an vocatio dudum promiſſa tandem ad te pervenerit, aut quo res ſit loco? Nec minùs deſidero ſubinde particeps fieri meditationum tuarum; etſi enim ſim per alia diſtractiſſimus, & toto tempore, quo apud nos legatio Anglica fuerit, vix cogitare potuerim de rebus ad ſtudia pertinentibus, aveo tamen diſcere beneficio amicorum quid geratur, & à te præſertim à quo plurima expecto egregia. Dn. *Bernoullius* mihi adoleſcentem alterius fratris filium in noſtris ſtudiis laudat. Ita hæreditaria hæc familiæ laus erit. Ait etiam a te errorem quemdam *Hiræi*, & examen ad Acta Lipſienſia miſſum; quòd ſi Analyſin tuæ ſolutionis non addidiſti, peto, ut eam mecum communices. Rogavi etiam, ut me paulo diſtinctiùs de poſthumis Dn. *Jacobi Bernoullii* doceres; id ſi vacat iterùm peto. Vellem vel ſervari loco tuto, vel edi quæ id utcumque merentur, uti certè merebuntur pleraque. Quin prodeſſet etiam Analyſes eorum, quæ in Actis, & alibi edidit, conſervari; virorum enim egregiorum ipſas inquiſitiones non interire intereſt. Ex diſſertationibus Academicis, quas typis edidit, vidi nonnullas apud Dn. *Naudaeum* Berolini, ſed

habeo planè nullas. Dn. *Jacobus Bernoullius* p. m. paulo ante obitum ad me ſcripſerat, cœpiſſe ſe indagare lineas tertii gradûs, ſeu quæ proximæ ſunt Conicis, & jam computaſſe ultra 30, adhuc autem ſupereſſe multo plures. Eam inquiſitionem non perire vellem. Quod ſupereſt, Vale, & me ama, & fac ſubinde rerum tuarum fiam certior. *Dabam Hanoveræ 15. Jul.* 1706.

EPISTOLA XI.

MIrè placet tua deductio novæ, & promtioris appropinquationis ex ſerie, quæ arcûs valorem per tangentes exhibet, quam a me primum inventam, credo non ignoras. Nuper Amicus ad me ſcripſit, & dubitavit, an noſtra methodus de maximis, & minimis applicari poſſit
XV. ad puncta regreſſus, quale in *figura* 89. Nam ibi tangens propriè eſt CE,
89. non recta parallela axi. Interim idem ait methodum *Carteſii*, & *Huddenii* in hoc caſu locum habere. Reſpondi methodum *Huddenii* non eſſe niſi caſum particularem methodi noſtræ, cùm ſcilicet non niſi una eſt variabilis, & nulla irrationalis variabilem comprehendens, & eadem demonſtratione niti, qua noſtram. Cæterum Methodum noſtram omninò hic quoque locum habere, nam ſi linea ABCD revera una eſt (non duæ prorſus diverſæ ſe tangentes in C) concipi poteſt tanquam in *figura* 90. ubi
90. ſaccum quendam regreſſu format, ubi manifeſtè locum habet Methodus noſtra in puncto K. Sed ſaccus ille in punctum evaneſcens dat caſum *figuræ* 89. Hæc etſi non vacaverit experiri in exemplis, vera tamen eſſe non dubito. Gratias ago, quòd ſignificas quæ Dn. *Fardella* de me ſcripſit. Spero Dn. *Bernoullium* noſtrum optimè valere, & meas literas accepiſſe. Vereor ne Suecorum in Saxonia irruptio res Lipſienſes omnes, & inter eas Acta Eruditorum turbet. Nuper illic miſi paucula *Davidi Gregorio* reponenda, qui in ſuis Aſtronomiæ Elementis oppugnavit meam motuum cœleſtium explicationem, ſed vi ejus non benè intellecta. Fortaſsè non reſpondiſſem, niſi eadem opera emendandum aliquid in meis ſuccurriſſet; quamquam emendatio non tam ad rem, quàm ad modum enuntiandum pertineat, quem reddo rotundiorem. *Gregorius* contra vortices paratragœdiatur, ſed ego oſtendo talem vorticum motum concipi poſſe, & ex meis conſequi, qui motum ſolidi in liquido ſic moto non turbet, imò qui potiùs ex conſpiratione utriuſque neceſſario oriatur. *Flamſteadius* in eo jam eſt, ut 30. annorum obſervationes edat ſumtu Admiralitatis Anglicanæ. Vellem poſſent etiam edi obſervationes Cl. *Kirchii*, qui Aſtronomus eſt Regiæ Societatis Berolinenſis, quas etiam a 30, & ampliùs annis inſtituit. Vereor ne rerum Europæarum mutatio ingens noceat Academiæ Regiæ Pariſinæ. Nuper hic fuit Dn. *Gundelsheim*, Medicus Regis Boruſſiæ, qui cum *Tournefortio* plantarum causâ in Oriente fuit, omnes Archipelagi inſulas, & totum dextrum Maris Euxini littus luſtravit.

it. Ait obſervationes ipſorum edi debere. Anglus doctus huc attulit legantem librum Domini *Gulielmini* de Salibus, qui valdè probabiliter uetur, ſales non transformari, quod mihi utique *Leuwenhoekii* obſervaionibus rationi conſentaneum viſum eſt, cùm figuræ maneant in ſumma lla exiguitate, quam microſcopia oſtendunt. Illud tamen cum ipſo affirnare non auſim, ad atomos uſque inſecabiles perſiſtere, ac ne a natura uidem tranſmutari poſſe. Vale, & me ama. *Dabam Hanoveræ* 17. *Sepmb.* 1706.

EPISTOLA XII.

NEque mihi ab aliquot menſibus doctiſſimus *Fardella* reſpondit, ut propemodum verear, ne quid ei acciderit adverſi, itaque ejus rei ratia ad Amicum Venetum ſcripſi. Marpurgenſis profeſſionis causâ obiter in tui gratiam) ex celeberrimo *Papino* olim quæſivi, an ea vacaret; eſpondit negando. Credo ſalarium ejus accipere abſentem licet. Itaque e ægrè fiat egregio Viro, ante omnia diſcendum erit, an voluntas ſit ereniſſimo Landgravio, vel ipſi, vel novo Profeſſori ſupplemento proſpiiendi de ſuo. Scis non facilè augeri fundos Academiarum, Principes taten extra ordinem ſuccurrere non raro. Itaque cauto opus erit, rectee ue facies, ſi ſententiam aulæ ante omnia per amicum explores.

Intelligo etiam in Anglia quendam de paralogiſmo admonuiſſe *Gregoium*, cùm Caſſinianas Ovales habere putavit angulos ad unum focum roportionales areis ad alterum focum. Mihi vix ampliùs his exerceri fas ſt. Itaque gratum facies, ſi indices ſedem erroris; putem modum hanc uæ id præſtat curvam; deſcribendi inveniri poſſe: ſed res tanti non eſt, uoniam ſi haberetur, non prodeſſet, neque enim id curat natura in libeis motibus, ut circuli deſcribantur, in quibus anguli ſunt, ut tempora, uod nos ob compendium calculi vellemus.

Neſcio, an tibi aliquando ſignificaverim, quantoperè optarem ab aliuo demonſtrari Regulam ab *Harrioto* olim inventam (unde videtur deſcripſiſſe *Carteſius*) quod ſignorum mutationes in æquationibus non niſi raices reales habentibus ſint tot, quot radices veræ, & ſignorum conſeutiones tot, quot radices falſæ. *Harriotus* eam inductione veram compet, *Carteſius* rationem ejus nullam aſſignavit, nec quiſquam poſt ipſum. non mediocris eſt analyticæ ſcientiæ defectus: Si hæc demonſtrari poſt propoſitio, » æquatione multiplicata per *veram* (*falſam*) *radicem*, unitate augeri numerum mutationum (conſecutionum) in ſignis, qui prius erat; « etiam propoſitum theorema demonſtratum foret.

Dn. *Bernoullium* noſtrum morbo laborare ignorabam, rogo, ut ei a me icem voti reddas, & cùm omnia fauſta, tum in primis proſperam valetudiem meo nomine a Deo apprecere, plurimum enim reipublicæ intereſſe cen-

ſeo;

ſeo, ut nobis conſervetur. Idem tibi precor, Vir clariſſime, ut quàm diutiſſimè publicæ rei proſis, nam & a te præclara quæque nobis polliceor.

Nuper Dn. *Naudæus* mihi retulit commercium, quod tecum colebat, neſcio qua de cauſa ſilentio tuo ceſſaſſe. Mihi ſemper viſum eſt diverſum ſentire duos incolumi amicitia poſſe. Eſt in eo Viro laudabile ſtudium, & veritatis, & pietatis. Plerique ſolemus θέσεις φυλάττειν, quas juvenes accepimus, & hanc veniam petimuſque damuſque viciſſim. Apologiam noſtram contra ea, quæ *Bernardus* nuper ſuos apud Batavos Gallico diario inſeruerat, qualem ego, probante Dn. *Bernoullio* ſummiſeram, jam ut intelligo, illic legitur, nam nondum vidi. Commentarios Academiæ Regiæ Scientiarum Pariſinæ ad annum 1704. pertinentes vidi, ſequentes nondum, ſcilicet rariùs nobis innoteſcit quæ Gallia & Italia præſtant, eaque in parte veſtra melior conditio eſt, eoque magis obſtrictus ero, ſi qua hujuſmodi ſubinde edocebis. Video Dn. *Parent* Academiæ illius ſocium multa ſolere dare in illis Commentariis, quæ ſubinde mihi dubitatione carere non videntur ut *La-Hiriana.* Ejus Elementa mechanica aliquando attentiùs examinare voluerat Dn. *Bernoullius*, an hoc facere vacaverit neſcio. Vale, & nos ama. *Dabam Berolini* 18. *Januar.* 1707.

EPISTOLA XIII.

SCriptum tuum elegans de Stationibus Planetarum Dn. *Naudæus* mecum communicavit; inſeretur Commentariis noſtris, quorum ſpecimen hoc anno prodibit, ut ſpero. Interea non ſine lætitiæ ſenſu literas tuas accepi, quibus rem Patavinam confectam narras: eo nomine & tibi, & Venetis gratulor. Scripſerat ad me Cl. *Fardella* ante ſeptimanas aliquot rem concluſioni vicinam eſſe, atque affectam; nunc confectam gaudeo. Quod in literis tuis de projectionibus Ellipſium ſcribis, id in poſtſcripti modum adjici poterit priori ſchediaſmati tuo. Aliqua fortaſsè noſtris in Actis extantia Cl. *Manfredus* demonſtrabit; an omnia, dubito; interim fatendum eſt inventa demonſtrare plerumque plus laboris requirere, quàm ingenii, præſertim cùm demonſtrationes non peculiari quadam arte commendantur. Doce, quæſo, quis Dn. *Stancarius* Bononia ad te ſcribens. Differentialem calculum ſcis a me non aliter diſtingui à ſummatorio, quàm multiplicationem à diviſione, cùm alter ſit regreſſus alterius. Fatendum ergò eſt calculum, in quo differentialibus, ſeu infiniteſimalibus utimur, adhuc eſſe imperfectum quemadmodum & . . . . . . Eximium Virum Dn. *Bernoullium* noſtrum rogo a me ſalutes. Interea rem ex ſententia gere, & me ama. *Dabam Berolini* 26. *Maii* 1707.

P. S. Has literas ſcripſeram Berolini, ſed diſtractus expedire intermiſeram, nunc reverſus domum inter ſchedia mea repertas abſolvo, tibique negotium Patavinum confectum gratulor. Nam rem in Senatu potentiſſimæ Reipublicæ

Reipublicæ concluſam ex voto, eximius Abbas noſter mihi ſignificavit. Ejus certè indefeſſæ diligentiæ optatus rei exitus debetur. Ego Deum precor, ut tibi eam evocationem fauſtam, & felicem, & in publicum fructuoſam eſſe jubeat. *Dabam Hanoveræ* 16. *Junii* 1707. Ingenioſiſſimi *Bernoullii* noſtri tuſſis me malè habet, & in metum conjicit. Rogo, ut eum officioſiſſimè à me ſalutes, horteriſque ad valetudinis curam. Si tuſſis ab acredine humorum orta eſt, aquoſa, & diluentia opponenda cenſerem. Nullas unquam a Dn. *Iſelio* literas vidi.

EPISTOLA XIV.

Cum proximo curſore vix domum reverſus ad te ſcriberem, nondum tuas binas acceperam, quæ apud amicum interim cum aliis quibuſdam ad me deſtinatis hic latuerant; priores datæ ſunt 19. Martii, poſteriores decimo octavo Maii die. De rebus Marpurgenſibus nihil dico, Patavina confecta, unde ſaltem major fama, & plauſus. Cl. *Fardellam* diu ex gravi morbo decubuiſſe, interim didiceris; & rerum Academicarum curas diſtulerant graviores, quibus potentiſſimæ Reipublicæ Senatus premebatur. Suaſerim, ut non magnoperè formam evocationis cures; ſufficit decretum in Senatu factum, & à Secretario miſſum; ſed dependebit res ab exemplis aliorum in Academiam Patavinam evocatorum; nam ſi aliis miſſæ ſunt literæ evocatoriæ Excellentiſſimorum Reformatorum, nec tibi credo negabuntur.

Gratiſſimum eſt, quòd non nihil conſideraſti Parentianas meditationes, quæ vereor ne ſint plenæ paralogiſmis, id enim ſuſpicor ex illa gloriolam captandi aviditate, quam præfatione Elementorum ſuorum prodit. Itaque, ſi quando tibi attentiùs in hæc Elementa inſpicere vacabit, judicium tuum intelligere gaudebo. Dn. *Lagny* & alii Galli, *Varignonio* excepto, per ambages adhuc quærunt, quæ tibi, nobiſque ſunt explorata. Tua de ſtationibus planetariis meditatio noſtris Miſcellaneis inſeretur, unà cum additione ex literis ad me tuis. Ea res occaſionem mihi dedit curandi, ut te quoque Societas noſtra potiatur.

Operæ pretium eſt *Harrioti* theorema demonſtrari, nam multa inde egregia colligi poterunt. Exempli cauſa ſit quæcunque formula habens meras radices falſas $10x^n + 11x^{n-1} + 12x^{n-2}$ &c. & multiplicetur per $20x - 21$, prodibit

$$\begin{array}{l} 10.\,20x^{n+1} \\ +\,11.\,20x^{n}. \\ -\,10.\,21. \end{array} \quad \begin{array}{l} +\,12.\,20x^{n-1} \\ -\,11.\,21 \end{array} \quad \begin{array}{l} +\,13.\,20x^{n-3} \\ -\,12.\,21 \end{array} \quad \begin{array}{l} +\,14.\,20x^{n-3} \\ -\,13.\,21. \end{array} \quad \begin{array}{l} +\,15.\,20x^{n-4} \\ -\,14.\,21. \end{array} \quad \begin{array}{l} +\,16.\,20x^{n-5}\ \&c. \\ -\,15.\,21. \end{array}$$

Cùm ergò primus terminus producti ſit affirmativus, & ultimus nega-

tivus, & per theorema *Harrioti* non niſi una mutatio ſignorum in producto eſſe poſſit; ſequitur uno ex terminis producti exiſtente affirmativo, & uno ex iiſdem exiſtente, negativo, omnes ſequentes eſſe negativos. Hinc quantitates $\frac{11}{10}\ \frac{12}{11}\ \frac{13}{12}\ \frac{14}{13}\ \frac{15}{14}\ \frac{15}{15}$ &c. eam inter ſe habitudinem habebunt, ut ſi una velut $\frac{14}{13}$ ſit major quàm $\frac{21}{20}$, etiam præcedentes velut $\frac{13}{12}$ ſint majores, vel ſaltem non minores, quàm $\frac{21}{20}$. Ergò $\frac{13}{12}$ non poteſt eſſe minor quàm $\frac{14}{13}$. Et cùm eædem quantitates ſimiliter eam inter ſe habitudinem habeant, ut ſi unus velut $\frac{14}{13}$ ſit minor quàm $\frac{21}{20}$, etiam ſequentes velut $\frac{15}{14}$ ſint minores, vel ſaltem non majores quàm $\frac{21}{20}$. Ergò $\frac{15}{14}$ non poteſt eſſe major quàm $\frac{14}{13}$. Et generaliter fractio prior non poteſt eſſe minor fractione poſteriore, jam ſi radices formulæ $x^n + 11x^n + 1x$ &c. (poſito $10 = 1$) ponatur eſſe $x + a$, $x + b$, $x + c$, $x + d$, &c. patet fore $11 = a + b + c$, &c. & $12 = ab + ac +$ &c., & $13 = abc +$ &c., & $15 = abcd +$ &c. & ita porrò. Unde naſcetur generale theorema: fractionem ortam ex ſumma combinationum diviſa per ſummam combinationum proximè inferiorum, non poſſe eſſe minorem fractione aliâ ſimiliter factâ ex combinationibus altioribus; nempe fractio ex ſumma binionum diviſa per ſummam unionum non poterit eſſe minor quàm fractio ex ſumma ternionum diviſa per ſummam binionum, & ita porrò. Hinc etiam productum ex ſumma unionum in ſummam ternionum non poteſt eſſe majus quadrato ex ſumma binionum, & ita ſimiliter in aliis, Ita elegantia circa combinationes ex *Harrioti* theoremate ſuppoſito derivabuntur. Quòd ſi aliunde talia de combinationibus deriventur, hinc demonſtrari poterit theorema *Harrioti*, ſed non ſine ambitu: præſtaret tamen aliquam ejus demonſtrationem haberi quàm nullam, qua non ſine magno ſcientiæ defectu hactenus caremus. Inſigni Viro Dn. Abbati *Fardellæ*, literis rectâ in Italiam miſſis reſpondi, præſentes an te reperturæ adhuc ſint Baſileæ, non ſatis ſcio. Iter felix, fauſtumque apprecor, nec dubito, quin pro tua prudentia evitaturus ſis, quicquid hominibus invidis, & in te curioſè inſpecturis, occaſionem criminandi dare poſſit circa ea, quæ Italos, Helvetioſque tuos diſſociant. Vale, & me ama. *Dabam Hanoveræ* 24. *Junii* 1707.

P. S. D. *Naudæus* ſuſpectum habet amici tui libellum, quòd in eo diſſimulentur, quæ veſtros à remotioribus quibuſdam diſtinguunt.

EPISTOLA XV.

SCribit ad me eximius D. *Fardella* noſter, negotium tuum eſſe confectum, niſi quòd a te ipſo difficultas mota eſt circa formam invitationis; negat autem unquam factam etiam aliis egregiis viris aliunde vocatis, ut ante adventum Ducale diploma cum publico ſigillo daretur, factum tamen in tui gratiam illud ſingulare, ut exemplum decreti Senatus à Cancellario Ducali ſignatum ad te mitteretur. Quæ cùm ita ſint, ſua-

ſerim

ſerim ut nullam ampliùs moram in te eſſe maturata profectione oſtendas. Equidem dum te ad diſceſſum hortor, commodis ipſe meis obloquor; quo magis enim a nobis removebere, eo minùs potero præclaris tuis meditationibus juvari, & erudiri. Ego tamen publicam, & tuam utilitatem meæ præfero, quanquam ſperem non ideò minùs frui interdum literis tuis, & meditationibus; quas etiam urgebis haud dubiè intentiùs, ubi res in tranquillo collocatas habebis. Si quid interim vel tuum tibi ingenium, vel aliorum commercium lectiove ſuggeſſit, fac quæſo, ut etiam ad me inde aliquid perveniat, & meritiſſimum Dn. *Bernoullium* noſtrum à me ſaluta, quem nuperas meas tecum recepiſſe non dubito.

In tuo ſchediaſmate de ſtationibus Planetarum exprimendo, alicubi notatio mutabitur, ſoleo ego obſervare, ut proportiones exprimam per modum æquationum, & fractionum hoc modo $a : b = l : m$ ſeu $\frac{a}{b} = \frac{l}{m}$ neque alia peculiari notatione opus eſt veluti a. b: : l. m. Non nulla etiam alia hujuſmodi in poſterum obſervabuntur in Miſcellaneis Berolinenſibus uniformitatis causâ. Multiplicationem etiam non ſoleo exprimere crucibus, ſed ſimplici adſcriptione velut $\underline{a+b}, \underline{l+m}$ vel etiam $(a+b)(l+m)$, idque idem eſt mihi quod $a+\overline{b} \times \overline{l+m}$; Commata autem vel parentheſes pro vinculis adhibere ſoleo; parum quidem in his momenti, præſtat tamen commodiſſima eligi, & conſtanter ſervari.

Diu eſt, quòd non intellexi, quid Galli agant in Analytica, aut alioqui in Mathematica. Bello graviſſimo non nihil refrigeſcere has de ſtudiis curas, facilè crediderim, & tamen novam Societatem Regiam Monſpelii conditam intellexi. Quod ſupereſt, iter fauſtum, felixque precor. *Dabam Hanoveræ* 21. *Julii* 1707.

OBSERVATION DES AUTEURS DES MEMOIRES DE L'ACADEMIE DE BERLIN.

» C'Eſt ici que devroit ſe trouver la lettre citée par M. *Kœnig* du 16.
» Octobre 1707. Elle ne s'y trouve point: Elle n'a ni la liaiſon,
» ni le rapport, qu'elle devroit avoir avec celle qui la devoit précéder,
» ni avec celle qui la devoit ſuivre, ni avec aucune des autres de ce re-
» cueil: en un mot, on ne ſauroit faire, pour la maintenir, de ſuppoſi-
» tion qui ne fût pleine de conſéquences. Au milieu d'un long commer-
» ce de Lettres toutes Latines, & toutes Mathématiques, on verroit
» *Leibniz* tout à coup changer de Langue & de Texte, écrire une
» Lettre Françoiſe, pleine de Métaphyſique, à un Allemand, avec lequel
» il n'a jamais parlé de Métaphyſique; lui prédire l'étonnante propriété

» des Polypes ; lui révéler des découvertes, dont il n'a jamais dit un » mot à *Bernoulli*, avec qui il étoit bien dans un autre commerce d'inti» mité & de ſublimité, le Principe de la moindre quantité d'Action, » des merveilles de la Phyſique céleſte, qu'il auroit mieux aimé cacher » à ſon ami & au public que de jouïr de la gloire qu'en a tirée M. *Eu*» *ler*, lorſqu'il les a découvertes quarante ans après, par des routes qui » n'étoient ni frayées ni connues du tems de *Leibniz*. «

EPISTOLA XVI.

VAlde gaudeo res tuas omnes ex ſententia procedere, & doctrinam tuam ſanè inſignem æſtimatores reperiſſe. Ipſe Illuſtriſſimus Abbas *Fardella* & ſibi, & mihi plurimum gratulatur, quòd commendatio noſtra tam benè ceſſit. Ubi defunctus eris curis, & laboribus, quæ ingreſſum novæ profeſſionis comitantur, non dubito quin magis magiſque.

Quam Dn. *Manfredus* tibi miſit conſtructionem æquationis differentialis $a a d y = b q d x + p y d x$, etiam mihi, credo, & Dnn. *Bernoulliis* non ignota fuit, & memini aliquando de ea cum Dn. Marchione *Hoſpitalio* per literas agere. Pluribus etiam diverſis modis ad eam perveni, in meis quibuſdam memorialibus ſchedis rem ſic concepi : proponatur $d y : d x = z + v y$, poſito z & v dari utcunque ex x. Fiat log. $w = \int v d x$ & erit $y = w \int (d x . z : w)$: ſed hæc nunc diligentiùs introſpicere non vacat. Hæc ampliùs extendi magnæ utilitatis foret.

Pervenit ad me ex Anglia nova Algebra ex veteribus *Newtoni* prælectionibus concinnata ; ſunt in ea non tantùm utilia exempla, ſed & præcepta quædam peringenioſa, velut ad inveſtigandos diviſores, & ſi enim praxi non nihil ſunt perplexa, ingenium tamen indicant. Quod ſupereſt, vale, & me ama. *Dabam Hanoveræ* 16. *Decemb.* 1707.

EPISTOLA XVII.

NUperrimè per brevitatem temporis reſpondere non licuit. Nunc gratias ago, quòd communicaſti, quæ tibi cum R. P. *Horatio Burgando* Acta, cujus non inelegans meditatio a te perfici meruit.

Utile erit, ſi *Newtoni* regulam diviſorum examines. Reperi inter veteres meas ſchedas aliam rationem, quæ ad praxin videtur commodior. Æquatione præparata (ſublatis ſcilicet ex æquatione irrationalibus, & fractionibus) conſtat, ſi radicem rationalem habeat, velut $x + r$, fore r unum ex diviſoribus ultimi termini æquationis datæ. Et apud *Schotenium* jam habetur, ut ex pluribus diviſoribus ultimi termini eligas qui ſuccedere poſſit, poſſe augeri, vel minui radicem pro x (verb. gr.) ponendo $x = y - n$, ſi jam ... æquatio fuiſſet $10 + 11 x + 12 x x + 13 x^3 + 14 x^4 + x^5$,

$+ x^5$, ſi placeret fieret ultimus novæ $10 + 11\, n + 12\, n\, n + 13\, n^3 + 14\, n^4 + n^{15}$, cujus diviſorum is, qui ſuccedere debet. Sit (r) porrò radix novæ æquationis, erit $y - n + r$, ergò $(r) = - n + r$ ſeu $r - (r) = n$. Itaque ſeligendi ſunt ex diviſoribus illi r & (r), quorum differentia numerus aſſumtus n; qui cùm variari poſſit, facilè determinabuntur diviſores ſuccedentes. Atque hæc quidem jam habentur. Sed mihi occaſionem dedere longiùs procedendi. Eſto formula æquationem dividens ſecundi gradûs, velut $x\,x + q\,x + r$, patet rursùs r fore unum ex diviſoribus ultimi termini æquationis datæ. Faciendo ergò $= a\, x = y - n$, debet rurſus (r) eſſe unus ex diviſoribus ultimi termini novi $+ 10 - n\, n + 12\, n\, n - 13\, n^3 + 14\, n^4 - n^5$, ſed eundem valorem ſubſtituendo in diviſore formulam dividente, formulam dividens novam æquationem fiet.

$$y\,y - 2\,n\,y + n\,n + q\,y - q\,n + r \quad \text{ergò} \quad n\,n - q\,n + r = (r)$$
$$\text{ſeu} \quad (r) - r,: n = n - q$$

Unde patet (r) & r, qui ſuccedere poſſint eos eſſe, quorum differentia, vel ſumma diviſibilis per n, & proinde cum n, pro arbitrio variari poſſit, facilè diſcerni, & hoc cujuſcunque gradûs ſit formula dividens. Hinc verò invento r & (r) ſuccedentibus facilè habebitur q, nam erit $q = n - ((r) - r,: n)$. Eodem modo ſi diviſor ſit $x^3 + p\,x\,x + r$, facilè habebitur r, q, p, ſi poſſibiles ſunt: nam r & (r) ſeligentur ita ut $(r) - r$ ſit diviſibilis per n, ſed q, p, habebuntur ex æquatione $n^3 - p\,n\,n + q\,n - r = (r)$, quia n variantibus utcunque manent p & q, & ita tot ſemper haberi poſſunt æquationes, quot quæſitæ. Quòd ſi inventis valoribus, res non ſuccedit, impoſſibilis erit talis diviſor rationalis; plerumque autem impoſſibilitas ex ſolis r & (r), variando (r) cum n, detegetur. Interim Newtoniana quoque methodus evolvi merebitur. Elementa Geometriæ multas ob cauſas aliter adhuc quàm in *Euclide* extant, demonſtrari mererentur. Quod ſupereſt, vale, & me ama. *Dabam Hanoveræ* 11. *Maii* 1708.

EPISTOLA XVIII.

SOlutio tua Newtoniani problematis (problema enim meritò appelles methodum, cujus demonſtratio non apponitur) optima eſt, & in ſubſtantia non differt à Bernoulliana. Scribit mihi Dn. *Joh. Bernoullius* ſe quoque dediſſe, & tibi communicaſſe ſolutionem problematis de ſtatione Planetarum; deſideratque ut a te petam, quia ipſe exemplar non ſervaverit. Quod ad æquationem, vel formularum diviſiones attinet, proſecutus non nihil ſum Methodum à Newtoniana diverſam, quæ adhibet diviſiones diviſorum ultimi termini per numerum loco x ſuppoſitum veluti h. Et reperio, ſi æquatio data transformetur in aliam, cujus omnes radices ſint falſæ, uno quaſi tenore per reſiduos continuatæ cujuſdam diviſiones, omnes exhiberi coefficientes formulæ dividentis, ſi qua talis datur. Sed

hæc methodus ſupponit numerorum diviſores haberi, etiam paullo majorum. Hoc ſuppoſito res omnis ad magnam facilitatem reducta eſt, dicique poteſt, ſaltem problema algebraicum tranſmutatum eſſe in arithmeticum. Methodum ejus computationem ex ſcheda adjecta videbis, de qua judicium tuum mihi gratum erit.

Suſpicor Amici Veneti machinam multiplicandi, & dividendi non multùm differre à *Morlandiana*, & *Grilletiana*, quas in Anglia, & Gallia vidi olim, ubi multiplicationes nihil aliud ſunt, quàm rhabdologia, additiones autem, quas rhabdologia præſcribit fiunt in adjecta machina *Paſcaliana*, ita ut totum ſit combinatio inventi *Neperiani* & *Paſcaliani*, ſed mea toto cœlo diverſa eſt, nihilque rhabdologiæ ſimile ſupponit. Quod ſupereſt, vale, & fave. *Dabam Hanoveræ 6. Sept.* 1708.

EPISTOLA XIX.

GAudeo diplomata rectè eſſe reddita. Diuturna mea domo abſentia fecit, ut literæ mihi tardiùs redderentur, atque ita nec in tempore reſpondere poſſem. Autumni partem in thermis, hyemis partem Berolini egi, & ſatis nunc divino munere valeo, domumque confirmata valetudine reverſus ſum; tibique autem plurimum debeo, quòd de ea ſollicitus fuiſti. Id inter alia Berolini egi, ut quædam ex ſcripturis ad ſocietatem miſſis ſelecta miſcellanea prodirent, quod hoc anno futurum ſpero. Inſerentur & tua de Planetarum ſtationibus, omiſſis tamen projectionibus. Nondum intellexi judicium tuum de mea methodo inveniendi diviſores æquationes, vel formularum. Certum eſt rem hoc modo ſatis commodè reduci ad diviſores numerorum inveniendos. Et tamen excogitavi adhuc aliquid, cujus ope ſpero etiam hac neceſſitate methodum pro maxima parte liberari poſſe. Sed multa alia habeo multo majoris momenti, ſi abſolvere vacaret. Deeſt in his oris amicus aliquis, cum quo de talibus colloqui, atque agere poſſim. Ita nemo eſt, qui ad hæc excitet, multa quæ inde diſtrahant, nullus eſt longè lateque *Hermannus*. Cùm vobis diplomata miſi, feci quod officii mei eſſe putavi, & ad promovendum ſcopum Societatis Scientiarum facere credidi. *Parentius* ille, in cujus inquiſitiones animadvertiſti, audaculum ſe paſſim oſtendit in aliis refutandis, & ambitioſulum in inventis ſibi aſcribendis, quæ dudum proſtant, tanquam ea ſuo marte obtinuiſſet: inquiſitiones illas (*Recherches*) nondum vidi, ſed amici de ea ad me perſcripſere. Ajunt, & mea eum vellicare, ſed hoc parum curo.

Quod vim centrifugam attinet, rogo, ut inſpicias, quæ Octobri Actorum anni 1706. inſerui p. 446. ſeqq. ut meas ipſe locutiones emendarem, compareſque cum iis, quæ *Hugenius* & *Parentius* habent, & deinde ſententiam tuam ad me perſcribas. Ego non in re lapſus eram, ſed tantùm

tantùm in locutione; quid *Hugenio*, aut *Parentio* contigerit, re conſiderata, & cum meis collata deprehendes. Dici aliquomodo poteſt vim centrifugam locum habere etiam, cùm circularis motus non conſideratur. Pro centro enim punctum quodcunque aſſumi poteſt, & concipi quantum continuato mobilis motu per tangentem curvæ ab illo centro recedatur, & quantum mobile retrahendum ſit ad curvam, in quo vis centrifuga conſiſtit. Quod ſupereſt, vale, & fave. *Dabam Hanoveræ* 21. *Martii* 1709.

EPISTOLA XX.

NOn dubito quin literas meas ante complures ſeptimanas acceperis, quibus, & tuis reſpondebam, & circa vim centrifugam, de qua *Parentius* aliquid contra *Hugenium* movit, aliqua annotabam, rogans ut inſpiceres quæ Octobri Actorum Lipſienſium anni 1706. inſerui p. 446. ſqq.; & mihi judicium tuum haud gravatim perſcriberes. Id ergò etiamnum à favore tuo expecto, ſcriboque vel ideo ſaltem, ut an priora mea ad te pervenerint, diſcam, non dubito etiam quin expenderis modum meum, quo inventio diviſoris rationalis æquationis reducitur ad diviſores numerorum, ita ut hac facilè data nihil futurum ſit facilius, quàm ſine multa tentatione invenire diviſorem æquationis. Verum enim verò, quia inventio ipſa diviſorum numeri dati problema eſt nondum commodè ſolutum, ideo iiſdem, quæ feci, fundamentum inſiſtens viam video diviſores æquationum commodè inveniendi, non ſuppoſitis numerorum diviſoribus; ſed ad hoc exequendum adhuc otiolo opus foret. Puto impreſſionem Miſcellaneorum Berolinenſium jam cœptam eſſe, & ſpero hoc anno tempeſtivè abſolutum iri. Quod ſupereſt, vale, & me ama. *Dabam Hanoveræ* 16 *Maii* 1709.

EPISTOLA XXI.

DN. *Bernoullium* juvenem reducem in Batavos ſpero ad Illuſt. *Ruzzinum* adiiſſe. Gaudeo mea principia dynamica tibi non diſplicuiſſe: quem dedicationis honorem mihi deſtinas, magis muneri meo, quàm merito tribuo. Rogo, ut tibi vocaverit; Hypotheſis de gravitate aëris partem non elaſticam admiſtam habentis meminiſſe velis. Semen bombycum nuper æſtate nimis provecta venit meâ culpâ, qui non maturiùs petieram; unde in itinere periit. Itaque auſim tantumdem hac vice petere, ſed ea lege, ut utriuſque pretium indices. Gratiſſimum erit ſchema tui operis. Dno. *Bourgueto* incluſas mitti peto. Nunc id agitur, ut meæ Theodicææ Tentamina Latinè, Germaniceque edantur, fortaſsè & Anglicè. Credo, qui Italicè tentaret, omiſſis ponendis vel in margine refarcitis,

quæ

quæ illic non probantur, Cenſores adverſos non eſſe habiturus. Quod ſupereſt, vale, & fave.

P. S. Gaudeo etiam Illuſtr. Abbatem *Contium* in methodos noſtras penetraſſe, nec philoſophemata mea ſpernere.

EPISTOLA XXII.

NOviſſimas meas cum incluſis ad Dn. *Bourguetum* acceperis, interea accepi ipſe, quas 22. Decemb. anni ſuperioris doctas & ingenioſas dediſti, quibus nunc reſpondeo.

Et primùm obſervo mihi ſollicitationes, & ipſa celeritatis incrementa momentanea eſſe idem. Ita non celeritates elementares, ſed ſpatia infinities infinitè parva celeritate elementari percurſa erunt in ratione compoſita celeritatum elementarium (ſeu ſollicitationum) & elementorum temporis.

Quæ de cauſa agente, actioniſque extenſione dicis, mihi non ſatis liquida videntur. In cauſa agente, ni fallor, ſpectanda eſt potentia; itaque non video quid ſit illud in cauſa agente, quod cum ſpatio conjungis, ut habeas potentiam; nec cur quæras aliquid extra cauſam agentem, ad formandam potentiam. Opus eſt, diſtinctâ quadam notione, & expoſitione erui notum effectum (nempe non violentum, à ſimplicioribus enim inchoandum eſt), quem ita accipio, ut ſeparem à celeritate, qua præſtatur, quanquam nemini vetare poſſim, ne vocabulum aliter accipiatur, pro eo, quo ego ipſam actionem æſtimo; cùm ſcilicet id, quod præſtatur, conjungitur cum celeritate præſtandi. Itaque intellectâ mente mea nullam video rationem hærendi in eo, quod dixi eſſe a, & ev, id eſt ut compoſitum ex eo quod præſtatur, & celeritate qua præſtatur. Et ſi admittis, ut facis, eſſe e ut cl. id eſt effectus eſſe in ratione compoſita, tam corporum, quæ promoventur, quàm longitudinum, per quas promoventur; jam eo ipſo admittis acceptionem effectûs meam, quæ præſcinditur a celeritate. Nam manifeſtum eſt cl. poſſe conjungi cum majore, minoreve velocitate, & ita prodire clv vel ev, quod ego tum attribuo toti actioni.

Atque ita ex ipſo e ut cl, quod agnoſcis actiones effectibus proportionales, tres meæ compoſitiones rationum e ut cl, a ut ev, a ut pt, nihil aliud ſunt quàm definitiones; nempe eſſe, ut cl, eſt apud me definitio effectûs; & eſſe ut ev, eſt apud me definitio actionis; & eſſe ut a: t eſt apud me definitio potentiæ, ſeu a eſſe ut pt: nempe potentiam definio ex ſuo utique exercitio agnoſcendam, per id, quod exercendo ducitur in tempus, & ita producit actionem. Intelligo autem actionem, qua potentia agit quantum poteſt. Hæc ubi ſatis meditatus fueris, fortaſſe reperies, non commodiùs has notiones diſtingui, ac digeri poſſe, nec rationes

tiones inveniri magis determinatas. Non admitto cauſam agentem, quæ mobili m, tempore d t dat celeritatem d c, eſſe ut m d c : d t; nec video quomodo hoc poſſit probari, niſi aſſumas, ut definitionem; ſed tunc non capio, nec video, quomodo ex hac notione cum ſpatio conjuncta formes potentiam, & cur non alius pari jure diceret cauſam agentem a ut m d c : d t, vel aliud quiddam Agens hìc. Deinde in ſimpliciſſimis Elementis, ut hìc, non quæritur, quid cauſa agens in alio producat, ſed quid in ſe ipſa nempe cauſa. Hic ipſe ſtatus mobilis ſeu potentia determinatur, ſi ejus magnitudinem, & celeritatem attendas, nec de productione celeritatis, ſed productis ope celeritatis agitur.

Quòd ſi ad magis compoſita progredi, definitionemque hanc illis applicare velis, reperies nec tunc rem procedere, ſed potentiam ſæpe determinari ex ſolo m c, nec referre quantum ſit tempus d t. Exempli causâ corpus grave deſcendens ex aliqua altitudine producit aliquam celeritatem, nec refert quo tempore deſcendat: Tempus enim variabit, prout planum deſcensûs erit plus vel minus inclinatum. In his ergò eundum eſt per gradus, incipiendo a ſimpliciſſimis, & multa cum circumſpectione incedendum; alioquin quidvis ex quovis faciemus. In ſimpliciſſimis, velut hypotheſi motûs æquabilis, & corporis non gravis, vel gravis in horizonte moti, fruſtra adhiberentur quantitates elementares.

Actionis etiam extenſio per ſpatium non eſt commoda, nec capienda ſatis, niſi reddas momentaneam, alio quàm ego ſenſu. Actio mihi jam in ſe involvit ſpatium, ſeu longitudinem, actioque adeo non cenſenda eſt extendi. Extenſio enim alicujus rei intelligitur, cùm additur aliquid novum, per quod res extendi, replicarique cenſetur. At potentia mihi per tempus extenditur, quia ipſa per ſe meo ſenſu tempus non involvit, ſed eſt momentaneum quiddam, quod quovis momento replicatur, ſeu ducitur in tempus. Et ita prodit actio data: ſic tu cùm de actionis extenſione loqueris, alio eam ſenſu accipere videris. Tuæ definitiones planè abludunt a meis, & ita variavimus in terminis. Tu ſumis effectum extenſiùs quàm ego, ut æquetur meæ actioni: Actionem autem ſumis reſtrictiùs quàm ego, ut æquetur meæ potentiæ: ita fruſtra æquationem inſtitueremus.

Dn. *Bernoullius* junior, cùm reverſus eſſet ex Anglia, Illuſtr. *Ruzzinum* Ultrajecti adiit, qui poſtea Plenipotentiario Electorali Brunswicenſi, cui commendaveram, dixit:

Ce M. Bernoulli me paroit bien jeune pour être Profeſſeur, *& de plus la profeſſion n'eſt pas encore vacante.*

Vereor ne prius noceat; poſterius non nocebit: itaque tibi ſignificare maturè volui, ut obviam eat huic difficultati. Puto enim, ſi adſit doctrina, & prudentia, vigorem ætatis potiùs commendationis loco haberi poſſe, & ſpero Juveni prudentiam non defore; nec ſemper de hominum prudentia, & moribus ex primo aſpectu, brevique congreſſu judica-

ri poteſt. Credo te ipſum, cùm Patavium veniſti, non multò ætate majorem fuiſſe. Dn. Profeſſori *Bernoullio* rem maturè ſignificari e re erit. Ego interim Illuſtr. Plenipotentiario Brunſwicenſi ſcribam, ſcientiam non eſſe annis æſtimandam, videboque an aliquid Illuſtr. *Ruzzino* inſinuari poſſit quod in rem ſit.

Ignoſce, quæſo, quòd Litteræ iſtæ tam malè ſcriptæ ſunt, multa allevi inter relegendum, quo meliùs explicarem mentem meam, nec ob brevitatem temporis deſcribere vacavit.

De ſeminibus Bombycum, quantum nuper, iterum petere audeo. Vidiſtine P. *Sachièry* Jeſuitæ apud Papienſes Neoſtaticam, ex ſuppoſito concurſu linearum directionis in centro terræ, & quid de illa tibi videtur? Ajunt hominem eſſe magni ingenii, & ſunt fortaſſe Patavii, qui eum norint. Vale, & fave.

OBSERVATION DES AUTEURS DES MEMOIRES DE L'ACADEMIE DE BERLIN.

» ON *voit par cette lettre, que* Leibniz *parle ici pour la première fois*
» à Herman *de ſa théorie ſur la force, l'effet, & l'action: qu'en* 1713.
» *il lui enſeigne les définitions, & les premiers élémens* d'une Doctrine,
» dont, ſelon le fragment cité par M. *Koenig*, il lui auroit en 1707.
» expliqué les profondeurs.

EPISTOLA XXIII.

NOn dubito quin literas meas acceperis non unas, priores cum additis ad D. *Bourguetum*, alias, quibus annotavi non nihil ad dynamica a te communicata. Avidè tuas expectavi, tum ut ſcirem quando iter ingreſſurus eſſes, tum quo eſſet loco quæſtio de ſucceſſore. Significaveram Ill. *Ruzzino* D. *Nic. Bernoullium* admodum juvenem viſum. Abiit ille in Galliam. Mallem priùs ſe *Ruzzino* per amicos talium judices probaſſet, & rei hydragogicæ practicæ in Batavis operam dediſſet. Spero tamen nihilominùs ei favitum iri, nam de ſe ſpem nobis non mediocrem excitavit. Si favere potes miſſu ſeminis bombycum, quantum anno præcedente fuit, res maturanda eſſet ob appetentes calores, ne pereat, ut ſuperiore anno meâ ſeriùs petentis culpâ acciderat. Poſſet recta per curſorem publicum Hanoveram deſtinari. Ego, ut par eſt, ſatisfaciam. Quamprimum hinc diſcedere paro, neque ampliùs a te hìc literas ſpero. Vale. *Dabam Viennæ* 24. *Martii* 1713.

EPISTOLA XXIV.

MIrabar quòd tam diu nihil a te intelligerem, & ſuſpicor adhuc etiam ex Litteris Dn. *Joh. Bernoulli*, & Dn. *Bourguetti*, aliquam ex tuis inter-

intercidiſſe. Nam *Bourguettus* reſponſum aliquod ſuum tibi credidiſſe ſignificat. Ego tamen non niſi unum de Theodicea mea per te accepi.

Ex quo indicium de Dn. *Venero* feciſti, ſtatim ex ſententia tua Hanoveram ſcripſi.

Facilè agnoſco, iter, & rerum domeſticarum conſtitutionem, mutationemque loci tibi meditationes Mathematicas aliquamdiu non permiſiſſe; ſpero tamen rebus in tranquillo jam locatis rediturum te ad præclaras illas curas. Et omnino doctrina de æſtimanda altitudine locorum ex differentiis Barometri perfici meretur, adhibita etiam, ſi placet, hypotheſi mea.

Scripſi Berolinum, hortatuſque ſum, ut cogitent de novo Miſcellaneorum Tomo, in quem & ipſe nonnulla conferam; nec dubito, quin plurimum à te juvari hoc inſtitutum poſſit.

Noſſe velim, quis ille ſit Monachus Benedictinus tibi olim competitor. Cùm neminem habeam Venetiis, nec ſatis ſciam an Litteræ meæ ad Dn. Abbatem *Fardellam* rectè perferantur, obſtringeres me non parum, ſi quem indicares, cui commendari poſſent.

Commercium Epiſtolicum Londini editum nondum vidi, remotus nunc a locis, ubi haberi poteſt. Itaque nec dum ſatis plenè reſpondere poſſum. Quod ſupereſt reciprocè tibi fauſta & felicia omnia in hunc & ſequentes annos precor. Vale. *Dabam Viennæ*, 10. *Januar.* 1714.

EPISTOLA XXV.

SPero ſilentio meo diuturniori veniam a te datum iri, lectis quæ ad Egregium Virum *Petrum Antonium Michelottum* ſcribo, cui velim magis ſatisfacere poſſe. Sed quod ille a me petit, credo a te meliùs habebit, nam te video etiam Pitcarniana expendiſſe, & in matheſi ad phyſicam applicanda egregiè verſatum. Agnovi dudum præclara a te expectanda eſſe, ſed vicit expectationem meam liber tuus phoronomicus, quem ad me miſiſti, externa ſpecie elegantiſſimum, ſed doctrina interiore multo adhuc elegantiorem. Itaque plurimas tibi gratias debeo, etiam quòd nomen meum initio comparere voluiſti; quanquam, & intus aliquando honorificè mei memineris.

Non potui mihi temperare, quin percurrerem opus tuum, quanquam ſumma cum feſtinatione & ut librum Hiſtoriarum vel Romaniſcum legere ſolemus. Demonſtrationes enim præſertim paulo longiores expendere nunc non licuit, quanquam nec opus putem. Elegantes ſunt verſus præfixi: ſed quod dicunt,

Newtonus hoſpes divitis Inſulæ
Hac primus ivit,

neſcio an ſine injuria tot aliorum dici poſſit.

Vim mortuam tecum dici ſollicitationem §. 9. percommodum mihi viſum

ſum eſt, ſi ſcilicet ab aliena impreſſione oriatur; generaliter erit conatus; quem impetui, ſeu vi vivæ oppono.

Inertia materiæ, de qua loqueris §. 11. res eſt planè mira, & altiſſimæ indaginis, & paucis adhuc intellecta. Mira ex ea conſequuntur. Si in materia nihil aliud conſideretur quàm extenſio, & antitypia, nulla eſt ratio, cur loco moventi reſiſtat, ſeu in quiete perſtare tendat, adeoque lucta ſit inter agens & patiens, cum in eo ſtatu ſit indifferens, & minimus motus quieti prævaleat; ſed ſi ſit in motu, utique ratio eſt, cur in eo perſtare tendat.

Neſcio an argumentum probet §. 28. gravitatem agere in partes corporis interiores, *omnes.* Nam ſi partes a gravitate non affectæ æquabiliter per maſſam diſtributæ ponerentur, tamen ſitu mutato, eadem maneret gravitas.

Theorema meum, de quo §. 49. non tantum eſt in epiſtola ad *Walliſium*, ſed & in Diario Pariſino 7. Septemb. 1693. ubi & addita eſt demonſtratio: citavi & in Theodicæa, part. 1. §. 22. Locum autem habet non tantùm in ſollicitationum, ſed & in ipſorum motuum compoſitione, ſeu generaliter in compoſitione tendentiarum mortuarum, vel vivarum.

Bene notaſti §. 97. Lemma illud differentiarum eſſe fundamentum quadraturarum, ſed (quod addi velim) earum, quæ oriuntur ex calculo noſtro infiniteſimali, vel ſimili. Sunt tamen quadraturæ, quæ aliunde oriuntur, v. g. quadratura Lunulæ. Per hoc ipſum theorema ego meas methodos cœpi, & adeo calculum meum dixi *differentialem.* Ideo qui *fluxionem* dicunt, veram originem obſcurant, nec ſatis attendunt.

Cum §. 115. notas ſollicitationes centrales a *Newtono* centripetas appellari, poteras addere ſollicitationibus centralibus etiam centrifugas comprehendi poſſe; & ob id ipſum ego centrales nominaveram, ut ambæ eodem nomine comprehenderentur.

Et ſi in arbitrio Mathematici quodam modo ſit, quæ nomina rebus imponantur, dummodo ſignificatione conſtanter utatur; eſt tamen utile, ut Analogia quædam ſervetur in ὀνοματοθεσία. Itaque cùm momentum ſollicitationis componas ex facto per ſollicitationem in ſpatii elementum, quod tempuſculo percurrit, videbatur convenire, ut momentum celeritatis ſimiliter eſſet factum ex celeritate in ſpatii elementum; ſed video te §. 125. vocare momentum celeritatis, quod fit ex ipſa in proprium ſuum elementum ducta.

Quod ais §. 219. poſſe a te apodicticè demonſtrari, vires eſſe æſtimandas ſecundùm altitudines aſcenſionum, id quale ſit libenter diſcam.

Ego non tantùm aſcenſiones, ſed & quodvis reſiſtens vim abſorbens adhibere ſoleo; verb. gr. loco aſcenſionis certæ gravium quantitatis ad quandam altitudinem, potes adhibere tenſionem Elaſtri ad datum gradum, vel etiam concitationem dati numeri globulorum in datam celeritatem in ſingulis æqualem; quæ omnia poſſunt effici pari modo ante concurſum, &

& poſt concurſum. Ut jam taceam meam rationem vires explicandi à priori ex ipſa earum definitione, quam tecum communicavi.

Probè etiam notaſti §. 218. Corpora penitùs inertia fortè nulla dari, poterat dici *ſenza forze* corpora non niſi in ſpeciem inertia eſſe, & ſic appellari à te ea, quæ vim intus abſorbent. Putas nullum ab hac doctrina præſtantiorum hujus ævi Geometrarum abhorrere videri. Sed videbis abhorrere *Newtonum*, qui quod naturam virium non perfectè percepiſſet, non ita pridem ſtatuit vires in mundo paulatim decreſcere, & divina vi (reverâ miraculo) reparari.

Quod modum notandi attinet, interdum utiliùs ad intelligentiam adhiberi putem comma, quod omiſiſti v. g. §. 229. Cùm ſcribis (2 m u — n u + 2 n r.) : m + n, ego ad evitandum ne quis accipiat tanquam (2 m u — n u + 2 n r) : m, + n ita ſcriberem (2 m u — n u + 2 n r) :, m, + n vel (2 m u — n u + 2 n r) : (m + n) vel 2 m u — n u + 2 n r, : (m + n); vel quod eſt ſimpliciſſimum 2 m u — n u + 2 n r, :, m + n; ſi verò ſenſus fuiſſet (2 m u — n u + 2 n r) : m + n; ſcripſiſſem (2 m u — n u + 2 n r, : m) + n. Interim fateor in præſente caſu non facilè erraturum rei intelligentem.

Ad §. 238. obſervo, quod frumenti pollen non facit, præſtare alabaſtri pulverem, qui ſuper igne corpus fluidum prorſus imitatur, & continuitatem quandam acquiſiſſe videtur bullis etiam formatis.

Ad §. 241. noto, aërem ſi ponatur non ire in infinitum, & ſervare gravitatem, utique ſupremam ſuperficiem horizontalem habiturum, ut alia, quæ liquida vocas.

Ad §. 287. Vereor, ut *Boylius* Antliam Gerikianam perfectiorem reddiderit.

Qui fit quòd §. 347. 348. & ſqq. non meminiſti obſervationum Scheuchzerianarum circa altitudinem montium. Sanè comparando altitudines aliunde obſervatas, cum ductis ex Barometro, dijudicari poterit, quo uſque liceat uti hypotheſi denſitatum preſſionibus proportionalium, & utrum ſatisfiat phænomenis adjungendo meam, per quam hypotheſis prior reſtringatur ad partem aëris comprimibilem. Sanè ſi hæc adjunctio ſatisfaceret, hypotheſis prior ſimul confirmaretur. Libri tui ſecundi capite 10. de fluminibus agis, quæ materia cùm magnæ ſit utilitatis, mereretur tractari ampliùs. Rogo ut aliquando examines controverſiam inter *Gulielminum* & *Papinum*, cujus partes habentur in Actis Eruditorum. Noviſſimum ſcriptum *Papini* habetur in ejus libro in 8° edito, noviſſimum *Gulielmini* in Miſcellaneis Berolinenſibus.

Ad §. 651. noto me ſententiam meam de cauſa ſoni explicuiſſe in Epiſtola ad Dn. *Schelhammerum*, quam ille libro ſuo de organo auditus adjecit. Ex ea res jam ad calculum revocari poterat.

Quæcunque hactenus notavi, minutiæ videri poſſent, unum nunc adjiciam, de quo ut te moneam, magis neceſſarium videtur. Ais initio cap.

20. Libri 2. *ab omnibus, qui de viribus centralibus ſcripſere, Geometris, harum virium centralium, vel ut nos eas vocare ſolemus, ſollicitationum gravitatis centralium meta vel centrum poſitione datum, & immutabile conſiderari conſuevit... Nos verò rem generaliſſimè pertractaturi ſollicitationum illarum centrum in una eademque curva mutabile aſſumemus, ita quidem, ut mobile in ſingulis curvæ percurrendæ punctis ad aliud atque aliud centrum ſollicitationum urgeatur.* Ego cùm non ſatis edita ab aliis in hoc genere expendere potuerim, tibi meliùs in iis verſato facilè credo; quanquam mirarer *Newtonum* hoc non attigiſſe, qui omnino debebat in explicando Lunæ motu adhibere centrum ſollicitationis mobile, nempe tellurem. Sed quod ſubjicis, quantum judicare poſſum, haud videtur ſatisfacere. *Hoc modo*, inquis, *centra omnia erunt in quadam linea curva, quam ſollicitationum gravitatis directiones contingunt.* Sed ſi quid judicio, hic eſt caſus tantùm ſpecialis centri mobilis, eſto enim centrum C, mobile M, & ponatur C ex 1 C tranſire in 2 C; dum mobile ex impetu prioribus in ſollicitationibus concepto tranſit ex 1 M in 2 M, utique directiones 1 C 1 M, 2 C 2 M, non eſt neceſſe concurrere in puncto 2 C, vel alio ei indefinitè propinquo, quemadmodam tua aſſumtio poſtulat, ſed poſſunt tales aſſumi motus, ut concurrant directiones ad diſtantiam quantumvis a C. Itaque ad rem generaliter tractandum majore molimine opus erit. Quod ſi hoc meum monitum non inutile judicas, fortaſſe ipſe idem non malè notabis in Actis Eruditorum vel alibi, ut aliorum animadverſiones prævenias. Fortaſſe enim Angli, (utcunque illis fortè nimium faveris) quærent quod reprehendant, ne quid de *Parentio* in Gallia, Antagoniſta tuo in Italia, aut ſimilibus aliis dicam.

De cætero ut præclaris tuis ſucceſſibus mirificè applaudo, ita nihil mihi erit gratius quàm ſubinde tuo favore intelligere, tum quid ipſe agas, tum quid alii in noſtris ſtudiis moliantur. Et majorem oſtendes benevolentiam, ſi non ſemper expectes, dum reſponſio a me adeo diſtracto redeat. Dn. Abbati *de Sto. Petro* autori Conſilii de pace publica ſtabilienda *Villarſi* Ducis cognato, qui librum ſuum per Dn. *Varignonium* miſerat, reſpondi dudum, & ab ipſo replicationem ſum nactus, tibi ob librum ad me curatum gratias, ut par eſt, ago. Vale, & fave. *Dabam Hanoveræ 17. Septembr.* 1715.

EPISTOLA XXVI.

Tertias a me literas miraberis præſertim poſt primarum moram, ſed ſecundas ſcripſi in mei gratiam opem a te petens in diſquiſitiunculâ quâdam: Hanc ſcribo in gratiam amicorum, id eſt *Bernoulliorum* noſtrorum. Adiit nunc Venetias Ill. Comes *Schulemburgius*, amicus meus a multis annis, & patronus ſingularis quem Sereniſſima Reſpublica copiis ſuis terreſtribus præficere cogitat. Is cùm ſit Vir magnæ autoritatis & prudentiæ,

dentiæ, credidi ſermonibus obiter apud Nobiles Venetos in auctoritate poſitos, & negotium Bernoullianum tractantes ab eo jactis plurimum momenti ad rem conficiendam afferri poſſe. Itaque in eundem ſenſum Dn. *Michelotto* ſcribo quas incluſas vides literas, aliaſque ad Comitem *Schulemburgium* includo, ſcilicet ipſe Dn. *Michelottus*, ſi poteſt commodè reddat, & colloquio habito, conſilium cum eo capiat. Scripſiſſem rectâ ad Dn. *Michelottum*, nec tibi negotium faceſſiviſſem, ſi certa ad eum ſcribendi ratio in promtu fuiſſet, neque enim ſatis ſcio, Venetiis an Patavii degat, ſed ſpero te pro humanitate tua, & cum *Bernoulliis* amicitia, haud ægrè hoc ipſis officium eſſe præſtaturum. Unum adjicio; in nupera Epiſtola curvam quæſivi, poſito tangentem interceptam inter latera anguli recti eſſe rectam conſtantem, ita curva determinata eſt, putem tamen haud magno negotio problema ſolvi poſſe generale, poſito Tangentem TΘ inter latera anguli interceptam datam eſſe per relationem ad ipſam AT, — vel datam eſſe relationem inter AT, & AΘ, itaque rogo, ut problema tam generaliter conceptum ſolvere malis, cujus caſus erit curva prior. T. XXV. Fig. 91. Quod ſupereſt, vale, & fave. *Dabam Hanoveræ* 14. *Novemb.* 1715.

EPISTOLA XXVII.

MUltas ago gratias, quòd me labore ſolvendi problematis Geometrici tuâ operâ ſublevaſti. Agnoſco non eſſe ex valdè difficilibus, & ſanè ſi prolixo labore indigere credidiſſem, non fuiſſem auſus eum in te transferre. Mihi verò nunc quod alias, aut aliis facile pro difficili eſt. Interea video te non ſtudiosè tantùm, ſed & ingeniosè in ea re verſatum, data conſtructione generali elegante. Ita plus dediſti, quàm petebam; ego enim calculo contentus fuiſſem exhibente relationem generalem, ita ut AY haberetur generaliter ex AΘ & ΘT, & ſimiliter YV ex AΘ & ΘT: idque ſi vacat adhuc a te petere auſim. Ita enim ſi deinde in ſpeciali caſu habeatur relatio inter AΘ & ΘT, ut ſupponitur, poterit haberi etiam relatio AY, & AΘ. Itemque inter YV & AΘ, ac proinde tandem (ſublata AΘ) inter AY & YV, quæ ad extremum deſideratur. Sanè ingredientur calculum generalem etiam d. AΘ & d. ΘT, ſed hæ quantitates in applicatione ſpeciali evaneſcent.

Amici tui, Poëtæ, ut apparet, eleganter docti verſus minimè reprehendo; ſed morem Germanorum agnoſco, qui (contra quam de Græcis ait *Tacitus*) tantùm aliena mirantur. Si ex data linea, quam centrum gravitationis mobile deſcribit, datoque uno ſitu puncti mobilis gravis, impetuque ejus, & directione in eo ſitu, tua quam dediſti methodo definire potes lineam projectionis, quam ita punctum grave deſcribit, ſaltem ope quadraturarum; rem profectò egregiam præſtitiſti, & quam ſi bene memini Dn. *Varignonius* negabat ſibi eſſe in promtu. Mihi non licet nunc profundiùs ingredi in diſcuſſionem eorum, quæ optima voluntate ad præclarum

clarum tuum opus admonui. Unum tantùm, quia facilius eſt, nunc attingo; nempe quæſtionem, utrum gravitas in omnes corporis partes agat, ſeu an omnes corporis gravis partes ſint graves? Hoc ego verum eſſe non puto, ſi quis per partes corporis intelligat quicquid ejus volumine continetur. Nec poteſt eſſe verum, niſi quis cum novis quibuſdam Anglis putet dari vacuum, & gravitatem non oriri ex principiis mechanicis, ſeu qualitate occulta; quas duas hypotheſes prorſus falſas eſſe puto. Sentio igitur corpora gravia eſſe pervia fluido gravifico, idque ipſum non eſſe grave; nec proinde quicquid in corporis volumine includitur, a gravitate affici. Tua Theſis eſt: gravitas agit in partes corporis etiam interiores omnes. Hoc ita probas: ſi mutato ſitu non poteſt mutari gravitas, ſequitur quod gravitas agat in partes interiores omnes. Sed verum eſt prius (per hypotheſin præmiſſam experimentis ſcilicet comprobatam) ergo & poſterius. Probanda eſt propoſitio hypothetica: Sed hoc quomodo præſtes non apparet: nam tuum argumentum videtur ſolum dirigi in eos, qui gravitatem referrent ad exteriores partes tantùm, non verò in eos, qui referrent etiam ad interiores, at non omnes. Itaque mihi probatio tua videtur in formam concludentem redigi non poſſe. Hactenus reſpondi ad argumentum tuum. Ego verò ex abundanti, contrario argumento, ſeu inſtantia vim conſequentiæ tuæ infringere aggreſſus ſum, exhibendo ſtructuram corporis, quæ ſatisfaciat experimento, ſeu mutato ſitu non mutet gravitatem, etſi gravitas in omnes corporis partes non agat. Hoc efficio ponendo ſcilicet partes non graves eſſe per maſſam æqualiter diſtributas. Reſpondes, ex eo ipſo ſequi corporum pondera eſſe maſſis proportionalia. Rectè; ſed tu aliquid amplius probare voluiſti, nempe quamlibet corporis gravis partem eſſe gravem. Objicis, concipi non poſſe, corpus, cujus partes in quo vis ſitu ſint gravitatis ictibus æque perviæ (ad ſenſum ſcilicet); ſed rationem, cur hoc concipi nequeat, non addis. Ego verò rem ſic puto concipi poſſe. Finge corpus totum conſtare ex retibus, vel elathris ſibi ſuperimpoſitis æquabiliter contextis, id quomodocumque vertas æquabiliter eidem liquido *eodem ferè modo* pervium erit; & quidem *eorum prorſus* modo *ad ſenſum*, ſi modò rete ſit contextum ex filis valdè tenuibus (uti reverâ de corporibus noſtris dicendum eſt). Ita enim diſcrimen ex mutato ſitu inſenſibile erit; cùm in ſola ſuperficie non intus diſcrimen oriri poſſit, ſuperficiales autem partes (quando magna eſt texturæ tenuitas, corpus verò ipſum comparatione filorum valdè craſſum) rationem ſenſibilem non habeant ad totum. Itaque ut ingenuè dicam quod ſentio, videtur hic aliquid eſſe mutandum. Cæterùm hac propoſitione, quam ego nec probatam, nec veram puto, in tuo opere, ni fallor, non indiges. Cl. *Michelotto* alias, quæ licebit reſpondebo. Interea vale, & fave. *Dabam Hanoveræ* 3. *Decemb.* 1715.

EPIS-

EPISTOLA XXVIII. (*)

LIbenter intellexi ex tuis, negotium Patavinæ Profeſſionis à me propoſitæ ſpem ſucceſsûs oſtendere Clariſſimo *Hermanno* noſtro, & Dn. Abbatem *Fardellam*, Virum doctiſſimum, & humaniſſimum literas eam ob rem cum ipſo commutare. Faſcem Pariſinum puto adhuc Baſileam venturum, ſed quædam tranſmiſſionem diſtulere. Itaque, ſi adveniet, utemur favore tuo. Pro nihilo computo, quæ ex ſcriptis meis habere te ais, Artem combinatoriam, & Hypotheſin phyſicam; penè enim puerilia ſunt, in prima adoleſcentia confecta, cùm prior prodierit in lucem anno 1666. poſterior puto anno 1670. Quæ ab eo tempore edidi extra-diaria, ſunt diverſi planè argumenti à Philoſophia, & Matheſi. Penſionarii *Wittii* ſcriptum nondum ſatis quærere licuit inter chartas, non dubito tamen, quin ſim tandem reperturus, ubi vacaverit. Sed vix aliquid in eo novum tibi occurret, cum fundamentis iiſdem, ubique inſiſtat, quibuſcum alii viri docti jam erant uſi, tum *Paſchalius* in Triangulo Arithmetico, & *Hugenius* in diſſ. de Alea, nempe ut medium Arithmeticum inter æque incerta ſumatur, quo fundamento etiam ruſtici utuntur, cùm prædiorum pretia æſtimant, & rerum fiſcalium Curatores, cùm reditus præfecturarum Principis medios conſtituunt, quando ſe offert conductor.

Non poſſum non duo ſubmirari in literis tuis. Primum eſt, quod methodum quandam tuam pro certi generis quadraturis involucro quodam tectam memoras, velut exploraturus, an eodem pervenire poſſim. Sed, etſi id mihi admodum difficile foret, putabam tamen, ea ætate, iiſque occupationibus frui me poſſe juri emeriti, cui, quæ vobis occurrerent, candidè, ac ſine æmulatione communicari poſſent. Quia tamen aliter tibi viſum nunc fuit, non potui mihi temperare, quin recurrerem ad veteres ſchedas. Revera id enim, de quo agitur, ſatis facile, & ejus eſt naturæ, ut vix potuerit non exercere inquiſitionem meam ante multos annos. Nec mirari debes, quod nondum edidi olim reperta. Sanè quadraturam Arithmeticam, & Analyſin infiniteſimalem ex præcepto *Horatii* in nonum, & ampliùs annum preſſi, & quadraturarum rationalium methodum, nuper demum editam, habui jam in Gallia, id eſt ante annos triginta; & tamen non niſi biennium eſt quod in lucem produxi, ac tum demum oſtendi etiam uſum imaginarium, quem jam olim *Hugenio* etiam in Gallia a me communicatum literis ejus docere poſſum. Et jam tum repereram circuli aream per logarithmos imaginarios exprimi. Habeo adhuc methodum pro Radicibus rationalibus altiorum æquationum, aliaque multa, quæ elaborare non

 vacavit,

(*) Authores Memoriar. Academiæ Berolinenſis exiſtimant hanc epiſtolam à *Leibnitio* noſtro ſcriptam fuiſſe Celeb. *Jac. Bernoullio*: caret & ſubſcriptione, & adjectione loci & diei.

vacavit, quæ colligam aliquando, attingamque ſaltem, ne pereant. Sunt enim nonnulla, quæ non facilè occurrant. Sed quadraturas figuræ, cujus ordinata eſt æqualis ♀ $\sqrt[e]{\text{☽}}$ poſito e eſſe numerum, & ♀, ☽ eſſe formulas, in quibus una indeterminata × non occurrat, niſi rationaliter integrè, ita ut vel abſolutè præſtetur quadratura, vel reducatur ad ſimpliciores, quando id licet, planè difficultate caret, cùm tantùm formulam aſſumere liceat, qualis ♀ $\sqrt[e]{\text{☽}}$ + ∫ ♃ $\sqrt[e]{\text{☽}}$ d ×. (poſito ♃ eſſe formulam ſimpliciorem, quantum ſatis eſt, quàm ♀.) ejuſque differentiationem comparare cum data ſummanda, nam in comparando nulla planè occurrit difficultas. Ubi notandum poſſe formulam ♃ ſufficientem aſſumi variis modis, & non tantùm poſſe eam intelligi gradus, cujus exponens ſit binario inferior exponente gradus ipſius ☽, quemadmodum innuis; ſed gradus cujuſcunque non excedentis gradum ipſius ♀; numeri verò terminorum binario deficientis a numero terminorum ipſius formulæ ☽. Terminos autem computo etiam intermedios, qui vacant, & in ☽ etiam poſtremos.

Interim fateor, ex ipſis ♃ aſſumibilibus eam fore ſimpliciſſimam formulam, in qua gradus quoque binario deficit a gradu ipſius ☽, tunc nimirum, cùm termini ab × non habent exponentes niſi affirmativos. Sed ſi occurrant negativi, res ſecus habet, interim numerus terminorum ſemper erit binario minor. Cæterum methodum meam pro eo, de quo agitur, & Canonem in tabulæ modum in adjecta ſcheda ſum complexus, gratumque erit, ſi examines an tuo conſentiat, quo ſecuriores ſimus, in calculo non eſſe erratum; gratiuſque adhuc, ſi abſolvas calculum, & legem progreſſus prodeuntem explicatione literarum valoris aſſignati. Quia enim id non vacavit facere, ea fuit, credo, cauſa, quòd tot annis neglectæ jacuere ſchedæ meæ huc pertinentes cum tot aliis, more meo, qui methodis contentus ſoleo parum curare, quæ video eſſe in poteſtate. In adjecta charta monui etiam analyſin Quadraturariam hinc haberi (accedente nuper à me editorum auxilio) etſi ordinata eſſet $\frac{♀ \sqrt[e]{\text{☽}}}{♂}$. Habeo, & alias cogitationes, quibus hæc longiùs promoveri poſſunt.

Alterum eſt, quod ſubmiror celere adeo judicium tuum de iis, quæ circa dyadica ſcripſi. Dixeram tibi in omnium Poteſtatum dyadicè expreſſarum utcunque altarum columnis quibuſcunque eſſe periodos; idque potui dicere non temerè, quia certa demonſtratione comperi. Tu, re vix inſpecta, negas, & in ipſo quadrato putas quartam, & ſequentes columnas periodis carere; ſed ſi paulo fuiſſes in meis conſiderandis attentior, contrarium ipſis oculis deprehendiſſes. Nam quarta periodus perpetuò utique recurrens eſt 10100000 | 10100000 &c. Et quinta periodus eſt 1101010110000000. Et tale quid etiam in ſequentibus columnis locum habet. Equidem non dantur hic periodo-

riodorum periodi, ſed quin certa lege procedant quæ a nobis poſſit deprehendi, & utiliter quæratur, non dubito; itemque ſentio de progreſſu notarum ad *Ludolphinæ* expreſſionis modum in dyadicis exhibitarum. Non ſemper ſerierum leges, & ſi ad centum, & ultra terminos perducas, ſunt oculis obviæ, aut nuda inductione facilè deprehenduntur, ſed tamen ex fonte analytico hauriri poſſunt. Porrò, & ſi ſatis ſciam, etiam decadicas, & alias quaſcunque progreſſiones habere periodos quaſdam, aut procedendi leges, (licet quodammodo per ſaltum, quoniam in iis quidam pro arbitrio aſſumuntur characteres, quod in dyadicis non fit, ubi omnis notatio redit ad prima elementa 0 & 1) hoc, inquam, & ſi non ignorem, id tamen diſcrimen intercedere deprehendo, quod in dyadicis incomparabiliter major eſt facilitas pro legibus progreſſionum deprehendendis. Interim velim aliquando pergi à dyadicis ad triadica, tetradica, & ita porrò, donec hæc ipſa comparatio dederit legem pergendi; ſed hoc tum demum tentare operæ pretium erit, cùm in dyadicis egregios progreſſus fecerimus, veluti cùm periodos in columnis potentiarum ad leges reduxerimus. Idque ideo ad tranſcendentes quoque maximi momenti eſt, quia ſeries infinitæ per potentias ipſius X optimæ quidem ſunt ad valores generales, v. gr. logarithmum quemcumque, arcum circuli quemcunque; ſed pro determinatis quantitatibus, e. g. logarithmo binarii, arcu quadrantis &c. ſeries tales non ſunt optimæ. Et licèt in indefinitis ſatis habuerimus ipſam incognitam X, ejuſque poteſtates occurrere rationaliter, integre, ſeu extra vincula, & denominatores; in ipſis determinatis tamen id non eſt ſatis, quoniam præterea effici poteſt, ut ipſi numeri occurrant, non niſi rationaliter integre. Idque ipſum fit dyadica, vel alia hujuſmodi expreſſione ad *Ludolphinæ* modum, ex quibus dyadica via, utique generatim loquendo, ſimpliciſſima eſt, & hæ ſeries vel ideò aliis præferendæ ſunt, quia ſunt unicæ, & invariabiles. Et ſi alio ſenſu, quàm quem memoras, dixerim circa locorum doctrinam mihi non eſſe ſatisfactum; gaudeo tamen, quòd tuo modo acceperis, eaque occaſione in lineas altiores inquiſiveris. *Newtonus* ſuæ enumerationis linearum tertii gradûs, quas 72. facit, demonſtrationem non addidit, credo, ut aliorum quoque ingeniis exercendis ſe materiam relinqueret, niſi fortè ſtudio brevitatis, & longi ſermonis impatientia a ſe impetrare non potuit, ut progreſſum inventionis deſcriberet. Tuæ interim 33. curvæ pro lapide Lydio inſervient, quanquam tibi non uſque adeo difficile futurum putem, ubi animum applicueris, certum deſignare numerum curvis hujus gradûs; præſertim ſi conſideremus, quandonam una eademque linea æquationibus localibus diverſæ prorsùs formæ exprimi poſſit. Optaſſem *Newtonum* non tantùm ordinatas, centra diametros, & Aſymtotos, ſed & focos in conſilium adhibuiſſe; ſed cùm hanc diſquiſitionem aliis reliquerit, hortatus ſum Dn. *de Tſchirnhaus*, qui huic doctrinæ focorum dudum incubuit, ut ſupplere ſtudeat hunc defectum.

Cæterum imperfectio doctrinæ de locis vulgò proſtantis, quam ego in mente habebam, cùm ad te ſcriberem, etiam ad loca plana, & ſolida per-

tinet, quæ veteres multa excogitavere, licèt non niſi paucas curvas contineant, ut viam aperirent ad conſtructiones geometricas commodas. Horum locorum quædam nobis conſervavit *Pappus*; quædam poſteriores addidere; ſed cùm demonſtrationes dedere locorum a veteribus enumeratorum, non ſatisfecere toti negotio; neque enim fontem inventionis aperuere, qua veteres pervenere ad has ſuas enumerationes, multoque minus dedere modum ſupplendi. Et omninò tota doctrina de conſtructionibus Geometricis commodis eruendis ad morem veterum nondum ſatis exculta eſt. Fateor ea careri poſſe ad uſum, noſque numeris incognitas quantitates potiùs in praxi, quàm linearum ductu determinare; ſed pertinet tamen artis conſtruendi promotio ad elegantiam; & hunc uſum habet ſaltem, ut ars inveniendi promoveatur. Itaque molitus aliquando ſum novam characteriſticam ſitûs, differentem à noſtra analyſi hactenùs cognita, quæ propriè eſt characteriſtica magnitudinis, quæ tamen ſitus characteriſtice, & ipſa quodam ſui generis calculo conſtaret. Sed facilius eſt talia invenire, quàm elaborare. Illud ingenio, hoc tempore & labore conſtat.

Antequàm hinc abeam, tibi, ſi placet, ac cl. *Hermanno* commendabo inquiſitionem quandam circa ſeries infinitas, quæ nondum, quod ſciam, habetur, & tamen ad earum ſufficientem cognitionem eſt neceſſaria; video enim te peculiari ſtudio in ſeriebus infinitis verſari, nec minore ſucceſſu. Scis cujuslibet æquationis radicem facilè exhiberi poſſe per ſeriem infinitam, modumque id præſtandi generali Canone a me datum aliquandò in Actis, quando Dn. *Fatio* reſpondi, ſtatimque ibi valorem radicis prodire, ſi omnes coëfficientes terminorum æquationis, in quibus eſt y, ſunt æquales nihilo, manente ſola indeterminata X. Verùm cùm extractio talis pertineat etiam ad eas æquationes, quæ ſunt impoſſibiles, deberet id ex ipſo valore radicis per ſeriem infinitam expreſſo poſſe internoſci; nempe tunc neceſſe eſt ut ſeries, ſi per partes ſumatur, continueque producatur, quæſito non advergat, ſeu non ita accedat, ut oſtendi poſſit, differentiam tandem fieri minorem, quavis data. Cùm verò id non ſemper facilè ex ſerie appareat, opus eſt indicia conſtitui, ex quibus colligatur, utrum nempe ſeries ſit advergens, vel non? indicia, inquam, eruta ex ipſa ſerie, non ex æquatione, unde eſt deducta ſeries, præſertim cùm interdum ignoretur hæc æquatio, & ſæpe ſeries ſignificet quantitatem tranſcendentem, quæ ex nulla hujuſmodi æquatione deducta eſt. Sed ubi rem in ſeriebus æquationum radices exprimentibus conſtituerimus, faciliùs idem, & in cæteris efficiemus.

Cl. Dn. *Hermannum* rogo, ut a me ſalutes: literas nuper ad me datas rectè ipſi redditas puto. Si quis impoſterum, vel tu, vel ille ad me voletis, commendate quæſo, literas D. *Schrôkio* Agenti Electorali Brunsvicenſi apud Auguſtanos. Et hâc viâ etiam faſciculi minores ad me curari poſſunt, non exſpectatis ſemper nundinis. Eâdemque ratione Wittianam ſchedam a me accipies, ubi primum eruere licuerit.

N°. LXXXVIII.

N°. LXXXVIII.

COMMERCIUM EPISTOLICUM

G. G. LEIBNITII,

ARNOLDI ECKHARDI, PROF. RINTELIENSIS, ABBATIS MOLANI ET EJUS FRATRIS.

DE METHODO CARTESIANA.

Ex Sylloge novâ Epiſtolarum Norimbergæ anno 1761. editâ depromtum.

EDITORIS MONITUM.

QUamquam in hujuſce Tertii voluminis Præfatione dixerimus, partes quibus conſtat ſecundùm ordinem temporum editas eſſe, ut clariùs paterent immenſi Ill. *Leibnitii* altiſſimi ingenii in re Mathematicâ in dies progreſſus; En tibi, Benevole Lector, plurima opuſcula offerimus, quæ in ordine longiſſimè a methodo propoſitâ recedunt; ſed te ſcire volumus, nos indeſinenter in noſtris inveſtigationibus, ut collectionem noſtram omni puncto perfectam reddamus, laborantes, opuſcula ſequentia, a tempore ex quo volumen hoc typis mandatum fuit, reperiſſe, quam inordinationem apparentem in gratiam opuſculorum hic adjectorum, nobis ignoſcere non dedigneris.

Primum eſt *G. G. Leibnitii*, *Arn. Eckhardi*, *Abbatiſque Molani Commercium Epiſtolicum*, ex Sylloge novâ Epiſtolarum Norimbergæ apud D. *Felſeckerum* editâ, extractum, de quo nihil adjiciemus laudibus quas hujus pretioſi faſciculi author anonymus in ſuâ ſecundi voluminis præfatione protulit.

» Aſſeruerat Ill. *Leibnitius*, methodum, quâ uſus erat *Carteſius*, quàm maximè eſſe imperfectam, *Archimedem*que *Carteſio* longè eſſe præferendum. Stomachum hæc movebant *Eckhardo*, Carteſiano, qui præſtantiam methodi Carteſianæ vel unico illo famoſo problemate, quod in *Geometriâ*, *libro I.* propoſuerat, declarari poſſe credebat. Hinc enatæ demonſtrationes mathematicæ & algebraicæ, in hoc libro paſſim obviæ. Alterum exemplum, quo declarari præſtantiam methodi Carteſianæ poſſe putabat *Eckhardus*, erat demonſtratio exiſtentiæ Dei Carteſiana, quam is perfectiſſimam, illuſtris verò *Leibnitius* inſufficientem atque vitioſam habebat. Hinc illæ amicæ concertationes ſatis verboſæ inter eoſdem enatæ, datâque occaſione plurima Metaphyſices capita fuere illuſtrata atque pertractata. «

Monere Lectorem volumus notas numeratas calci quarum-

dam

dam *Eckhardi* Epiſtolarum adjectas, manu propriâ *Leibnitii* ſcriptas fuiſſe.

Nec ſolum eſt opuſculum quod in hâc Sylloge excerpſimus, inveniet Lector in tomo quinto quaſdam ad *Huetium*, *Schminckium*, *Spenerum*que epiſtolas, necnon *Leibnitii* & aliquot Doctorum Hamburgenſium commercium Epiſtolicum; Non igitur ſine causâ modeſtus Sylloges Collector, nobis exprobraret falcem ſuæ meſſi immiſiſſe, ſed nos omni culpâ purgat inſtitutum noſtrum; nihil ex proprio penu reperietur in his operibus, ſed quidquid Leibnitianum eſt juris noſtri fecimus, & quidquid authoris celeberrimi eſt undequaque colligimus. Multùm in materiarum noſtrarum inveſtigationibus deſudavimus; æquum igitur eſt ut, ubi Authoris opera ſponte ſe offerunt, aliorum laboribus, eorum laudes prædicando, utamur.

COMMER-

COMMERCIUM EPISTOLICUM
G. G. LEIBNITII,
ARN. ECKHARDI, ABBATIS MOLANI, ET EJUS FRATRIS.

(1.)

ARN. ECKHARDUS ABBATI MOLANO.

ARNOLDUS ECKHARDUS, *Profeſſor Rintelienſis Carteſianus*, *Abbati* MOLANO *ſignificat*, *Hanoveram ſe venturum ad colloquendum cum* LEIBNITIO *Anti-Carteſiano.*

QUòd tam doctum, tamque amicum (ita enim ſcribis), mihi adverſarium excitare voluiſti, gratias eo nomine & ago, & habeo tibi ingentes. Ego non putaveram, eſſe in vicinia Virum Mathematum tam peritum, atque hunc eſſe video. Ideoque in magna felicitatis meæ parte putabo, ſi viri tam eruditi amicitiam mihi conciliaveris. Inter alia, quæ de rebus Mathematicis præclarè diſſerit, illud egregium eſt, quod methodum inveniſſe ſe ſcribit, cujus ope valor radicis incognitæ cujuſque æquationis in quocumque gradu analyticè exprimi poſſit. Quod inventum vel ſolum auctoris memoriam æternitati conſecrabit. Cæterùm de rebus mathematicis facilè inter nos conventurum eſſe video. Neque enim *Carteſius* omnia, quæ potuit, tradere voluit; neque, ſi voluiſſet, ita tamen tradidiſſet, ut nihil ampliùs inveniendum reſtaret. Illud tamen aſſentiri viro clariſſimo nondum poſſum, quòd aut methodum, qua uſus fuit *Carteſius*, imperfectam, aut *Archimedem Carteſio* præponendum exiſtimat. Voluit enim *Carteſius* methodi ſuæ præſtantiam unico tantùm exemplo declarare: ideoque famoſum illud problema, quod *Geometria* ſua *lib. I. Pappi* verbis proponit, cujuſque ſolutionem magno ſtudio veteres fruſtrà quæſiverant, expediendum ſibi ſumit. Quod quidem admirabili prorſus via modoque perfecit. Quodſi ille in alia quadam Matheſeos parte, & ea quidem, quam *Archimedes* excoluit, ingenii ſui ſpecimen aliquod edere voluiſſet; non dubito, quin id æquè egregiè feciſſet in Archime-

chimedea, atque in Apolloniana Matheſi. Ad ea, quæ de reliquis Philoſophiæ partibus diſſerit vir clariſſimus, multa monenda eſſent. Sed de his propediem, ſpero, colloquemur. Etenim, ſi Deus volet, futuro die Lunæ ad vos excurrere conſtitui. Interim vale, reverendiſſime domine, &, ſi grave non eſt, virum ampliſſimum quàm amiciſſimè meo nomine ſaluta, faveque reverendiſſ. magnificentiæ tuæ obſequentiſſimo A. Eckhardo. *Rintelii d. 29. Martii 1677.*

(2.)

Colloquium D. LEIBNITII *cum* D. ECKHARDO, *Profeſſore Rintelienſi Carteſiano, præſente Dn. Abbatis* MOLANI *fratre, habitum Hanoveræ d. 5. Aprilis 1677.*

MAne ſermo primum fuit de *Hobbio*, quem dicebam de re morali ſatis eleganter ſcripſiſſe; peſſimè de Geometria: quamquam ipſe dixerit cuidam amico meo, omnium ſcriptorum ſuorum optima eſſe Geometrica. Tantùm ſcilicet opinio hominis privata de ſe ipſo ab aliorum judicio diſtare poteſt! Inde ad *Carteſium* delatus eſt ſermo; cumque quæreret a me *Molani* frater, quibuſnam in rebus optimè *Carteſium* ſcripſiſſe putarem, reſpondi, in phyſicis. *Ille*: *Carteſio* ipſi videri potiſſima ſuorum ſcriptorum eſſe metaphyſica. *Ego*: vereri me, ne idem *Carteſio* hac in re acciderit, quod ſupra *Hobbio* accidiſſe dixeram. Cùm quæreretur, quid contra Carteſiana metaphyſica haberem, *dixi*, mihi cùm alia, tum ejus demonſtrationem exſiſtentiæ Dei non ſatis facere. Hujus defenſionem Dn. *Eckhardus* in ſe recepit, rogavitque, ut dicerem, quid in ea deſiderarem. Addidit, *Carteſium* cum multis egregiis viris hac de re per litteras contuliſſe, neque ab ullo eorum fuiſſe convictum. *Ego*: non videri mihi ſemper ſatis feciſſe. *Ille*: quanam in re? *Ego*: ut hoc pateat, reſumendum eſſe *Carteſii* argumentum; quod huc redeat: *Deus eſt ens perfectiſſimum; de entis perfectiſſimi conceptu eſt exſiſtentia*, quippe quæ eſt ex perfectionum numero. *Ergo Deus exſiſtit.* Mihi verò videri hoc argumentum reddi poſſe compendioſius, ſublata perfectionum mentione, ſi ſcilicet ſic argumentemur: *ens, de cujus eſſentia eſt exſiſtentia, neceſſariò exſiſtit. Deus eſt ens, de cujus eſſentia eſt exſiſtentia. Ergo Deus neceſſariò exſiſtit. Ille*: probandam eſſe minorem, quod ſcilicet de eſſentia Dei ſit exſiſtentia; eam verò ex eo probari, quòd ſit ens perfectiſſimum. *Ego*: minorem non opus habere probatione, poſito, quòd hæc ſit Dei definitio: eſſe ens a ſe, ſeu, quod exſiſtentiam ſuam a ſe ipſo, nempe a ſua eſſentia, habeat. Definitiones enim probari, non eſt neceſſe; præterquàm quòd hæc definitio etiam aliis, ut *Thomæ* & Scholaſticis probatur. *Ille*: ſed quid reſpondetur ad argumentum? *Ego*: reſpondeo, dubitari poſſe: de cujus eſſentia ſit exſiſtentia,

non

non implicet contradictionem: fateri enim me, ſi ſemel concedatur, tale ens eſſe poſſibile, ſeu eſſe talem conceptum vel ideam, ſequi, quòd exſiſtat. *Molani* frater dixit, videri ſibi probari idem per idem. Nam ſi ſemel admittitur ens, quod neceſſariò exſiſtere debet, utique jam admittitur, ipſum exſiſtere. *Eckhardus*: argumentum hoc eſſe probum: nam attributum competere alicui ſubjecto, v. gr. triangulo, demonſtrandum eſt ex ejus definitione. Quodſi ergò de aliquo exſiſtentia ex ejus definitione oſtendi poſſit, ei utique competet exſiſtentia. Ens autem, cujus eſſentia involvit exſiſtentiam, tale utique eſt; ex hypotheſi itaque tale ens exſiſtit. *Ego*: ſupereſt ergò tantùm, ut oſtendamus, talem conceptum poſſibilem eſſe, ſive non implicare contradictionem. *Ille*: ideam entis perfectiſſimi, vel etiam entis, cujus eſſentia involvit exſiſtentiam, dari, ex eo patet, quia intelligitur: neque enim quiſquam poſſet de ente perfectiſſimo cogitare, niſi ejus conceptum vel ideam haberet. *Ego*: non omnia, de quibus cogitamus eſſe poſſibilia: ut de motu celerrimo cogitamus, cujus nulla datur idea, quia impoſſibilis eſt; ut facilè demonſtrari poteſt. *Ille*: poſſe demonſtrari, quòd motus celerrimus ſit impoſſibilis; non verò poſſe demonſtrari idem de ente perfectiſſimo, vel, de ente a ſe. *Ego*: poſito, quod id a nobis non demonſtretur, a Carteſianis tamen demonſtrari debere, quòd tale ens concipi poſſit. *Ille*: durum eſſe poſtulatum; non debere probari talem poſſibilitatem, quemadmodum nemo probat, dari triangulum, cet. *Ego*: immò demonſtrari talium rerum poſſibilitatem, quoties oſtenditur modus eas generandi vel producendi. *Ille*: talia poſſibilia eſſe, etiam antea ſciri poſſe, etiam antequàm modus ea generandi oſtendatur. *Ego*: de eo ſæpè poſſe dubitari; exempli cauſſa, ſi quis conceptum habeat de linea, quæ ſui ipſius evolutione deſcribitur, (qualem cyclo idem eſſe, probavit *Hugenius*), eum dubitare poſſe, utrum talis linea ſit poſſibilis. *Ille*: aliud eſſe de rebus ſimplicioribus, quales eſſe poſſibiles intelliguntur. *Ego*: probabilem eſſe eorum poſſibilitatem, ſed non certam, donec probetur. Præſumi ſcilicet, donec probetur contrarium. Sed hunc probandi modum in foro, non verò in philoſophia admitti. *Ille*: admitti etiam in philoſophia, neque enim quemlibet ad quidvis probandum teneri. *Ego*: ſi de praxi agatur, fateri me, quod præſumatur entis neceſſarii vel entis perfectiſſimi poſſibilitas. Sed quando de demonſtratione agitur, tunc opus eſt, eum, qui perfectam certitudinem ſive demonſtrationem quærit, omnes præpoſitiones, quas ſupponit, probare. Interea ſupervenientibus aliis, & inter eos Abbate *Molano*, ſoluta eſt diſputatio. Cumque Abbas *Molanus* quæreret, quonam loco eſſemus? dixit *Eckhardus*, ſe hic dicere, quod olim *Felix Paulo*: *nos te porrò audiemus*.

Horis pomeridianis rurſus convenimus. Cumque diu de rebus aliis eſſemus collocuti, tandem *Molani* frater rurſus quæſtionem circa demonſtrationem

tionem Carteſianam exſiſtentiæ Dei movit. Repetita fuere nonnulla eorum, quæ antea dixeramus. Dixi *ego*, in hac divinæ exſiſtentiæ demonſtratione duo eſſe conſideranda: primum, an ens perfectiſſimum non implicet contradictionem? alterum, poſito, quòd ens perfectiſſimum non implicet contradictionem, utrùm exſiſtentia ſit ex numero perfectionum. Videri enim perfectiones eſſe quaſdam qualitates, qualis non eſt exſiſtentia. Itaque petere me, ut declaretur, quidnam veniat nomine perfectionis. *Ille*: hoc non poſſe facilè definiri, quemadmodum multa alia, quæ cuilibet ſunt nota. Quemlibet tamen conceſſurum, quòd exſiſtere ſit quædam perfectio, & quòd perfectiora ſint exſiſtentia, quàm non exſiſtentia. *Ego*: id non eſſe definitionem, ſed exemplum perfectionis. *Ille*: perfectionem eſſe omne attributum, ſeu omnem realitatem. *Ego*: ergò etiam dolorem eſſe perfectionem? *Ille*: dolorem non eſſe quiddam poſitivum, ſed privationem tranquillitatis; quemadmodum tenebræ lucis. *Ego*: videri mihi dolorem non magis dici poſſe privationem voluptatis, quàm privationem voluptatem doloris. Sed tam voluptatem, quàm dolorem, eſſe poſitivum quiddam. Et longè aliter ſe habere dolorem ad voluptatem, quàm tenebras ad lucem. Nam tenebras non poſſe intendi & remitti, excluſa ſemel luce; neque tenebras alias aliis eſſe majores, ubi omnis lux abſit. Sed dolorem non exſiſtere, ſublata tantum voluptate, & unum dolorem alio eſſe fortiorem: itaque ſequi, ut ens perfectiſſimum habeat & dolores. *Ille*: poſſe dici, dolores eſſe perfectiones materialiter, quatenus continent aliquid poſitivum, & eatenùs poſſe eſſe in Deo. *Ego*: nullam videre rationem diverſitatis, cur voluptates potiùs, quàm dolores, formaliter in Deo eſſe dicamus. Frater *Molani*: ſi permiſſum eſſet uti definitione morali perfectionis, nempe quòd perfectio ſit congruentia cum ratione, tum facilè excludi dolorem. Agnovit tamen, hic agi de definitione metaphyſica, ex qua ſequatur, exſiſtentiam eſſe perfectionem. Hìc ergò hæſimus, neque ſatis explicatum fuit, cur dolor non æquè ſit perfectio, ac voluptas ſeu ſatisfactio animi. Inde paullatim in alia ſumus delapſi. Frater *Molani* dixerat, ens perfectiſſimum idem eſſe, quàm quod eſt infinitæ perfectionis. *Ego*: dubitari, an infinitum tale non implicet contradictionem. *Eckhardus*: infinitum eſſe prius finito: finitum enim ab infinito quodam modo abſcindi, atque negationem ulterioris proceſſus ſignificare. Ideò infinitum non eſſe negationem termini, ſed contra finitum ſive terminatum eſſe negationem proceſſus ulterioris; quodſi ergò infinitum implicet, ſequi, etiam finitum implicare. Non erat quidem talis ejus ratiocinatio, ſed ita eam abſolvo. *Ego*: diſtinguere me inter heterogenea & homogenea. In heterogeneis e. gr. numeris finitum non eſſe negationem infiniti. Nam numerus aliquis finitus conſtituitur, non abſcindendo eum a toto aggregato infinitarum unitatum, ſed formando eum ex aggregato unitatum finitarum. Secus eſt in ſpatio ſeu extenſione:

nam

nam ſpatium totum eſt unum homogeneum, & demonſtrari poteſt, ipſum non finiri, quia, cùm per omnia ſibi ſimiles ſint ejus partes, impoſſibile eſt, inveniri rationem, cur alicubi finiatur. Idem eſt de motu celerrimo. Etſi enim motus ſint inter ſe homogenei, tamen non conſtituunt unum totum. Idem ergò eſt de ente perfectiſſimo; nam plures perfectiones non ſunt homogeneæ; nam plures perfectiones non conſtituunt unum quoddam, etſi in communi perfectionis nomine conveniant. *Ille*: immò homogeneas eſſe in perfectione. *Ego*: ita & numeros in quantitate & motu? Reliqua, de his ultrò citroque dicta, nihil ferè notari dignum continebant. Et cùm nondum appareret, demonſtrationem Carteſianam ſatis clarè & irrefragabiliter mihi proponi poſſe, ad alia paullatim dilapſi ſumus.

(3.)

ECKHARDUS LEIBNITIO.

ARNOLDUS ECKHARDUS LEIBNITIO *ſcriptis litteris ſatis facere tentat, cùm oretenus non poſſet, in defendenda Carteſiana demonſtratione exſiſtentiæ Dei.*

POſtquàm in cœnobium Luccenſe veni, otium nactus ad hanc rem neceſſarium, recollegi ea, quæ inter nos de exſiſtentia Dei diſputata fuerunt. Demonſtratio *Carteſii* hæc eſt:

Quod in idea alicujus rei clarè & diſtinctè continetur, id de illa re verè affirmatur.

At in idea Dei actualis & neceſſaria exſiſtentia clarè & diſtinctè continetur.

Ergo actualis & neceſſaria exſiſtentia de Deo verè affirmatur.

Conceſſa majore negabat T. C. minorem, quæ ita probatur:

In qua idea continentur omnes perfectiones, in illa etiam continetur actualis & neceſſaria exſiſtentia.

At in idea Dei continentur omnes perfectiones.

Ergo &c.

Putabat T. C. dubiam eſſe & majorem & minorem hujus proſyllogiſmi. Nec enim exſiſtentiam eſſe perfectionem, quod in majori ſupponitur: &, quantum ad minorem, illud probandum eſſe, ideam entis ſummè perfecti, vel habentis omnes perfectiones, non involvere contradictionem: ante omnia autem definiendum eſſe, quid intelligatur nomine perfectionis.

Perfecti vocabulum me non aliter accipere dicebam, ac omnes in univerſum philoſophi, qui perfectum ab ente non diſtinguunt, niſi ſola ratione.

tione. Ens enim & poſitivum opponitur non enti. Et quoniam ens verum & realem conceptum involvit, quem non ens non habet; præſtatque, aliquid eſſe, quàm nihil eſſe: ideò omne ens dicitur perfectum. In quo omnes conveniunt.

Regerebat T. C. ergò & dolorem eſſe perfectionem, quia eſt aliquid reale & poſitivum.

Reſpondebam: in dolore duo ineſſe; primò ſenſum & cogitationem: quæ ſi ſola conſideretur, non quatenùs admixtum habet aliquem defectum, uti eſt ens aliquod poſitivum & reale, ita etiam eſt perfectio. Melius enim eſt & perfectius, ſenſum habere & cogitare, quàm, non habere ſenſum, & non cogitare. Secundò defectum aliquem & negationem: dolor enim ſemper involvit negationem alicujus rei, quam ſi haberemus, melius nobis futurum eſſet, quàm tunc eſt, cùm dolemus. Atque hac ratione dolor non eſt aliquod poſitivum, ſed non ens & negatio, adeoque etiam imperfectio. Neque hac de re dubitationem eſſe poſſe putabam. Omnes quippe Philoſophi ita rem explicant.

Quæritur jam, an exſiſtentia ſit perfectio? Quod ſanè omni dubio carere exiſtimabam. Etenim ſi ens, poſitivum, reale, inter ſe non differunt, quis negabit, *exſiſtere* eſſe perfectionem? Nam eſſe ens, eſſe reale, eſſe poſitivum, & exſiſtere, inter ſe non differunt. Illudque T. C. aſſentiri planè non poſſum, quod dicit, *videri eſſentiam & exſiſtentiam planè inter ſe differre, neque quidquam commune habere, velut potentia & actus; ideoque dubitari poſſe, an ipſa exſiſtentia velut quædam eſſentiæ portio aut ſpecies concipi poſſit.* Contrarium docent omnes Philoſophi, eſtque notiſſimum. Eſſentia & exſiſtentia non magis inter ſe differunt, quàm extenſum & diviſibile; immò adhuc minus. Fluit enim diviſibilitas ex extenſione, ut conceptus poſterior ex priori. At qui concipit eſſentiam, eodem actu non poteſt non concipere exſiſtentiam; & contrà. Sunt enim planè unum & idem, eſſe & exſiſtere; videturque T. C. hoc intelligere, eſſentiam poſſibilem ab exſiſtentia actuali differre; quod nemo negat. At inde non inferri poteſt, eſſentiam & exſiſtentiam realiter diſtingui. Nam etiam eſſentia poſſibilis ab eſſentia actuali realiter differt. Inde tamen non ſequitur, eſſentiam ab eſſentia differre; non magis, quàm homo idem a ſe ipſo. Uno verbo: eſſentia poſſibilis & exſiſtentia poſſibilis; eſſentia actualis & exſiſtentia actualis nullo modo inter ſe differunt; non magis, quàm eſſentia poſſibilis ab eſſentia poſſibili, hoc eſt, a ſe ipſa, & eſſentia actualis ab eſſentia actuali, hoc eſt, a ſe ipſa.

Quantum ad potentiam & actum, vide, quæſo, quod tamen pace T. C. dixerim, quantum contraria ſententia ad veritatem videatur eſſe propenſior. Potentia enim & actus realiter inter ſe differunt; neque dici poteſt, potentiam, quæ nondum exſiſtit, eamdem eſſe cum actu ſuo, qua itidem nondum exſiſtit: ut nec potentiam, quæ jam exſiſtit, eamdem eſſe

cum

cum actu ſuo, qui etiam exſiſtit. At eſſentia, quæ nondum eſt, ab exſiſtentia poſſibili, & eſſentia, quæ actu eſt, ab exſiſtentia actuali non differt. Hæc autem quamvis ita ſint, non tamen, exſiſtentia velut quædam eſſentiæ portio & ſpecies concipi debet. Eſt enim eſſentia poſſibilis ipſa exſiſtentia poſſibilis, non quædam ejus portio & ſpecies. Eadem ratio eſt eſſentiæ actualis, quæ eſt ipſa exſiſtentia actualis; non portio ejus aut ſpecies.

Confero me ad minorem. Requirebat T. C. ſecundo loco, ut oſtenderem, ideam entis ſummè perfecti non involvere contradictionem. Æquiſſimum eſt poſtulatum, ideoque morem geram. Non poſſunt contradictionem involvere, niſi duo conceptus inter ſe conjuncti, quorum unus alterum tollit. Hoc enim eſt, contradictionem involvere, quando uno conceptu deſtruitur, quod altero ponitur. Contradictio enim ſemper eſt inter duos conceptus diverſos, ſeu qui ex natura rei conjungi non poſſunt. Ita contradictionem involvit idea quadrati trilateri: quæ compoſita eſt ex idea quadrati, & ex idea trianguli. Quando itaque ab una parte clarè & diſtinctè percipio quadrilaterum, quale etiam eſt quadratum, ab altera triangulum; manifeſtè intelligo, quadrilaterum non eſſe trilaterum, & contra; adeoque quadratum trilaterum contradictionem involvere, rectè affirmo. Videbimus jam, an talem contradictionem involvat idea entis ſummè perfecti. Ens & perfectum a ſe invicem non differunt, ut ſuprà oſtenſum eſt. Ideoque ens ſummè perfectum idem eſt, quod eſt purum, ſeu quod nullo modo eſt non ens. Itaque ens non magis contradicit ſummè perfecto, quàm ens enti. Ens enim ſummè perfectum verè & abſolutè eſt ens; ens autem imperfectum certo modo eſt non ens. E. gr. intelligamus, nos, qui ſumus res cogitantes, intelligere & velle, ſed imperfectè. Multa enim planè non intelligimus, & pauca ea, quæ intelligimus, ita perfectè tamen non intelligimus, ac intelligi illa poſſent. Quatenùs quædam intelligimus, aut intelligere poſſumus, ſumus entia, quatenùs autem multa aut non intelligimus, aut non perfectè, eatenùs participamus de non ente. Adeoque res cogitans imperfecta partim eſt ens, partim non ens, hoc eſt, participat ab ente, quatenus quædam cogitat, aut cogitare ſaltem poteſt, & a non ente, quatenùs non omnia, aut non perfectè cogitat. Itaque ſi qua contradictio hic metuenda eſſet, illa profectò eſſet in idea entis imperfecti, quæ compoſita eſt ex idea entis & non entis; non autem in idea entis ſummè perfecti, quæ eſt ſimpliciſſima, nihilque aliud continet, quàm ens verum, purum, ſimplex, & abſolutum. Quis autem unum & ſimpliciſſimum conceptum contradictionem involvere dicet? Itaque poſitivè probo, conceptum entis ſummè perfecti non involvere contradictionem: quod difficile eſſe putabat T. C.

Qui conceptus eſt ſimpliciſſimus, ſeu nullo modo compoſitus, is non poteſt contradictionem involvere.

Talis

Talis eſt conceptus entis ſummè perfecti.

Ergò &c.

Major eſt notiſſima. Contradictio enim eſt inter duos conceptus, quorum unus tollit, quod alter ponit. Et profectò is aliquid diceret, quod contradictionem involveret, qui contrarium aſſerere vellet. Qui enim diceret, unum & ſimplicem conceptum contradictionem involvere, is duo diceret, primò, conceptum illum eſſe unum & ſimplicem ex hypotheſi; & non unum, ſed compoſitum, quia contradictionem involvit.

Neque de minori dubium eſſe poteſt, ſi attendimus, in idea entis ſummè perfecti nihil aliud eſſe, quàm ſolum ens. Quid enim eſt ens, niſi quod eſt poſitivum & reale? quid ſummè perfectum, niſi itidem, quod poſitivum & reale, ut non ſit non poſitivum & non reale, ſeu cui nihil non poſitivum & non reale eſt admixtum? Ens autem non opponitur enti, ſed non enti. Adeoque cùm idea entis imperfecti compoſita ſit ex ente & non ente, hic aliqua eſt contradictio potiùs, quàm in ente ſummè perfecto; quod nihil aliud eſt, quàm ens purum, ſimplex, & abſolutum.

Venio ad demonſtrationem tuam, qua, poſito ens neceſſarium non involvere contradictionem, Deum exſiſtere, probare conaris. Quæ profectò particula eſt demonſtrationis Carteſianæ. Ita argumentaris:

Deus eſt ens neceſſarium.
(ex definitione)
Ens neceſſarium eſt neceſſarium.
(eſt propoſitio identica)
Omne neceſſarium exſiſtit.
(eſt axioma)
Ergò Deus exſiſtit.

Redigatur hæc argumentatio in ſyllogiſmos:

Ens neceſſarium exſiſtit.
Deus eſt ens neceſſarium.
Ergò Deus exſiſtit.

Major probatur:

Omne neceſſarium exſiſtit.
Ens neceſſarium eſt neceſſarium.
Ergò ens neceſſarium exſiſtit.

Hoc proſyllogiſmo planè non eſt opus, quia major ejus & concluſio aut unum & idem ſunt, aut certè æquè notæ. Cui enim non æquè notum eſſet, ens neceſſarium exſiſtere, quàm, neceſſarium exſiſtere. Unum enim eſt aliud. Interim duo ſyllogiſmi faciendi ſunt, quia quatuor pronuntiatis includere voluiſti, quod tribus potueras.

Veniamus itaque ad principalem ſyllogiſmum, cujus major hæc eſt: ens neceſſarium exſiſtit. Ens neceſſarium poteſt dupliciter intelligi: primò,

mò, quod neceſſariò exſiſtit; deinde, quod neceſſariam exſiſtentiam in conceptu ſuo involvit. Si priori modo acciperetur, totus ille ſyllogiſmus inanem petitionem principii contineret hoc modo:

Ens, quod neceſſariò exſiſtit, exſiſtit.
Deus eſt ens, quod neceſſariò exſiſtit.
Ergò Deus exſiſtit.

Nam minor ipſa concluſio eſt, cujus probatio deſideratur. Quodſi ens neceſſarium poſteriori modo accipiatur, quemadmodum illud a C. T. accipi non dubito, argumentatio hæc eſt:

Ens illud, quod in ſuo conceptu neceſſariam exſiſtentiam involvit, exſiſtit.
Deus eſt ens, quod in ſuo conceptu neceſſariam exſiſtentiam involvit.
Ergò Deus exſiſtit.

Hoc eſt ipſiſſimum *Carteſii* argumentum. Sed & major & minor probandæ ſunt. Quod a C. T. factum non eſt. Majorem, quam dicis eſſe axioma, nec eſt, probat *Carteſius* ex hoc principio generali, quòd omne illud, quod in idea alicujus rei clarè & diſtinctè continetur, de illa re verè affirmetur. Adeoque de ente, in cujus conceptu includitur neceſſaria exſiſtentia, verè etiam affirmatur, quòd exſiſtat.

Minor probatur ex illo principio, quòd exſiſtentia neceſſaria & actualis eſt perfectio, immò omnium perfectionum fundamentum. Nam ſi quis Deum eſſe dicat ens neceſſarium, ſeu ens, quod in conceptu ſuo neceſſariam exſiſtentiam involvat, quemadmodum T. C. facit, ei, licèt verum dicat, tamen, ſi cum atheo res eſſet, ſtatim illud objiceretur, peti illud, quod eſt in principio. Hoc enim eſt in quæſtione, an in conceptu Dei neceſſaria exſiſtentia involvatur? Quod utique, tamquam obſcurum & dubium, adhuc probandum eſt. Aliunde autem probari non poteſt, niſi quòd omnes Deum concipiunt ut ens perfectiſſimum. Exſiſtentia autem non ſolùm eſt perfectio, ſed baſis & fundamentum omnis perfectionis, ita quidem, ut negata exſiſtentia, negetur etiam perfectio. Habes, vir nobiliſſime, quæ ingenioſiſſimis objectionibus tuis reponi poſſe putavi. Quæ ideò quidem adduxi, ut occaſionem tibi præbeam, errantem me in viam revocandi, totamque hanc materiam uberiùs explicandi: quo nihil gratius accidere poteſt nobiliſſimæ amplitudinis tuæ obſervantiſſimo A. E. *E cœnobio Luccenſi d. 9. April.* 1677.

(4.)

LEIBNITIUS ECKHARDO.

LEIBNITII *objectiones ad* ECKHARDI *demonſtrationem exſiſtentiæ Dei Carteſianam.*

EPiſtolam tuam legi lubentiſſimè tui pariter & argumenti cauſſa. Nam argumentum ſcio eſſe grave; te verò aptum ad accuratè tractandum, quæ ſuſcepiſti. Reſpondere volui maturè, ut quàm ſæpiſſimè beneficio fruerer notitiæ tuæ, quam reverendo Abbati noſtro debeo. Heri enim primùm, id eſt tertiâ Paſchatos feriâ, litteræ tuæ mihi redditæ ſunt. Duo moneo ante omnia: primum, non me negare nonnulla eſſe vera & demonſtrabilia, quæ tantùm a *Carteſio* demonſtrata fuiſſe negavi; alterum, non me attuliſſe novam demonſtrationem in ea, quam tibi miſi, ſcheda, ſed voluiſſe purgare Carteſianam ab inutili & dubitationibus obnoxia perfectionis mentione. Nunc ad litteras tuas accedo, & illam, cui inſtitiſti, ratiocinandi formam perſequar. Ita argumentaris:

Quod in idea Dei continetur, de Deo verè affirmari poteſt,
* (quia quidquid in alicujus idea continetur, de eo verè affirmari poteſt.)
Exſiſtentia actualis & neceſſaria continetur in idea Dei.
* (quia exſiſtentia eſt perfectio.)
Ergò eſſentia actualis & neceſſaria de Deo verè affirmari poteſt.

Conceſſa majore minor probatur hoc modo:

In qua idea continentur omnes perfectiones, in ea continetur exſiſtentia.
In idea Dei continentur omnes perfectiones.
Ergò in idea Dei continetur exſiſtentia.

Majorem pariter & minorem ex principiis Carteſianis demonſtrari petebam. Major oſtenſa erit, quando oſtenſum erit, ens, continens omnes perfectiones, non implicare contradictionem. Tale enim ens nihil prohibebit appellari Deum. Ad probandum, exſiſtentiam eſſe perfectionem, definiendum erat, quid ſit perfectio: quod, niſi fallor, ne nunc quidem præſtitiſti. Ais, perfectum ab ente non differre, niſi ratione. Dicendum ergò erat, quanam ratione differret: niſi id velis ex tua ratiocinatione colligi hoc modo:

Quod præſtat, id eſt perfectius;
Præſtat autem eſſe, quàm non eſſe;
Ergò eſſe eſt perfectius.

Sed vellem ſcire, quid hoc ſit dicere: *præſtat.* An melius ſive gratius eſt? Sed tunc concedo, quod dixiſti, de illis tantùm, quorum exſiſtentiam

tiam alia bona comitantur. Quidam enim tot malis obruuntur, ut non eſſe malint, quàm ſic eſſe. Non ergò eſſe, ſed benè eſſe, perfectio erit; hoc quidem ſenſu. Niſi tuum *præſtat* aliter explices. Cùm in colloquio videreris dicere, id eſſe perfectum, quod ſit purè poſitivum; objeci exemplum doloris. Reſpondes in tua epiſtola: dolor eſt perfectio, quatenùs ſenſum & cogitationem involvit; quia melius & perfectius eſt cogitare, quàm non cogitare; ſed eſt imperfectio, quatenùs involvit negationem alicujus rei, quam ſi haberemus, melius nobis futurum eſſet, quàm cùm dolemus. Cur melius, niſi quia gratius? Optimè! Concedo ergò, hoc ſenſu dolorem non eſſe perfectionem; ſed non video, cur exſiſtentia ſit perfectio. Unum tamen videtur pro te reſponderi poſſe. Nempe id cenſendum eſſe perfectius, ſive melius, quod per ſe & ceteris extra ſenſum paribus melius ac perfectius eſt. Talis autem videtur utique exſiſtentia. Tametſi enim dubium ſit, an non ſit melius, non exſiſtere, quàm in ſumma infelicitate exſiſtere; fatendum eſt tamen, melius eſſe exſiſtere in ſtatu indifferenti, felicitatis atque infelicitatis experte, ſiquidem in eo, qui optandi capax eſt, talis fingi poteſt, quàm non exſiſtere. Non tamen puto, lapidibus ex. gr. eſſe melius, quòd exſiſtunt; ſed nobis, ob eorum uſum. Feles exſiſtere, ipſis felibus apud Carteſianos indifferens eſſe debet; nobis id eſt melius; at muribus, ſi boni malique capaces fingantur, pejus. Cervos exſiſtere, id ipſis indifferens apud vos; dominis melius; ruſticis pejus, quàm ſi non exſiſterent. Videtur ergò exſiſtentia non eſſe per ſe melior non-exſiſtentia. Et ita concedam exſiſtentiam eſſe perfectionem, ſive, nullâ aliarum vitæ circumſtantiarum ratione habitâ melius eſſe exſiſtere, quàm non exſiſtere. *Melius* autem interpretor, cum ratione optabilius. Niſi id aliter explicare malis: quo caſu mihi circumſpiciendum erit denuò, an tunc quoque concedendum ſit, quod nunc concedo, exſiſtentiam eſſe perfectionem; ſed hoc ſenſu, quem dixi, conceſſo, exſiſtentiam eſſe perfectionem, oſtendendum eſt, ens, continens omnes perfectiones, (id eſt, hoc quidem ſenſu, ens cum ratione optabiliſſimum) non implicare contradictionem. Æquiſſimum eſſe dicis poſtulatum meum, oſtendendi, ens perfectiſſimum non implicare contradictionem, idque aggrederis hoc modo:

Quidquid non eſt compoſitum ex duobus conceptibus ſe tollentibus, non implicat contradictionem.

Ens perfectiſſimum non eſt compoſitum ex duobus conceptibus ſe tollentibus.

Ergo ens perfectiſſimum non implicat contradictionem.

Conceſſa majore, probas minorem hoc modo:

Conceptus entis non participantis de nonente eſt ſimpliciſſimus, ſeu non compoſitus.

Conceptus entis perfectiſſimi eſt conceptus entis non participantis de nonente.

Ergò conceptus entis perfectiſſimi eſt ſimpliciſſimus.

In hoc argumento dubitari poteſt de majore & minore. Quod ne temerè dixiſſe videar, ita explicabo animi ſententiam. Conceptus entis non participantis de non ente duo involvit: unum, *eſſe*; alterum, *nihil non eſſe*, ſeu, omnia eſſe. Quare non poſſum concedere, eſſe ſimpliciſſimum. Compoſitus eſt enim ex his duobus; quæ an ſint compatibilia, magna quæſtio eſt. Impoſſibile enim eſſe videtur, dari ens, quod ſit omnia. De tali enim ente dici poterit, illud eſſe *te*; item, illud eſſe *me*: quod puto non admittes.

Minorem quoque concedere non poſſum. Neque enim video, cur neceſſe ſit, ens perfectiſſimum non participare de non ente, ſeu, (ne in vocabulis ludamus), nihil non eſſe, præſertim, ſi eam, quam ex tuis verbis collegiſſe viſus ſum, perfectionis definitionem ſequamur, ut perfectiſſimum ſit optimum, ſeu cum ratione optabiliſſimum.

Videor mihi nullam ex tuis rationibus ſine reſponſo dimiſiſſe. Venio ad ea, quæ meo argumento objicis. Scripſeram tibi, purgari poſſe argumentum *Carteſii* a mentione perfectionis, & poſſe reduci ad argumentum illud, quod exſtat jam apud ſcholaſticos, ſcilicet:

Ens, quod involvit exſiſtentiam, ſive ens neceſſarium exſiſtit: quia omne ens, involvens exſiſtentiam ſive ens neceſſarium utique neceſſarium eſt, ſeu neceſſariò exſiſtit; quod autem neceſſarium eſt, ſeu neceſſario exſiſtit, id utique exſiſtit.

Deus eſt ens neceſſarium, ſeu ens exſiſtentiam involvens.

Ergò Deus exſiſtit.

Majorem probavi in parentheſi; minor probatur ex definitione Dei, ſupponendo ſcilicet, concipi poſſe ens neceſſarium. Tunc enim nihil prohibebit, tale ens appellari Deum. Reſpondes, hanc ratiocinationem eſſe particulam ratiocinationis *Carteſii*. Concedo hoc ipſum. Dixeram, rationem *Carteſii* ablatâ inutili perfectionis mentione reduci ad ratiocinationem veterum. Propoſitio, qua uſus ſum, *ens neceſſarium eſt neceſſarium*, non eſt planè inutilis; quemadmodum ad probandum, quòd in omni triangulo æquilatero tres anguli ſint æquales duobus rectis, neceſſariò argumentandum eſt hoc aut ſimili modo: Omne triangulum habet tres angulos æquales duobus rectis; Triangulum æquilaterum eſt triangulum; Ergò &c. Et tali ratiocinandi modo conſtant omnes ſubſumtiones; tametſi fatear, poſſe omitti. Negas, propoſitionem, *omne neceſſarium exſiſtit*, eſſe axioma. Putabam eſſe; ſed probari facile eſt. Nam per neceſſarium intelligo, quod neceſſariò exſiſtit. Tale autem, ni fallor, exſiſtit. Res ergò huc redit: ens, neceſſariam habens exſiſtentiam, exſiſtit. (Eſt identica.) Deus eſt tale ens, (ex definitione Dei, modò ſupponatur, hunc concep-

tum

tum non implicare contradictionem. Hoc enim poſito, utique ens a ſe, ſeu tale, quod exſiſtentiam ſuæ eſſentiæ neceſſitati debet, poteſt appellari Deus). Ergò Deus exſiſtit. Tantùm ergò probandum eſſe, tale ens a ſe non implicare: & augeri difficultatem probandi dixi ex eo, quòd dubitare poterat aliquis, an ex eſſentia poſſit ſequi exſiſtentia, ſive an poſſit concipi exſiſtentia (actualem ſemper intelligo) velut portio aut ſpecies eſſentiæ, ſive ut qualitas eſſentialis, & an, ut extenſio eſt quædam eſſentialis qualitas corporis, ita exſiſtentia poſſit intelligi eſſentialis qualitas alicujus entis, nempe Dei. Et ratio dubitandi erat, quòd eſſentia eſt poſſibilitas; exſiſtentia verò actus. Fateor, hanc rationem dubitandi non eſſe firmiſſimam. Concedo tamen illud quoque, imperfectum eſſe argumentum noſtrum, antequàm demonſtretur, ens, continens exſiſtentiam vi ſuæ eſſentiæ, non implicare contradictionem. Habes, vir clariſſime, quæ hactenùs in *Carteſii* tuoque argumento deſideravi: quæ ſi ſuppleveris, reſponſo gratiſſimo plurimum me tibi obſtrinxeris. Vale faveque.

(5.)

ECKHARDUS LEIBNITIO.

Litteris tuis reſponſum aliquod paravi, quod a reduce reverendiſſimo Abbate Luccenſi, ad quem illud jam antè miſeram, accipies. Prolixior fortaſsè fui, quàm ſat erat. Sed quoniam a primis principiis omnia arceſſere, omneſque, quibus uſus ſum, terminos definire, volui, brevior eſſe non potui. Si ex principiis ſolo naturæ lumine cognitis demonſtrari poteſt exſiſtentia Dei; non puto alio modo illud fieri poſſe, quàm quo id facere tentavi. Sed tuam ea ſuper re ſententiam audire geſtio. Vale, vir nobiliſſime, faveque nobiliſſ. amplitud. tuæ obſequentiſſimo A. E. *Rintelii d.* 7. *Jan.* 1677.

(6.)

ECKHARDUS LEIBNITIO.

ARN. ECKHARDUS *idem argumentum intentiore opera totiſque viribus tractat.*

Quàm gratæ mihi fuerint litteræ tuæ, vel inde cognoſcere poteris, quòd, aliis quibuſdam occupationibus in præſens diſtrictus a reverendiſſ. Abbate Luccenſi petii, daret mihi hanc veniam, ut una atque altera angaria nihil ad ipſum ſcribere liceret. Sed ſimul ac tuas legi, nullam moram interponendam putavi, quin e veſtigio reſponſionem quam-

dam molirer. Nullum enim in omni philoſophia argumentum gravius, neque tractatu dignius eſt, quàm cùm de exſiſtentia ſummi Numinis quæritur. Et cùm firmiter mihi perſuaſum habeam, illas rationes, quibus *Carteſius* Deum exſiſtere probavit, cuivis demonſtrationi mathematicæ æquiparandas (1), omnique exceptione majores eſſe, nulla mihi opera gravis erit, qua & *Carteſii* ſententiam, ſicubi obſcurior videatur, explicare, & ad ea, quæ in contrarium afferuntur, reſpondere poſſim.

Epiſtola tua tres habet partes. Prima in anteceſſum quædam monet, ſecunda continet reſponſionem ad ea, quæ pro tuenda demonſtratione Carteſiana adduxi: & tertia denique eorum, quæ in argumento tuo, quod in locum Carteſianæ demonſtrationis ſubſtituis, deſideravi, ventilationem exhibet. De ſingulis agam. Incipiam autem a ſecundo. Nam quid de primo ſentiendum ſit, poſtea videbitur.

In argumento Carteſiano dubia tibi viſa fuit, & adhuc videtur, & major & minor proſyllogiſmi. Majorem oſtenſam fore dicis, quando oſtenſum erit, *exſiſtentiam eſſe perfectionem*; minorem verò, quando oſtenſum erit, *ens, continens omnes perfectiones, non implicare contradictionem.* Tale enim ens nihil prohibebit appellari Deum.

Putabam ſatis rectè utrumque me expediviſſe. Sed quoniam res tibi adhuc dubia videtur, operam dabo, ut mentem meam tam dilucidè explicem, ut nihil hac in parte deſiderari ampliùs poſſit. Quæritur itaque primò: *an & qua ratione exſiſtentia ſit perfectio?* Ais, ad probandum, exſiſtentiam eſſe perfectionem, definiendum fuiſſe, quid ſit perfectio; quod ne nunc quidem me præſtitiſſe putas. At ego ſatis apertè mihi declaraſſe videor, quid nomine perfectionis intelligerem; *perfecti* (2) vocabulum me non aliter accipere dicebam, (hæc verba mea ſunt), ac omnes in univerſum philoſophi, qui perfectum ab ente non diſtinguunt, niſi ſola ratione. Ens enim & poſitivum opponitur non enti. Et quoniam ens verum & realem conceptum involvit, quem non ens non habet, præſtatque aliquid eſſe, quàm nihil eſſe, ideò omne ens dicitur perfectum. In quo omnes conveniunt. Cùm dico, perfectum ab ente non differre, niſi ſola ratione, dicendum eſſe ais, quanam ratione differat. Et poſtquàm reſponſionem colligis ex ratiocinatione mea hoc modo: *quod præſtat, id eſt perfectius*: præſtat autem eſſe, quàm non eſſe; ergò eſſe eſt perfectius: iterum ſcire vis, quid hoc ſit dicere *præſtat*? An melius ſeu gratius eſt? Fingis ſine dubio, te non intelligere, quid nomine perfecti intelligam; item quid hoc ſit dicere, *præſtat*, ut ſenſa mentis meæ, quæ fortaſſe non ſatis clarè explicui, (hic & aliter mihi videbatur), manifeſtiùs

LEIBNITII NOTÆ.

(1) Immò ſupplendum in ea eſt potiſſimum, quod etiam demonſtrationi ſcholaſticorum ſimili deeſt demonſtrandum, ſcilicet quòd non implicet.

(2) Perfectio mihi eſt quantitas ſeu gradus realitatis.

ſtiùs pandam. Ideoque morem geram, totamque rem, omneſque terminos, quibus utor, ita explicare conabor, ut ne dubitationi locus ampliùs relinquatur.

Non poſſum ulla de re judicium ferre, niſi notionem ejus, quem *conceptum* philoſophi vocant, habeam; neque certum judicium, niſi conceptum clarum & diſtinctum habeam. Quia, quidquid diſtinctè non percipitur, illud, licet menti noſtræ obverſetur, tamen, quid in re ipſa ſit, non intelligitur. Simplices illas notiones rerum, quas in mente noſtra habemus, exſiſtentiam quamdam involvunt; ſi non actualem, ſaltem poſſibilem. Nullum enim aliud indicium habeo, quod certus eſſe poſſim, aliquid exſiſtere, vel non exſiſtere, exſiſtere poſſe vel non exſiſtere poſſe, niſi illud ex notionibus rerum, quas habeo, colligam. Res enim ipſæ non ſunt in mea mente, ſed illarum notiones. Ideoque cujus rei ſimplicem notionem habeo, illud aut exſiſtere, aut ſaltem exſiſtere poſſe, judico. Simplicem notionem voco, quæ non eſt compoſita ex duabus vel pluribus notionibus ſeſe mutuo tollentibus. Ergo quidquid nullam habere poteſt notionem ſeu poſitivum conceptum, illud etiam non exſiſtere poſſe judico. Item quidquid notionem ſeu conceptum contradictorium involvit, illud etiam exſiſtere nequit.

Porrò omne illud, quod exſiſtit, aut exſiſtere poteſt, *ens* voco. Quidquid autem neque exſiſtit, neque exſiſtere poteſt, *non ens*. Ens, reale (3), poſitivum, ſeu ponere aliquid in re, & exſiſtere poſſe, unum idemque ſignificant. Illud, quod magis a non ente recedit, quàm alterum, dicitur plus realitatis continere, ſeu plus in re ponere, quàm alterum. Itaque quidquid non ſolùm exſiſtere poteſt, ſed etiam actu exſiſtit (4), plus veritatis habet eo, quod non exſiſtit; exſiſtere tamen poteſt. Illud enim plus a non ente recedit, quàm hoc. Non ens enim duo involvit; unum, non exſiſtere; alterum, non etiam exſiſtere poſſe. Quod ergò tantùm exſiſtere poteſt, non autem actu exſiſtit, illud ab una parte de non ente participat, quatenus nimirum non exſiſtit. Ita triangulum exſiſtens (5) plus realitatis habet, ſeu plus in re ponit, quàm idem triangulum, quod exſiſtere poteſt, non autem exſiſtit: quia illud in utroque, nempe, quod & exſiſtere poteſt & exſiſtit a non ente recedit; hoc autem ab una tantùm parte recedit, nempe quatenùs exſiſtere poteſt; ab altera de non ente participat, ſcilicet quatenùs non exſiſtit. Ita homo, qui exactam Matheſeos cognitionem actu habet, hac in parte plus realitatis habet, quàm is, qui nihil rerum mathematicarum cognoſcit, noſſe tamen poteſt; vel eo etiam, qui pauciora, quàm ipſe, novit. Et ſic de ceteris.

(3) Realitas eſt prædicatum poſitivum.

(4) Exiſtentia eſt quædam realitas.

(5) Exiſtens plus habet realitatis, quàm non exſiſtens. Quæritur, an plus ſit realitatis in idea ſeu conceptu lapidis exſiſtentis, quàm in conceptu hominis non exſiſtentis.

ceteris. Omnem realitatem habere aliquid dicitur vel in certo genere rerum, vel ſimpliciter. Ita triangulum, habens omnes realitates, quæ ex eſſentia trianguli fluunt, uti ſunt tres anguli duobus rectis æquales: duo latera reliquo majora: majus latus majori angulo ſubtenſum, &c. omnes habet realitates in certo genere rerum, id eſt, omnes realitates, quæ triangulo competunt, quatenùs eſt triangulum. Eodem modo Mathematicus, habens cognitionem omnium rerum mathematicarum, habet omnes realitates in certo genere rerum, id eſt, omnes realitates, quæ Mathematico competunt, quatenùs eſt Mathematicus (6). Atque quod hoc modo omnes realitates habet, illud non ſtatim omnes realitates habet ſimpliciter: poteſt enim de cetero eſſe maximè non reale, vel de non ente maximè participare. Ita triangulo, omnes realitates trianguli habenti, innumeræ aliæ realitates deſunt. Eodem modo & Mathematico, omnes realitates, quæ in Mathematico qua tali intelligi poſſunt, habenti, innumeræ itidem aliæ realitates deeſſe poſſunt (7), ita ut in ceteris rebus vel nihil, vel parum cognoſcat, & præterea de plurimis aliis non realitatibus participet. Ens ſimpliciter habens omnes realitates illud erit, quidquid ſimpliciter de non ente recedit, ſeu, quidquid nullo modo de non ente participat. Quod quale ſit, & an contradictionem involvat, nunc inveſtigamus.

Perfectum ab ente non diſtingui, dixi, niſi ſolâ ratione. Quod ita explico. Quidquid aliquid in re ponit, ſeu, quidquid aut exſiſtit, aut exſiſtere poteſt, ens dicitur. Idem etiam dicitur perfectum. Nam ſi quæras, quid ſit ens? reſpondeo, quòd aliquid in re ponit: quid perfectum (8)? itidem quidquid aliquid in re ponit. Diſtinctio autem rationis, quam hìc eſſe dico, in eo poſita eſt, quòd, dum ens concipio, illud concipio, aut concipere ſaltem poſſum, nullâ habitâ ratione ejus oppoſiti, quod eſt non ens (9): intelligendo ſcilicet, ens illud dici, quidquid aliquid in re ponit, ſeu quod eſt poſitivum & reale: ſeu, quod exſiſtit, aut exſiſtere ſaltem poteſt, nullo habito reſpectu ad non ens, ſeu ad id, quod neque exſiſtit, neque exſiſtere poteſt. Quando autem idem ens concipio ut perfectum, concipio illud quodam modo cum reſpectu ad oppoſitum ejus, quod eſt non ens, comparando ſcilicet illud, quod exſiſtit, aut exſiſtere poteſt,

(6) Differunt exempla Mathematici & trianguli, quin nullum datur triangulum, cui non competant omnes illæ realitates; ideò non video, quomodo triangulum poſſet hoc ſenſu dici perfectum vel imperfectum. Secùs eſt in Mathematicis.

(7) Ita Deo etiam non competunt realitates ſeu perfectiones trianguli ſenſu ſuprà dicto; ergò hoc ſenſu non haberet omnes realitates, ſeu non eſſet perfectiſſimus.

(8) Satius videtur dicere, *perfectionem* eſſe gradum realitatis ſeu eſſentiæ; uti *intenſio* eſt gradus qualitatis, & *potentia* gradus actionis.

(9) Conciliari facilè hoc poteſt cum mea explicatione, dum ſcilicet ens vel res eſt abſolutum, perfecti notio eſt comparativa cum non ente, aut minori ente, quod non enti magis accedit.

poteſt, cum eo, quod neque exſiſtit, neque exſiſtere poteſt: illudque huic præfero. Atque hac ratione omne ens dico perfectum; non ens verò non perfectum. Itaque nunc patere puto, quo pacto ens & perfectum cum re idem ſint, cogitatione tamen diſtinguantur & quænam ſit diſtinctio illa rationis, quam hic eſſe dixi.

Bonum dicitur dupliciter, vel in ſe & ſua natura, vel ratione alterius. Prior acceptio eſt hujus loci; poſterior non item. Bonum in ſe & ſua natura a perfecto non differt, ne cogitatione quidem (10). Ergo quæ de perfecto dixi, eadem de bono dicta ſunto: intelligendo ſcilicet, quemadmodum omne ens eſſe bonum, & omne bonum ens. Sed quemadmodum ens & perfectum cogitatione aliquo modo diſtinguuntur, quatenus ſcilicet ens comparando cum ejus oppoſito non ente, & intelligendo, ens aliquid in re ponere, contraque non ens nihil in re ponere, hac ratione ens perfectum eſſe dico, non ens verò non perfectum; ita eodem prorsùs modo ens bonum dico, non ens verò non bonum.

Melius & perfectius idem hic eſt, quod plus realitatis habere; quod quid ſit, jam explicatum eſt. Optimum & perfectiſſimum, quidquid omnes realitates habet, idque vel in certo genere rerum, vel ſimpliciter: quod itidem, quo modo ſe habeat, dictum jam eſt (11).

Bonum ratione alterius dicitur, quod alteri eſt conveniens, aut ſaltem ita videtur. Tale eſt, quod eſt vel gratum, vel cum ratione optabile, vel utile, vel quocumque demum modo alterum alteri congruens, aut commodum dici aut fingi poteſt. Quæ acceptio a priori illa toto cœlo differt, atque huc planè non pertinet. Quis enim negaret, multa exſiſtere, quæ aliis non ſunt convenientia, hoc eſt, neque grata, neque cum ratione optabilia; neque utilia etiam, vel alio modo commoda aut congruentia, quæ tamen ſunt vera entia. Ergò cùm omne ens bonum dicitur, ſumitur vocabulum boni priori ſenſu. Nam in poſteriori acceptione multa entia ſunt non bona, quatenùs ſcilicet alia aliis non ſunt convenientia.

Quæritur jam, an exſiſtentia ſit perfectio? Omninò. Primò exſiſtentia poſſibilis eſt perfectio, quia ab ente poſſibili non differt (12). Deinde exſiſtentia actualis eſt perfectio, quia ab ente actuali etiam non differt. Denique exſiſtentia actualis perfectior eſt poſſibili, quia ens actuale perfectius eſt poſſibili: quæ omnia jam ſunt explicata.

Poſtquàm ſententiam meam ita expoſui, ad ea, quæ in contrarium allata a te ſunt, jam reſpondere conabor. Et ne quid hac in parte prætermittam, omnia, quæ dicis, verbotenus citabo.

 1. *Ad*

(10) Bonum metaphyſicè ſumtum, & perfectum, idem.

(11) Immò non eſt ſatis explicatum, quomodo intelligi poſſit, omnes realitates in unum ſubjectum conjungi.

(12) Quando de exſiſtentia loquor, loquor de actuali; opponitur enim eſſentiæ, ſeu poſſibilitati exſiſtendi.

1. *Ad probandum, exſiſtentiam eſſe perfectionem, definiendum erat, quid ſit perfectio: quod, ni fallor, ne nunc quidem præſtitiſti.*

At ego mihi id abundè præſtitiſſe videor, dicendo, *me perfectum ab ente non diſtinguere*, & quæ ſequuntur. Ergò cùm ens eſſe dicebam, quod eſt poſitivum & reale, idem dicebam eſſe perfectum. Sed quidquid ſit, ſi obſcurior fortaſſe fui, quàm par erat, nunc mentem meam ſatis dilucidè me explicaſſe arbitror.

2. *Ais, perfectum ab ente non differre, niſi ratione: dicendum ergò erat, quanam ratione differret?*

Ad quæſtionem ipſemet ſatis benè reſpondes.

3. *Niſi id velis ex tua ratiocinatione colligi hoc modo: quod præſtat, id eſt perfectius: præſtat autem eſſe, quàm non eſſe; ergò eſſe eſt perfectius.*

Omninò rectè colligis.

4. *Sed vellem ſcire, quid hoc ſit dicere* præſtat?

Illud clarum eſſe putabam. Sed ſi id non fuit, mens mea jam clara erit ex iis, quæ de bono, meliori, optimo, de perfecto, perfectiori, perfectiſſimo modo diſſerui.

5. *An, quod melius ſeu gratius eſt?*

Omninò, quod eſt *melius*: ſumta hac voce in eo ſenſu, quo bonum aliquid in ſe & ſua natura dicitur. Quod quid ſit, jam explicui. Quod eſt *gratius*? Minimè. Nam gratum eſſe pertinet ad illud bonorum genus, quod ratione alterius tale dicitur, quodque huc non pertinere dixi.

6. *Sed tunc concedo, quod dixiſti, de illis tantùm, quorum exſiſtentiam alia bona comitantúr. Quidam enim tot malis obruuntur, ut non eſſe malint, quàm ſic eſſe: non ergò eſſe, ſed bene eſſe, perfectio erit, hoc quidem ſenſu.*

Hoc totum non eſt contra me. Mihi enim melius eſſe non idem eſt, quod eſſe gratius, ſed quod habet plus realitatis, quàm alterum, ſeu, quod magis a non ente, quàm alterum, recedit. Illud tantùm ex occaſione hic moneo, qui non exſiſtere, quàm exſiſtere malint, his exſiſtentiam ingratam non eſſe, ſed non exſiſtentiam, quam in ſe agnoſcunt. Hoc eſt, quoniam intelligunt, illam entitatem, illud poſitivum & reale, quod habent, tam tenue eſſe, tam modicum, tamque eximium, ut multo plus de non ente, quàm ente participet (13); ideo malunt illud, quidquid habent entitatis, amittere, quàm illud tot imperfectionibus, id eſt, non entibus admixtum poſſidere. Ceterum ſi perfectiones (14), id eſt, entitates illæ, quibus ſe deſtitutos adhuc agnoſcunt, & quas vehementer deſiderant, ipſis contingerent; nemo eſſet, qui ſe exſiſtere non mallet, quàm non exſiſtere. Eſt autem nonentitas illa, ob quam quidam

(13) Immò non tam privatio quarumdam realitatum, quàm poſitio realitatum ingratarum, nempe dolorum, ejus rei cauſſa eſt.

(14) Metaphyſico illo ſenſu perfectionis plus eſt perfectionis in dolente, quam in homine neque dolente, neque gaudente, ſed ſtupente aut indifferente.

dam non exſiſtere, quàm exſiſtere malunt, infirmitas potentiæ voluntati noſtræ adjunctæ. Sicut mox explicabitur, ubi de dolore agetur.

7. *Niſi illud tuum* præſtat *aliter explices.*

Id ego jam feci. Præſtat enim, quod eſt melius & perfectius. Quod quid ſit, patet ex dictis.

8. *Cùm in colloquio videreris dicere id perfectum, quod ſit purè poſitivum:* (hic omninò intelligis, quomodo vocem perfecti acceptam velim. Ideoque cùm vocabulum perfecti in tota tua epiſtola in alio ſenſu ſemper uſurpaveris, hunc verò ſenſum prorſus omiſeris, dixi, te fingere, quaſi id non intelligas, ut me clariùs explicarem) *objeci exemplum doloris, qui non magis eſt privatio voluptatis, quàm voluptas doloris.*

Si accuratè loqui velimus, utendo ſcilicet terminis, quemadmodum communiter iis utuntur philoſophi, neque voluptas doloris, neque hic illius privatio (15) rectè dicetur, non magis, quàm homo cœcus hominis videntis, aut hic illius privatio dici poteſt. Privatio enim ſemper eſt non ens, atque a pura negatione non differt, niſi quatenùs habitudinem involvit ad ſubjectum capax. Voluptas verò & dolor ſunt res poſitivæ; licèt dolor aliquid ſeu privationis, ſeu negationis, non minùs quàm homo cœcus, importet.

9. *Reſpondes in tua epiſtola: dolor eſt perfectio, quatenùs ſenſum & cogitationem involvit, quia melius & perfectius eſt cogitare, quàm non cogitare; ſed eſt imperfectio, quatenus involvit negationem alicujus rei, quam ſi haberemus, melius nobis futurum eſſet, quàm nunc eſt, cùm dolemus. Cur melius? niſi quia gratius. Optimè. Concedo ergò, hoc ſenſu dolorem non eſſe perfectionem, ſed non video, cur exſiſtentia ſit perfectio.*

Dolor imperfectio eſt, non ſolùm quia ingratus eſt, ſed etiam quia negationem alicujus rei involvit, ſine qua negatione ne quidem ingratus eſſet. Quod ita explico. In dolore duo inſunt: primo, ſenſus aliquis ſeu cogitatio. Nemo enim dolet, aut animo ægro eſt, quin ſentiat & cogitet. Qui ſenſus ſeu cogitatio ſi in ſe conſideretur, præciſa illa acerbitate ſeu amaritudine, quam dolor involvit, perfectionem involvit: quia eſt ens aliquod reale ac poſitivum: ergò & perfectum, ſicut explicatum jam eſt. Deinde dolor involvit præſentiam alicujus rei, quam nolumus, aut abſentiam rei, quam volumus (16). Atque hoc modo negationem involvit, adeoque imperfectus eſt. Quæres, quam negationem? Dicam. Imbecillitatem potentiæ voluntati noſtræ adjunctæ. Si enim omnia, quæ

(15) Cæcitatem etiam vulgo appellare ſolent privationem. Non videtur ſe habere dolor ad voluptatem, ut cæcitas ad viſum, ſeu ut tenebræ ad lucem, ſed ut color unus ad alium.

(16) Eodem modo dolor involvit præſentiam rei, quam odimus, quod eſt poſitivum, aut abſentiam rei, quam non odimus, quod eſt etiam poſitivum, quæ duæ negationes præſentiæ & odii faciunt aliquid quodam modo poſitivum.

volumus, poſſemus, numquam doleremus. Sed cùm voluntas noſtra latiſſimè pateat, potentia autem eidem adjuncta valdè infirma ſit, & imbecillis, ita ut ea, quæ volumus, adducere, & quæ nolumus, abigere ſemper non poſſimus; ideò mens noſtra, hujus imbecillitatis ſibi conſcia, dolet (17). Patet ergo, quo pacto dolor de non ente participet, ſeu quo pacto acerbitas, ſeu amaritudo doloris a non ente pendeat. Non mirum itaque, quòd dolor ea ratione ſit imperfectio. Vidimus etiam, cur exſiſtentia ſit perfectio. Neque hic ullam difficultatem eſſe arbitror.

10. *Unum tamen videtur pro te reſponderi poſſe. Nempe id cenſendum eſſe perfectius, quod per ſe & ceteris extra ipſum paribus melius ac perfectius eſt. Talis autem videtur utique exſiſtentia. Tametſi enim dubium ſit, an non ſit melius non exſiſtere, quàm in ſumma infelicitate exſiſtere; fatendum eſt tamen, melius eſſe exſiſtere in ſtatu indifferenti, felicitatis atque infelicitatis experte, (ſiquidem in eo, qui optandi capax eſt, talis fingi poteſt), quàm non exſiſtere. Melius autem interpretor cum ratione optabilius. Niſi id aliter explicare malis; quo caſu mihi circumſpiciendum erit denuo, an tunc quoque concedendum ſit, quod nunc concedo quodam modo, exſiſtentiam eſſe perfectionem.*

Vocabula *bonum* & *melius* & hic & ſemper ſumis in eo ſenſu, quo aliquid dicitur bonum vel melius alteri. Qua ratione ſine dubio ſæpè melius eſt quædam entia non exſiſtere. Quod ego non nego. Quo ſenſu autem bonum & perfectum, melius & perfectius, optimum & perfectiſſimum hìc accipiendum ſit, nempe in ſenſu, qui a tuo maximè ſit diverſus, ſæpiùs jam monui. Sed vide, quæſo, quanta ſit vis evidentis veritatis! Dum enim mihi vis contradicere (18), eò redis, ut idem, quod ego, aut dicas, aut dicere neceſſe habeas. Fateris, melius eſſe exſiſtere in ſtatu indifferenti, felicitatis atque infelicitatis experte, quàm non exſiſtere, hoc eſt, ſi conſideretur exſiſtentia præciſè, non conſiderato, an id, quod exſiſtit, felix ſit vel infelix, melius eſſe exſiſtere, quàm non exſiſtere. Quæro, cur id ſit melius? Reſpondes, quia id eſt cum ratione optabilius (19). Hic aut taceas, nullamque rationem reddere te poſſe fatearis, aut idem, quod ego, dicas oportet, nempe exſiſtentiam in ſe & præcisè conſideratam ideò eſſe

(17) Optimè hæc dicuntur, & verum eſt, conſcientiam imbecillitatis efficere dolorem; non tamen omnem: quod ſic oſtendo: dolemus, quod experimur: imbecillitatem hanc experimur, quia non poſſumus abigere, quod abigere volumus. Quia jam tum id nobis eſt ingratum. Ideò ingratum aliquid ſentimus ſeu dolemus, antequàm abigere conemur, ac proinde antequàm imbecillitatis experimentum capiamus. Vera intimaque ratio doloris videtur conſiſtere in ſenſu alicujus rei confuſæ ac perturbatæ, ac harmoniâ carentis. Harmonia autem eſt unitas in multitudine; ut ſi vibrationes duorum pendulorum inter ſe ad quintum quemlibet ictum conſentiant.

(18) Tantum abeſt, ut hoc mihi contradicere volenti extortum ſit invito, ut contra potiùs profeſſus ſim, me hoc argumentum in favorem contrariæ partis afferre.

(19) Hic ipſe abit a priore definitione boni metaphyſica, & morali utitur, contra quam erat profeſſus.

eſſe cum ratione optabiliorem nón exſiſtentia (20), quia omne poſitivum in ſe & ſua natura bonum eſt; non poſitivum verò non bonum (21): ut adeò in ſe & ſua natura, nullo habito reſpectu ad voluntatem noſtram, quæ optat, aut non optat, melius ſit ponere aliquid in re, quàm non ponere. Hoc autem eſt, quod ego bonum hìc voco, nempe quod in ſe & ſua natura eſt tale; non, quod alteri eſt conveniens. Ergò cum hac ratione concedis quodam modo, exſiſtentiam eſſe perfectionem, hoc ipſum, quod ego volo, quodam modo concedis (22).

11. *Non puto tamen, lapidibus e. gr. eſſe melius quòd exſiſtunt, ſed nobis ob eorum uſum: feles exſiſtere ipſis felibus apud Carteſianos indifferens eſſe debet; nobis id eſt melius; at muribus, ſi boni malique capaces fingamus, pejus. Cervos exſiſtere ipſis indifferens apud vos, dominis melius, ruſticis pejus, quàm ſi non exſiſterent. Videtur ergò exſiſtentia non eſſe per ſe melior non exſiſtentiâ.*

Iterum τὸ *bonum* & *melius* ſumis in alio ſenſu, quàm ego, nempe pro eo, quod alteri bonum eſt, ſeu melius. Qua in re tibi planè non repugno. At omnes Metaphyſici vocabulum *boni*, quando omne ens *bonum* eſſe dicerent, in ſenſu a tuo longè diverſiſſimo, & eo quidem, quem ſæpiùs dixi, adhibent. Quod concludis, exſiſtentiam non eſſe per ſe meliorem non exſiſtentiâ, hoc ex præmiſſis inferri non poſſe arbitror, ſed illud ſolum: ergò videtur uni rei ſæpè melius eſſe, aliam rem, a qua damno & incommodo afficitur, non exſiſtere, quàm exſiſtere (23); quemadmodum ruſticis ſcilicet melius eſſet, cervos non exſiſtere, quàm exſiſtere. Quod nemo negat. Eadem ratio eſt ceterorum exemplorum. Et cogita, amabo, quam ratio tua id, quod vis, planè non concludat. Quia enim muribus malum eſt, feles exſiſtere, & ruſticis cervos, inde inferri poſſe putas: ergo exſiſtentia per ſe melior eſt non exſiſtentiâ. Nam ſi unum ſequitur, ſequitur & alterum (24).

Atque ita ſatis ſuperque jam explicatum eſſe arbitror, an & qua ratione exſiſtentia ſit perfectio. Venio ad alterum, viſurus,

utrum ens perfectiſſimum implicet contradictionem?

 Argu-

(20) Immò ratio eſt, quòd exſiſtentia ipſa per ſe jucunda eſt.

(21) Hic manifeſtè miſcentur duæ definitiones *boni*, quæ ſuprà anxiè ſunt diſtinctæ.

(22) Si optabilius (hoc enim tantùm conceſſi) ergò erit alteri (optanti) conveniens.

(23) Per ſe meliorem intelligo, id eſt, per ſe cum ratione optabiliorem; non video autem, quomodo lapidi optabilis ſit exſiſtentia.

(24) Ratiocinatio mea petita fuit ex natura optabilitatis; optabilem autem exſiſtentiam ſuam alteramque eſſe non niſi intelligenti, & modò majoribus malis non compenſetur. Ceſſante autem compenſatione, & poſito ſtatu indifferenti, optabilius erit intelligenti, exſiſtere, quàm non exſiſtere, ſed non lapidi. Ergo exſiſtentia per ſe non eſt res optabilis, ſed ejus ſenſus.

Argumentum meum, quo probavi, ens perfectiſſimum contradictionem non involvere, rectè redigis in ſyllogiſmos. Dubitas autem de majore & minore proſyllogiſmi, itaque explicas tuam ſententiam:

Conceptus entis, non participantis de non ente, duo involvit, unum eſſe, *alterum*, nihil non eſſe, ſeu omnia eſſe. *Quare non poſſum concedere, eum eſſe ſimpliciſſimum; compoſitus enim eſt ex his duobus; quæ an ſint compatibilia, magna quæſtio eſt. Impoſſibile enim videtur, dari ens, quod ſit omnia. De tali enim ente dici poterit, illud eſſe* te; *item illud eſſe* me: *quod puto non admittes.*

Si talis eſſet conceptus entis perfectiſſimi, qualem tu hìc facis, ille non ſolùm eſſet compoſitus, ſed ita etiam compoſitus, ut magis compoſitus eſſe non poſſet, innumeraque contineret ſe invicem tollentia. Vis enim conceptum entis perfectiſſimi involvere τὸ *eſſe*, deinde etiam τὸ *nihil non eſſe*, ſeu, *eſſe omnia*, illudque *eſſe omnia* ſeu *nihil non eſſe* explicas per aggregationem ſeu accumulationem omnium entium, quæ ſunt, quæque eſſe poſſunt. Ita ut ens perfectiſſimum compoſitum ſit ex omnibus entibus, quæ ſunt, quæque cogitantur. Qua ratione ens perfectiſſimum ſimul erit ſubſtantia & accidens; erit ab alio dependens, & a ſe ipſo exſiſtens; erit extenſum ſeu corpus, & non extenſum ſeu cogitans; erit vivens, & non vivens; erit homo & brutum; erit equus, erit leo, erit canis, &c. erit *Petrus*, erit *Paulus* (25), erit *tu*, erit *ego*, & ſic de ceteris. Omnia enim, quæ recenſui, entia ſunt, & innumera alia, quæ nec ego, nec quiſquam alius recenſere umquam poterit: ſunt enim indefinita. Quæ omnia ſi ens perfectiſſimum eſſe debet, quis tam hebes eſt, quin videat, talem conceptum involvere contradictionem. At ego longè alium conceptum entis perfectiſſimi mox dabo. Pergis:

Minorem quoque concedere non poſſum; neque enim video, cur neceſſe ſit, ens perfectiſſimum non participare de non ente, ſeu, ne in vocabulis ludamus, nihil non eſſe, præſertim ſi eam, quam ex tuis verbis collegiſſe viſus ſum, perfectionis definitionem ſequamur, ut perfectiſſimum ſit optimum, ſeu cum ratione optabiliſſimum.

Perfectum & bonum, ut ego intelligo, non eſt, quod eſt cum ratione optabile, ſed quod ponit aliquid in re. Quod certè ex ſe & ſuâ naturâ præferendum eſt ei, quod nihil in re ponit. Perfectiſſimum ſimpliciter & optimum ſimpliciter mihi non eſt, quod eſt cum ratione optabiliſſimum, ſed quod ita eſt ens, ut planè recedat a non ente, ſeu, ut nihil non entis participet, ſeu etiam, ut omnia in re ponat. Quid autem per ens omnia in re ponens ſeu omnino recedens a non ente, ſeu nihil non entis participans, intelligam, jam conabor explicare.

Et quidem ad probandum, ens ſimpliciter perfectiſſimum, quale deſcripſi, non involvere contradictionem, duo perficienda mihi ſunt. Primò dandus

(25) Scilicet quoad diverſas eſſentiæ ſuæ partes.

dandus eſt conceptus alicujus rei tam ſimplex, tamque planè ex pluribus conceptibus ſeſe invicem tollentibus non compoſitus, ut illum nullo modo contradictionem involvere ipſemet fateri neceſſe habeas. Deinde demonſtrandum, in conceptu illo, quem dabo, etiamſi ſit ſimpliciſſimus, nihil tamen realitatis non contineri, ſeu, rem illam, cujus eſt iſte conceptus, continere quidquid eſt realitatis vel actualis, vel poſſibilis (26). Hæc duo ſi obtinuero & perfecero, illud mihi concedas neceſſe eſt, ens illud ſimpliciter perfectiſſimum, quod Deum voco, exſiſtere. Plura enim a me non exegiſti, quàm ut probem, exſiſtentiam eſſe perfectionem, & ens perfectiſſimum non involvere contradictionem. Quæritur ergò primò:

quid & quale, ſeu de quo genere ſit illud ens,
quod ſimpliciter perfectiſſimum voco?

Quidquid de rebus ipſis ſcio aut cognoſco, hoc vi notionum ſeu conceptuum, quos de rebus iſtis habeo, me cognoſcere, jam ſuprà dixi. Itaque cùm omne id, quod realem & poſitivum conceptum involvit, ens eſſe judicem, diſtinguendi ſunt hi conceptus mei, & in certas claſſes certaque genera redigendi. Itaque quidquid concipio, illud vel reſpectum involvit ad aliquid, in quo exſiſtat, in quo ſuſtentetur, quodque afficiat, vel nullum reſpectum involvens ad aliud, quod afficiat, & in quo ſuſtentetur, per ſe exſiſtit. Illud *attributum*, hoc *ſubſtantiam* voco. E. gr. extenſio in longum, latum, & profundum, omniaque illa, quæ ex extenſione fluunt, ut ſunt diviſibilitas in partes, partium figura, ſitus, motus, & ſi quæ ſunt his ſimilia, non cogitantur ſine re extenſa, in qua tamquam in ſuſtentaculo aliquo exſiſtant, quamque afficiant. (Nihili enim nulla cogitantur attributa), ipſa verò res extenſa in longum, latum, & profundum nullam ampliùs rem reſpicit, in qua tamquam in ſuſtentaculo aliquo exſiſtat, quamque afficiat. Itaque res extenſa in longum, latum, & profundum ſubſtantia eſt: ipſa verò extenſio, omniaque illa, quæ ex extenſione fluunt, attributa ſubſtantiæ extenſæ. Eodem modo cogitatio, omneſque cogitandi modi, quales ſunt, percipere, affirmare, negare, velle, nolle &c. non cogitantur ſine re cogitante, quam afficiant, in qua exſiſtant, & a qua ſuſtententur. Ipſa verò res cogitans concipitur ut per ſe exſiſtens. Erit itaque res cogitans ſubſtantia, cujus attributa ſunt cogitatio, omneſque cogitandi modi.

Porrò, ſi nihil dicere velimus, niſi quod clarè & diſtinctè intelligamus, duarum ſubſtantiarum conceptus tantùm habemus: unius, quæ extenſa ſit in longum, latum, & profundum; alterius, quæ cogitet. Illam *corpus* ſeu *materiam*, hanc *mentem* ſeu *ſpiritum* appello (27). Nam cùm omnes

(26) Quidquid omnes continet realitates, id omnia continet attributa ſive proprietates trianguli, circuli, mentis, &c. id enim ſuprà appellavimus realitates.

(27) Tametſi nullæ aliæ ſubſtantiæ nobis ſint cognitæ, non tamen hinc ſequitur, nullas alias eſſe.

omnes ſubſtantiam dividant in duas ſpecies, ſpiritum & corpus; ſi vera eſt iſta diſtinctio, ſubſtantia cogitans ſpiritus erit; extenſa verò corpus. Plures enim ſubſtantiæ ſub cogitationem (28) non cadunt: quia nemo umquam plura concipiet attributorum genera, quàm duo, quorum illa dependent ab extenſione, hæc verò a cogitatione.

Subſtantia extenſa a ſubſtantia cogitante realiter differt (29). Quia ſubſtantiam extenſam cum omnibus ſuis attributis ab una, & ſubſtantiam cogitantem cum omnibus ſuis attributis ab altera parte dum conſidero, clarè & diſtinctè intelligo, me hanc percipere poſſe, non percepta, vel etiam planè negata illa, & contra (30). Jam verò quæcumque ſubſtantia clarè & diſtinctè percipi poteſt, non percepta, vel etiam negata altera, illa etiam realiter ab altera differt. Non enim ullum eſt evidens ſignum, quo certus eſſe poſſim, unam ſubſtantiam non eſſe aliam, niſi hoc, quòd una clarè & diſtinctè intelligi poſſit ſine altera. Immò nec aliud ſignum eſſe poteſt aut debet. Nam de rebus aliter judicare non poſſumus, niſi quatenus eas clarè & diſtinctè percipimus. Res enim ipſæ, ut dixi, in mente noſtra non exſiſtunt, ſed earum notiones & perceptiones. Unum autem eſt principium generale, quo omnis certitudo judiciorum noſtrorum nitatur, nempe hoc, *quod omne id, quod clarè & diſtinctè percipimus, a parte rei tale ſit, quale illud percipimus*. Quod principium ſi tollas, tollitur omnis certitudo; tollitur omnis cognitio. Jam argumentor:

Quidquid clarè & diſtinctè percipimus, illud a parte rei tale eſt, quale illud percipimus.

At clarè & diſtinctè percipimus ſubſtantiam cogitantem ſine extenſa, & contrà.

Ergò ſubſtantia cogitans a parte rei erit ſine extenſa, & contrà (31). Ergò realiter diſtinguuntur. Nam eſſe a parte rei ſine alio eſt realiter diſtingui. Hæc de materia (32) & mente; nunc ad alia.

Atten-

(28) Potiùs: *ſub experientiam*; quemadmodum colores a cæco non cogitantur.

(29) Nondum demonſtratum eſt a *Carteſio*, extenſionem & cogitationem non poſſe eſſe qualitates ejuſdem ſubſtantiæ.

(30) Ego clarè & diſtinctè percipio, cogitationem & extenſionem a ſe invicem differre, ſed nondum clarè & diſtinctè percipio alteram qualitatem ſine altera. Nam omnis cogitatio eſt alicujus cogitatio; objectum autem cogitationis extenſionem involvere videtur. Nam & cùm me ipſum cogito, cogito ſimul de aliqua mea actione particulari, & cùm cogito me cogitare, cogito ſimul quid cogitarim, in quo ſemper extenſio involvitur. Si verò percipi diſtinctè poſſet cogitatio ſine ulla conſideratione extenſionis, tunc ſequeretur, eorum alterum ſine altero eſſe poſſe. Fortè ergò dicendum eſt, differre quidem, ut centrum & circumferentia in circulo, ſed non ideò ſeparari poſſe, quemadmodum circulus ſine utroque eſſe non poteſt. Hæc tantùm abeſt ut pugnent cum immutabilitate, ut eam potiùs confirment ac demonſtrent.

(31) Nego minorem.

(32) Videtur materia aliud quid continere, quàm extenſionem.

Attendendo ad ſimplices illas notiones, quas in mente eſſe dixi, intelligo, habere me clarum & diſtinctum conceptum (33) ejus, quod a ſe eſt, ſeu a ſe exſiſtit; non minùs, quàm ejus, quod eſt ſeu exſiſtit ab alio. *Clarum* voco *conceptum*, qui menti meæ attendenti intimè præſens eſt & apertus; *diſtinctum*, in quo nihil eſt, quod non ſit clarum, ſeu, quod perfectè non intelligam. Quemadmodum conceptus circuli clarus eſt & diſtinctus. Clarus, quia menti attendenti intimè præſens eſt & apertus; diſtinctus, quia nihil non clarum continet, ſeu, quia omne id, quod continet, perfectè intelligo (34). Quid enim eſt circulus, niſi figura rotunda, habens punctum, a quo omnes ad peripheriam ductæ lineæ ſunt æquales? Quid in hoc conceptu eſt, quod non ſit clarum, ſeu, quod, quid ſit, perfectè non intelligatur? Eodem modo quid hoc eſt, *a ſe eſſe*, vel *exſiſtere*? A ſe eſſe vel exſiſtere dico, quidquid ſemet ipſum vi ſua, ſeu ſua ſponte ad omne id, cujus capax eſt, determinat, vel, quod idem eſt, quidquid citra ullius alterius rei concurſum a ſemet ipſo & per ſemet ipſum ad omne id, cujus capax eſt, fertur & tendit (35), hoc eſt, quod eſt purè activum, ſeu *actus purus*, quemadmodum metaphyſici id vocant. Hic conceptus non ſolùm clarus eſt, ſeu menti attendenti præſens & apertus, ſed etiam diſtinctus, hoc eſt, nihil non clarum continet, ſeu nihil habet, quod, quid ſit, non intelligam (36). Eſſe enim ſeu exſiſtere a ſe duo dicit: unum eſt, ſemet ipſum ad omne, cujus capax eſt, determinare, ſeu a ſemet ipſo & per ſemet ipſum ad omne, cujus capax eſt, tendere & ferri: alterum, ſua vi, ſua ſponte, id eſt, citra alterius rei concurſum ita tendere, ſeſe ferre & determinare. *Eſſe*

(33) Videtur mihi, nos ſæpè nimium nobis indulgere, dum affirmamus, aliquid a nobis clarè diſtincteque intelligi.

(34) Probo definitionem *diſtincti* ut *diſtinctum* ſit, cujus omnes partes ſunt claræ; ſed meliùs, ni fallor, explicandum eſt, quid ſit *clarum*; & vereor, ne res redeat *ad teſtimonium ſpiritus internum*, ut in theologicis. Præterea *Carteſius* dicit, ſe colores clarè percipere, ſed non diſtinctè. Omnis conceptus menti intimè præſens eſt. Sed quid hoc eſt: eſſe menti apertum? Eſt explicare metaphoram *clari* per metaphoram *aperti*.

(35) *A ſe eſſe* vulgo ſic definiunt, cujus eſſentia ſequitur ex ejus exſiſtentia, ſeu, quod ſuæ naturæ neceſſitate exſiſtit. Hic verò ſine neceſſitate alia quædam ad iſtam notionem adduntur, nimirum ut tale ens non tantùm ſuæ exſiſtentiæ, ſed aliorum omnium, quæ ipſi contingent umquam, cauſſa ſit; quæ notio utique magis compoſita eſt, quàm prior, ac proinde dici non poteſt, eſſe ſimplicem. Præterea theologi talem non concipiunt Deum, ut ex eo patet, quòd Deus non eſt cauſſa peccati, ideò nec cauſſa eorum, quæ ipſi occaſione peccatorum contingunt; e. gr. formatio decreti æternæ damnationis, ad quod ſe Deus non ex ſua abſolutè natura determinat, ſed determinatur ab homine gratiam accipiente aut rejiciente.

(36) Non ſequitur, omnes partes intelligo, ergò & totum, ſeu earum unionem: ut, cùm dico: velocitas maxima, clarè diſtincteque intelligo, quid ſit velocitas; item, quid ſit maximum; non tamen intelligo perfectè ex hoc ſolo, an velocitas maxima ſit poſſibilis, an non.

ergò ſeu *exſiſtere ab alio* dicitur duobus modis: primo, quòd ſemet ipſum ad id, cujus capax eſt, non determinat, ſeu, quod a ſemet ipſo & per ſemet ipſum in nullam rem fertur & tendit, ſed omnes ſuas determinationes ſimpliciter ab alio habet: id quod metaphyſici *potentiam purè paſſivam* vocant. Nullus enim alius conceptus eſt τȣ̃ *agere*, quàm ſemet ipſum in rem aliquam ferre, ſeu ſemet ipſum ad aliquid determinare (37): neque alius conceptus τȣ̃ *pati*, quàm a ſemet ipſo in nullam rem tendere & ferri, ſed determinationes ſuas ab alio accipere. Altero modo ab alio eſt, quod ſemet ipſum quidem determinat, ſeu a ſemet ipſo & per ſemet ipſum in aliquam rem fertur & tendit; non tamen ſua ſponte (38), ſua vi, ſed vi ab alio accepta, ſeu cum concurſu alterius. Atque ita quid *eſſe a ſe*, *eſſe ab alio*, non minùs diſtinctè intelligitur, quàm figura circularis: uti attendenti manifeſtiſſimum erit (39). Et ut tota res eo manifeſtior fiat, conſideremus modò, ab omnibus philoſophis dividi ens in id, quod a ſe, & quod eſt ab alio: dumque Deum quærunt, quærunt ens aliquod, quod ſit a ſe. Aut ergò nihil intelligunt, dum dicunt ens a ſe, item, ens ab alio; aut voces hæ vim aliquam habent, ſeu notionem ſibi ſubjectam (40). Illud nemo affirmaverit, niſi hoc ipſo concedere velit, ſeſe efferendo has voces, *eſſe a ſe*, *eſſe ab alio*, non aliter loqui, quàm picas aut pſittacos, ſi illi eaſdem voces pronuntiarent. Quod, credo, nemo dicet. Et quis tam durus erit, ut inficias eat (41), ſeſe ſcire, quid ſit, *eſſe ab alio*. Sed qui ſcit, quid ſit, eſſe ab alio, eum etiam noviſſe oportet, quid ſit eſſe a ſe. Unum enim ſine altero intelligi nequit.

Porrò, eſſe a ſe, &, eſſe ab alio, ſunt notiones ſimplices, ſeu nullam contradictionem involventes. Contradictionem involvere dixi, quando duæ vel plures notiones ſimplices combinantur, quorum una alteram tollit, ut quadratum triangulare. Quadratum enim eſt figura quadrilatera, triangulum trilatera, adeoque non quadrilatera. Quadratum ergò trilaterum eſt quadrilaterum non quadrilaterum. At eſſe a ſe eſt ſemet ipſum vi ſua, ſeu ſua ſponte ad omne id, cujus capax eſt, determinare. Semet ipſum determinare

minare

(37) Hæc actionis definitio videtur tantùm convenire actioni illi, quam vocant *emanationis*; quæ tamen, neſcio, an propriè loquendo ſit actio, qua ſcilicet qualitates fluunt ex forma, ſeu proprietates ex eſſentia, ſed id omne, quod vulgò actionem appellamus, involvit præterea mutationem ſaltem in patiente.

(38) Si ſemet ipſum determinat, faciet ſua ſponte. Aut ego non intelligo, quid ſit determinare ſe ipſum.

(39) Oſtendi jam exemplo maximæ velocitatis, non ſtatim aliquam notionem diſtinctè intelligi, licèt omnes ejus partes diſtinctè intelligantur, quia opus eſt, ut præterea diſtinctè intelligatur earum unio.

(40) Repono exemplum maximæ velocitatis, quod ſtatim in primo colloquio objeci. Philoſophi intelligunt aliquid, cùm dicunt ens a ſe, ſed confuſè.

(41) Si hæc ſufficienter intelligerem, ceſſaret omnis inter nos quæſtio. Talia, ut dixi, intelligimus confuſè. Quare redivimus hic in eum locum, ubi eramus ab initio collationum noſtrarum.

minare (42), hoc eſt, a ſemet ipſo vel per ſemet ipſum in aliquam rem tendere & ferri, non involvit contradictionem: hoc enim quotidie in volitionibus noſtris experimur. Quid enim aliud eſt velle, quàm ſe determinare ad alterutrum oppoſitorum, atque ita in certam rem tendere & ferri? At vi ſua ſeu ſponte, id eſt, nulla alia re concurrente, ſeſe agere, ferre, & determinare quid eſt, niſi hoc, nihil habere non activum, ſeu nihil participare, quod τῷ *agere*, ſeque determinare, hoc eſt, quod ſibi ipſi ſit contrarium? Quidquid enim cum alterius concurſu ſeſe agit, fert, & determinat, illud participat & ab activo & a paſſivo. Ab activo quidem, quatenus ſemet ipſum agit, fert, & determinat; a paſſivo, quatenus alio concurrente id facit, ſeu quatenus ſine alterius concurſu ſeſe ferre & determinare nequit (43). Atque ita certa ratione, nempe quatenùs ab alio aliquid accipit, ab altero fertur & determinatur. Ut adeò, ſi hic contradictio metuenda eſſet, illa eſſet in notione illa, qua aliquid ab alio eſſe percipitur. Sed non eſt. Poteſt enim aliquid activum & paſſivum eſſe; ſed diverſa conſideratione. Quemadmodum aliquis diverſo reſpectu doctus & indoctus eſſe poteſt. Doctus, quatenus e. gr. matheſin novit; indoctus, quatenus reliquas ſcientias ignorat. Hoc tamen evidens eſſe puto, multo ſimpliciorem eſſe conceptum τȣ̃ *eſſe a ſe*, quam τȣ̃ *eſſe ab alio.* Qui enim conceptus nihil de ſuo oppoſito participat, ille ſine dubio ſimplicior eſt illo, qui certa ratione etiam aliquid de ſuo oppoſito habet. Simpliciſſimus itaque eſt conceptus τȣ̃ *eſſe a ſe*, quia τῷ agere ſeu ſeſe determinare oppoſitum eſt τὸ non agere, ſeu non ſeſe determinare (44). Adeoque quidquid ita agit, ſeque determinat, ut nihil ſit non agens ſeu non determinans, illud eſt ſimpliciſſimum. Quibus ita explicatis ulteriùs progredior.

Eſſe, ſeu exſiſtere a ſe, verum & poſitivum, eumque non contradictorium

(42) Magna dubitatio eſt, an nos a nobis, & an non potiùs a ſpeciebus impreſſis, id eſt, ab externo ad volendum determinemur. Deinde etſi experimentum aliquod haberem determinationis ſpontaneæ, non tamen ideò ejus naturam intelligo, niſi confusè, ut albedinis. Et etſi ſatis ipſam intelligerem, nondum tamen demonſtratum haberem, dari poſſe *maximam ſpontaneitatem*, ſeu ens ſe determinans ad omnia, quemadmodum cognita velocitatis natura, non inde probatum habemus, dari poſſe maximam velocitatem.

(43) Idem eſt de velociſſimo. Nam ſumma velocitas eſt, quæ nullo modo de quiete participat, ſed ab ea maximè recedit, neque quidquam fingi poteſt, cujus reſpectu quieſcere, aut tardiùs ire intelligatur. Quemadmodum ergò non ſequitur, velocitatem ſummam eſſe poſſibilem, ita nec ſequitur, actum purum ſeu ſummam ſpontaneitatem eſſe poſſibilem.

(44) Dubito, an notio agentis ſine paſſione ſit ſimplicior, quàm agentis cum paſſione. Nam cùm cogitamus agens ſine paſſione, non tantùm in eo concipimus hæc duo, 1) actionem, 2) paſſionis negationem, (nam ſi nihil aliud intelligeremus in eo, fatendum eſſet, eſſe ſimplicius); ſed & 3) potentiam neceſſariam ad deſtruendam atque impediendam omnem reactionem. Videtur enim ex natura rei omne agens in aliud etiam ab eo pati. Dari autem poſſe agens ſine repaſſione, accuratè demonſtrandum eſt.

torium conceptum involvit (45) (ex probatis) (46). Ergo eſt verum & reale attributum. Quidquid enim poſitivum & ſimplicem conceptum habet, illud eſt ens, (eſt axioma) & quod reſpicit aliquam rem, in qua ſuſtentetur, quamque afficiat, eſt attributum, (eſt definitio). Et cùm omne attributum ſit alicujus ſubſtantiæ attributum, (ex demonſtratis), eſſe ſeu exſiſtere erit attributum vel ſubſtantiæ in communi, vel ſubſtantiæ alicujus in particulari. Non eſt attributum ſubſtantiæ in communi, quia, quod attributum negari poteſt, non negato ſimul attributo primario ſubſtantiæ in communi, illud ad ſubſtantiam in communi non pertinet, (eſt axioma). Tale eſt exſiſtere a ſe. Probo: ſubſtantia eſt res per ſe exſiſtens, ſeu, quæ in alio non ſuſtentatur. Talis autem eſſe poteſt, quæ ſemet ipſam vel nullo modo determinat ad id, cujus eſt capax, adeoque eſt purè paſſiva, vel, ſi ſemet ipſam determinat, non tamen vi ſua ſeu ſua ſponte, ſed cum alterius concurſu id facit. Quod credo, non negabis, niſi ſimul negare velis, ſcire te, quid ſit hoc, eſſe ab alio. Ergò eſſe a ſe non eſt attributum ſubſtantiæ in communi. Pertinebit ergò ad ſubſtantiam quamdam in particulari, hoc eſt, vel ad mentem, vel ad materiam (47). E. ſi ad mentem, hoc eſt, ſi mens quædam a ſe eſſe poteſt, nullum corpus eſſe poterit a ſe. Sin ad corpus, nulla mens a ſe eſſe poterit. Nam ſi utrique, corpori ſcilicet & menti, convenire poſſet *τὸ a ſe exſiſtere*, eſſet attributum ſubſtantiæ in communi. Quod enim competit omnibus ſpeciebus, hoc etiam competit generi. Non autem competit generi ſeu ſubſtantiæ in communi a ſe. Pertinebit itaque vel ad mentem ſolam, vel ad ſolam materiam.

Non pertinet ad materiam ſeu corpus a ſe exſiſtere. Quod ita demonſtro. Quidquid ſeſe non determinat ad id, cujus capax eſt, illud multo minùs vi ſua, ſeu citra alterius concurſum, ſeſe determinat, & per conſequens eſt pura potentia paſſiva. Nequit igitur eſſe a ſe. At materia ſeſe non determinat ad id, cujus capax eſt. Probo: quia ſeſe determinare ad id, cujus capax eſt, negari poteſt, non negato attributo primario materiæ, immò non negatis omnibus, quæ conceptum primarium immediatè ſequuntur. Quod ita patet: attributum primarium materiæ eſt extenſum in longum, latum, & profundum, (vel, quoniam te id negare ſcio, aſſigna quodvis aliud, quod clarè & diſtinctè intelligatur: rem eodem recidere videbis). Ex extenſione immediatè ſequuntur diviſibilitas in partes, partium figura, ſitus, motus, &c. Fac autem, materiam ſemet ipſam

(45) Ingenuè dico, nondum mihi videri ſublatam difficultatem a me initio motam. Immò credo, ne tolli quidem poſſe ex Carteſianis principiis, ſed aliis opus eſſe meditationibus novis.

(46) Conceſſo ſemel, ens a ſe non implicare, ratiocinationes ſequentes, ingenioſæ licèt & doctæ, neceſſariæ tamen non ſunt.

(47) Aſſumitur hìc, non alias eſſe ſubſtantias, quàm mentem & materiam.

ipſam non determinare ad id, cujus capax eſt, ſed ita etiam ſe determinare planè non poſſe, hoc eſt, fac eam non poſſe ſemet ipſam in partes ſecare, iiſque motum, ſitum & figuram largiri; immò fac eam omninò non eſſe diviſam in partes, quæ figuram & motum habeant; non tolletur ipſa extenſio, &, quæ ex extenſione fluunt, diviſibilitas, mobilitas, &c. Ergo ſeſe determinare ad id, cujus capax eſt, non eſt attributum materiæ. Eſt enim infallibilis regula, qua cognoſco, attributum aliquod non pertinere ad ſubſtantiam aliquam, ſi illud clarè & diſtinctè perceptum negari poteſt, non negato tamen attributo ejus ſubſtantiæ primario, itidem clarè & diſtinctè percepto. Relinquitur itaque, materiam ſeſe determinare ad id, cujus capax eſt, hoc eſt, ſeſe in partes ſecare, iiſque motum, figuram, & ſitum, & ſi quæ ſunt alia, dare non poſſe. Erit itaque maximè ab alio. Ergò a ſe exſiſtere ad ſolam mentem pertinebit. Et quidem ſi a ſe exſiſtere ad mentem pertinet, erit attributum vel mentis in communi, vel mentis alicujus in particulari. Non eſt attributum mentis in communi, quia negari poteſt, non negato attributo primario. Quod ita intelligitur. Ad id, ut aliquid a ſe ipſo exſiſtere intelligatur, duo neceſſaria eſſe dixi: unum, ut ſemet ipſum determinet ad id, cujus capax eſt, hoc eſt, ut ſit activum: alterum, ut vi ſua, ſeu citra alterius rei concurſum, id faciat. Prius quidem ad naturam mentis in communi pertinet; non autem poſterius. Prius eo pertinere facilè patet. Quid enim eſt mens? ſubſtantia cogitans, id eſt, intelligens & volens, ſeu percipiens & eligens. At percipere & velle eſt ſemet ipſum determinare, ſeu a ſemet ipſo in aliquam rem tendere & ferri; ſeu perceptio & volitio ſunt actus & determinationes, quas mens a ſemet ipſo & per ſemet ipſum producit. Poſterius, nempe vi ſua, ſeu nulla alia re a ſe diverſa concurrente, ſeſe determinare ſeu agere, ad mentem in communi non pertinet. Quia id negari poteſt, non negato attributo mentis primario. Fac enim aliquem cum concurſu alterius intelligere & velle. Ergò a ſe exſiſtere, ſeu vi ſua, & citra alterius rei concurſum ſeſe ad omne id, cujus capax eſſe intelligitur, determinare, non eſt attributum mentis in communi. Et tamen eſt attributum alicujus mentis (ex demonſtratis). Pertinebit ergò ad mentem aliquam in particulari. Ad quam autem, niſi ad mentem perfectiſſimam? Quid eſt mens perfectiſſima? Illa, quæ habet omnes realitates, quas menti alicui competere poſſe, clarè & diſtinctè intelligi poteſt. Hìc tibi do conceptum mentis perfectiſſimæ. Cogita jam, an ille contradictionem involvat. Nam ſi non involvit, erit ille conceptus entis ſimpliciter perfectiſſimi quem *Deum* voco: uti mox demonſtrabitur. Conceptum illum mentis perfectiſſimæ, quem dedi, nullam contradictionem involvere, ita probo: quia non eſt compoſitus ex duobus conceptibus ſeſe mutuò tollentibus. Conceptus enim mentis non involvit contradictionem. Quod in mente tua experieris: quæ ſi contradictionem invol-

involveret, ſine dubio non eſſet. Neque hoc, habere omnes realitates, quarum mens aliqua capax eſſe poteſt, cum conceptu mentis pugnat (48); ſed e contrario, habere aliquam realitatem, cujus nulla mens capax eſſe poteſt.

Ex dictis patet, quemadmodum conſiderando, quòd, quidquid ut ſubſtantia concipitur, illud concipitur vel ut extenſum, & capax omnium illarum determinationum, quæ ex extenſione fluunt, vel, ut cogitans, & capax omnium modorum cogitandi, ſubſtantia dividitur in mentem & corpus; ita eodem modo clarè & diſtinctè intelligendo, quod alia ſubſtantia ſemet ipſam determinare, a ſemet ipſa in aliquam rem tendere & ferri poteſt, alia verò id non poteſt, ſed omnes ſuas determinationes ab alio accipere debet, dividendam eſſe *ſubſtantiam* in *activam* & *merè paſſivam*. Et cùm agere ſeu eſſe activum negari poſſit, non negato primario attributo materiæ, rectè affirmo, materiam eſſe ſubſtantiam illam merè paſſivam (49). Contrà cùm intelligere & velle, qui ſunt actus mentis, idem ſit, quod agere; dico, mentem eſſe ſubſtantiam illam activam (50). Præter materiam & mentem enim nulla alia eſt ſubſtantia nobis nota. Porrò cùm *activum* iterum dupliciter intelligatur; unum, quod cum alterius concurſu agit; alterum, quod eſt purè activum, ſeu vi ſua, ſua ſponte, citra ullius alterius rei concurſum ſeſe agit, fert, & determinat, id quod actum purum voco; hanc dico *mentem perfectiſſimam*, illam verò imperfectam.

Deinde quemadmodum clarum & diſtinctum conceptum habemus *entis a ſe* & *ab alio*, ita etiam habemus clarum & diſtinctum conceptum *entis neceſſarii* & *contingentis*, *immutabilis* & *mutabilis*, *æterni* & *non æterni*. Quod ita intelligitur. Ens *neceſſarium* vulgò dicitur, quod neceſſariò exſiſtit, ſeu, quod ita exſiſtit, ut non poſſit non exſiſtere; *contingens* verò, quod aut non exſiſtit, cùm tamen exſiſtere poſſit, aut, cùm exſiſtat, poteſt tamen & non exſiſtere. Sed hæ ſunt tantùm explicationes ipſarum vocum *neceſſarii* & *contingentis*, quas logici deſcriptiones nominis vocant; non minùs, quàm ſi quis diceret, ens a ſe eſſe, quod a ſe exſiſtit, ſeu, quod non exſiſtit ab alio. Ens ab alio, quod a ſe ipſo non exſiſtit. Hæ enim tantùm ſunt voces, unum & idem ſignificantes. Quæritur autem, quænam ſit vis his vocibus ſubjecta? ſeu, quam rem voces *neceſſarii* & *contingentis* involvant? Quemadmodum itaque eſſe a ſe id dicit, vi ſua, ſeu, citra

(48) In hoc eſt aliquis paralogiſmus occultus. Non enim neceſſe eſt, aut certè nondum probatum eſt, intelligi poſſe mentem, cui omnia competant, quorum mentis natura capax eſt. Poteſt enim hæc mens hujus, illa alterius eſſe capax; ſed nondum patet, dari poſſe mentem, in quo omnia illa ſimul ſint collecta. Quamvis enim ſingula conſiſtere poſſint cum natura mentis; dubitari tamen poteſt, an conſiſtere poſſint inter ſe.

(49) Et fortaſſe plures alias.

(50) Vel ſaltem ex earum numero.

citra ullius alterius rei concurſum ſeſe ad omne id, cujus quid capax eſt, ferre & determinare; ita, ſi voci *neceſſarii* vis aliqua ſubjecta eſt, illud *ens* dicetur *neceſſarium*, quod vi ſua, ſeu citra alterius rei concurſum ad omne id, cujus capax eſt, ipſa re ſeu actu ſeſe fert & determinat. Quod facilè patet. Vulgò deſcribitur ens neceſſarium, quod ita exſiſtit, ut non poſſit non exſiſtere: quæ eſt deſcriptio nominis, uti dixi, remque ipſam non explicat. Attendatur jam ad explicationem rei, quam ego dedi, & manifeſtum erit, alio modo, quàm quem explicui, concipi non poſſe, aliquid ita exſiſtere, ut nulla ratione poſſit non exſiſtere. Nam quod actu ſeu ipſa re ſeſe ad omne id, cujus capax eſt, fert & determinat, illud utique exſiſtit. Et quidquid vi ſua, ſeu citra alterius rei concurſum, id facit, id non poteſt non exſiſtere. Quod ita intelligitur. Fac, aliquid ſeſe vi ſua ad omne id, cujus capax eſt, actu determinare poſſe (51), ad minimum vis illa, qua id poteſt, actualis eſſe debet. A qua vi enim aliquid quocumque modo eſſe poteſt, illa tantumdem realitatis ad minimum continere debet, quàm ab illa eſſe aut proficiſci poteſt. Implicat enim, plus realitatis ab aliqua re eſſe aut proficiſci, quàm ipſa habet. Sed plus realitatis habet, quidquid actu ſeſe determinat ad omne id, cujus capax eſt, quàm quod ita ſeſe determinare tantùm poteſt, (ex prius demonſtratis). Ergo vis illa, qua aliquid actu ſeſe ita determinare poteſt, actualis eſſe debet. Nam ſi non eſt, plus realitatis ab ipſa eſſe aut proficiſci poſſet, quàm ipſa haberet; quod fieri nequit. Si ergò vis illa, qua aliquid ſemet ipſum ad omne id, cujus capax eſt, determinare poteſt, exſiſtit, erit in aliqua re exſiſtente. Eſt enim reale attributum. In qua autem re, niſi in ea, quæ eſt neceſſaria, ſeu quæ ſeſe vi ſua actuali actu determinat? Illud autem, quod ſeſe vi ſua actuali actu determinat, eſt etiam ens a ſe. Patet itaque, *eſſe neceſſarium* ab eo, quod *a ſe* eſt, realiter non diſtingui. Contrà, quidquid ſemet ipſum vel nullo modo ad id, cujus capax eſt, determinat, vel, ſi determinat, non tamen vi ſua, ſed cum alterius concurſu id facit, id *contingens* eſt, ſeu, vel non exſiſtit, cùm exſiſtere poſſit, vel, ſi exſiſtit, poteſt tamen etiam non exſiſtere. Quidquid enim ſe nullo modo actu ad id determinat, cujus capax eſt, illud, ſi exſiſtit, ab alio exſiſtere debet, a quo ad id, cujus capax eſt, ſimpliciter determinetur. Et quidquid ſemet ipſum ad id, cujus capax eſt, actu fert & determinat, ſi illud non vi ſua, ſed cum alterius rei concurſu id facere intelligatur, hoc exſiſtit, ſi res illa, qua determinationes ejus pendent, ad illas ipſo actu concurrit; non autem exſiſtit, ſi

(51) Hoc argumentum nimium probat, nempe eodem modo ratiocinari poſſum de eo, quod ſe ad quædam tantùm vi ſua determinat. Hujus enim vim neceſſe eſt eſſe ad minimum actualem, ac proinde neceſſe eſt ipſum exſiſtere; ergò omnes mentes forent entia neceſſaria.

ſi res illa diverſa, a qua in determinationibus ſuis pendet, aut non concurrit, aut concurrere deſinit.

Porrò, *eſſe neceſſarium* & *eſſe contingens* non ſunt notiones contradictionem involventes. Nam eſſe a ſe non involvit contradictionem, non magis quàm eſſe ab alio, (ex demonſtratis). Jam verò eſſe contingens ab eo, quod dicitur eſſe ab alio, nullo modo differt: quod attendenti manifeſtum erit. Ergò & eſſe neceſſarium ab eſſe a ſe ex eadem ratione nullo modo differt. Eſſe enim a ſe eſt, quod vi ſua ſeſe ad omne id, cujus capax eſt, fert & determinat. Quod intelligi non poteſt, niſi id ipſo actu faciat (52). Nam quod ipſo actu ſeſe ad id, cujus capax eſt, non fert & determinat, illud etiam vi ſua ſeu citra alterius rei concurſum ad id, cujus capax eſt, ferri & determinari nequit; uti demonſtratum jam eſt. Sed fac, eſſe diſtinctionem aliquam inter eſſe a ſe & eſſe neceſſarium, ea rationis tantùm erit, atque in eo poſita, quod, dum aliquid concipitur ut ens a ſe, intelligatur tale quid, quod vi ſua ſemet ipſum ad id, cujus capax eſt, ferre & determinare poteſt; licèt id forte ſimul non concipiatur ut actu ſeſe determinans: ſed ſi idem concipiatur ut neceſſarium, concipitur ut tale quid, quod ſemet ipſum vi ſua ipſo actu ad id, cujus capax eſt, determinat (53). Sed, uti dixi, hæc duo, ſeſe vi ſua ad omne id, cujus quid capax eſt, determinare poſſe, & ſeſe actu ita determinare, reapſe non differunt. Unum quippe ſine altero intelligi nequit. Sed ſi fortè ſcrupulus tibi aliquis hìc remaneat, qui tamen nullus eſſe poteſt; illud certè non negabis, poſteriorem hunc conceptum, ſcilicet vi ſua ipſo actu ad omne id, cujus quid capax eſt, ſe determinare, priori, nempe ita ſeſe determinare poſſe, non contradicere. Omne enim, quod poteſt eſſe, illud non implicat, ut actu ſit. Jam verò non implicat, aliquid ſemet ipſum vi ſua ad omne id, cujus capax eſt, determinare poſſe, ex demonſtratis. Ergò etiam non implicat, aliquid ipſa re, ſeu actu, ita ſeſe determinare (54). Ergo ens neceſſarium non implicat contradictionem.

Quæritur jam, ad quam ſubſtantiam pertineat hoc attributum, *eſſe neceſſarium*? Si illa tantummodò repetantur, quæ *de ente a ſe* dicta ſunt, patebit;

(52) Eodem argumento, ut dixi, ſequeretur, omnes ſubſtantias activas eſſe neceſſarias. Nam non intelligi poſſunt ſe ſaltem ad aliquid determinare, niſi intelligantur exſiſtere.

(53) Ego ſemper credidi, ſi *eſſe a ſe* definiatur, e cujus eſſentia ſequitur exſiſtentia, tunc idem eſſe ens neceſſarium & ens a ſe.

(54) Optimè. Poſito, ens a ſe non implicare contradictionem, nec ens neceſſarium implicabit, nec eſt in hoc difficultas. Concedo lubens, ſi intelligi poſſit, ens ſeſe ad omnia determinans vi ſua, id etiam ſe determinare ad exſiſtentiam, ſi modò ejus capax eſt, id eſt, niſi implicat contradictionem. Non autem implicabit, ſi modò tale ens ſe ex ſola natura determinans poſſit intelligi.

patebit, *eſſe neceſſarium* attributum eſſe ſolius mentis perfectiſſimæ. Reliquæ omnes ſubſtantiæ ſunt *contingentes.*

De *immutabili* & *æterno*, hiſque oppoſitis *mutabili* & *non æterno*, paucis me expediam. Immutabilis vox licèt videatur negativa, conceptum tamen maximè poſitivum habet. Nam *immutabile*, ſi vim vocis ſpectes, idem eſt, quod in ſtatu ſuo perſeverans (55). Ergò ſi ullus ſcrupulus hìc eſſe poſſet, qui tamen non eſt, loco prioris vocis hac poſteriori uti liceret. Quænam autem vis voci *immutabilis* eſt ſubjecta? Hæc; *ſemet ipſum vi ſua ad omnia illa, quorum quid capax eſt, ſimul & ſemper determinare* (56). Non video autem, quomodo ab immutabili eſſe æternum vel ratione differat. Nulla enim eſt vis voci *æterni* ſubjecta, quàm quæ ſubjecta eſt voci *immutabilis*: niſi fortè dicas, æternum maximè reſpectum involvere ad τὸ ſemper, ita ut, dum aliquid concipio ut æternum, illud concipiam, quod ſeſe vi ſua ad id, cujus capax eſt, ſemper determinat; licèt tunc fortè non attendam, illud, quod æternum intelligo, ſeſe uno & eodem actu ad omnia, quorum capax eſt, *ſimul* determinare (57). Cognito, quid ſit *immutabile* & *æternum*, facilè etiam intelligitur, quænam vis vocibus *mutabilis* & *non æterni* ſit ſubjecta. *Mutabile* enim ſeu *non æternum* illud erit, quidquid vel ſeſe ad id, cujus capax eſt, determinare nequit, vel, ſi ſe determinat, non tamen ad omnia ſimul & ſemper determinat, vel ſi quid horum fingatur, non tamen vi ſua, ſed cum alterius concurſu, id facit.

Porrò eſſe *immutabile* & eſſe *æternum* non involvit contradictionem, quia eſſe a ſe contradictionem non involvit; a quo illa aut planè non, aut ratione tantùm diſtinguuntur. Pertinebit itaque ad ſolam mentem perfectiſſimam, eſſe immutabilem & eſſe æternam. Reliquæ omnes circumſtantiæ erunt *contingentes.* Omnia ex prius demonſtratis.

Quoniam autem mentem perfectiſſimam contradictionem non involvere, ſuprà demonſtratum eſt, cogita, quid ſentiendum ſit de hoc argumento:

Mens perfectiſſima eſt, quæ habet omnes realitates, quas menti alicui competere poſſe, clarè & diſtinctè cognoſco. (Ex definitione).

At exſiſtentia a ſe neceſſaria ſeu actualis, immutabilis & æterna, eſt realitas, quam menti alicui competere poſſe, clarè & diſtinctè cognoſco.

Ergò mens perfectiſſima habet exſiſtentiam a ſe, neceſſariam ſeu actualem, immutabilem & æternam. Ergò mens perfectiſſima a ſe neceſſariò ſeu ipſo actu immutabiliter & ab æterno exſiſtit.

Exſiſtit itaque.

Mentem perfectiſſimam Deum voco.

 Ergo

(55) Immutabile ens eſt, cujus ſtatus, in quo eſt, neceſſarius eſt.

(56) Optimè.

(57) Poteſt fortè aliquid eſſe æternum, etſi ſit immutabile, modò exſiſtentiam retineat; ſaltem ex his definitionibus contrarium non eſt probatum.

Ergo Deus exſiſtit. Q. E. D.

Videmus itaque, qua ratione in ipſo primo Dei conceptu actualis exſiſtentia contineatur. Cùm autem demonſtratum ſit, ideam mentis perfectiſſimæ, quam dedi, contradictionem non involvere; nullo modo hoc argumentum moveri aut labefactari poteſt, quin omnes mathematicæ demonſtrationes, immò omnis omninò veritas, omnis perceptio, una moveatur & labefactetur. Nam qui ſcrupulus tibi fuit in voce *perfectiſſimi*, illum totum me exemiſſe confido; aut, ſi is tibi remanet, ſubſtitue vocem *realiſſimi*, quæ idem prorſus ſignificat, neque ulla eſt inter has duas voces differentia, niſi quod hæc barbarè id efferat, quod per illam Latinè dici poteſt. Eſt enim mens realiſſima nihil aliud, quàm ea mens, quæ omnes realitates habet, quæ ad ullam mentem pertinere poſſunt. Ergò cùm exſiſtentia a ſe, eaque actualis & neceſſaria, clarè & diſtinctè intelligatur ad mentem aliquam pertinere poſſe, mens perfectiſſima a ſe actu & neceſſario exſiſtit; quemadmodum probatum eſt. Videamus jam, quidnam ulteriùs ad mentem aliquam pertinere poſſe clarè & diſtinctè intelligatur.

Deum dico eſſe mentem perfectiſſimam. Quid eſt *mens*? Subſtantia cogitans, id eſt, intelligens & volens. Quid *mens perfectiſſima*? Mens perfectiſſimè intelligens & volens. Quid *perfectiſſimè intelligere?* Habere omnes realitates, quæ in intelligendo percipi poſſunt. Quid *hoc*? Uno & eodem ſimpliciſſimo actu *ſimul* & *ſemper* omne perceptibile percipere; omne verum cognoſcere. An hoc contradictionem involvit? Minimè. Quicumque enim conceptus non eſt compoſitus ex duobus vel pluribus aliis ſeſe invicem tollentibus, ille non implicat contradictionem. (Ex definit.) Talis eſt conceptus mentis perfectiſſimè intelligentis, quem dedi. Probo: *Intelligere* non involvit contradictionem. Hoc enim in nobis experimur. Neque *omnia intelligere* contradictionem implicat: τῷ *intelligere* enim contradicit τὸ *non intelligere.* Omnia verò intelligere non eſt non intelligere, ſed potiùs purè intelligere; tantùm abeſt, ut τῷ *intelligere* contradicat (58). Eodem modo uno & eodem actu omnia intelligere, contradictionem non implicat (59). Probo: Uno & eodem actu aliquid intelligere, non implicat contradictionem. Experimur id in nobis. Ergò nec uno & eodem actu omnia intelligere contradictionem implicat. Nam τῷ uno & eodem actu aliquid intelligere contradicit hoc, uno & eodem actu

(58) Tametſi omnia non pugnent cum intellectu, pugnant tamen inter ſe, ſi cum intellectu conjungantur, quemadmodum videre non pugnat cum oculo, neque omnia videre eſt non videre, ſed omnia videre pugnat cum natura oculi. Ita demonſtrandum eſt, quòd non pugnet cum natura mentis, omnia intelligere.

(59) Hujus modi argumentationum vim non agnoſco. Corporis natura eſt, alicui loco coëxtendi. Ergóne datur corpus, quod ſimul omnibus locis coëxtendatur?

actu nihil intelligere (60). Ergo non illud, uno & eodem actu omnia intelligere, quod maximè eſt, uno & eodem actu omnia intelligere (61). Nam qui uno & eodem actu omnia intelligit, ille perfectiſſimè & realiſſimè aliquid intelligit. Denique illa particula *ſemper*, quam præterea adhibui, cùm Deum ſemper intelligere dixi, nihil contradictionis apportat. Τῷ intelligere enim contradicit τὸ non intelligere; non verò ſemper intelligere, quod eſt maximè intelligere. Ergò in conceptu Dei, quatenùs eſt perfectiſſimè intelligens, hæc quatuor continentur:

1. Quod omne perceptibile, hoc eſt, quidquid aliquid in re ponit, ſeu, quidquid aut exſiſtit, aut exſiſtere poteſt, percipiat. Plus enim realitatis in intelligendo habet, qui omne perceptibile percipit, quàm qui aliquod tantùm.
2. Quòd omne verum cognoſcat. Ex eadem ratione.
3. Quòd omne perceptibile, omne verum cognoſcat ſemper. Plus enim realitatis habet in intelligendo, qui ſemper percipit & cognoſcit, quàm qui nunc percipit & cognoſcit, nunc a percipiendo & cognoſcendo ceſſat.
4. Quòd uno & eodem ſimpliciſſimo actu omne perceptibile percipiat, omne verum cognoſcat. Hoc eſt, nullum perceptibile non percipiet, nullum verum cognoſcet per diſcurſum ſeu ratiocinationem, deducendo ſcilicet unum ex altero, quia quod hoc modo cognoſcitur, ibi concluſio ignotior eſſe debet præmiſſis. Plus autem realitatis in intelligendo habet, cui omnia ſimul æquè patent & nota ſunt, quàm cui alterum eſt ignotius.

Deinde Deus eſt ens perfectiſſimè volens, ſeu Deus habet omnes realitates, quæ in volendo concipi poſſunt. Velle nihil aliud eſt, quàm in rem aliquam ita tendere & ferri, ut ad alterutrum oppoſitorum ſeſe quis determinet, & ex iis alterum eligat, alterum rejiciat. Summa in volendo realitas, numquam inaniter in rem aliquam ita ferri & tendere, ſeu ita in rem aliquam ferri & tendere, ut res illa, in quam quis fertur & tendit, ita ſit, prout quis circa illam ſe determinat, hoc eſt, poſſe id, quod velis: ſine quo omnis volitio inanis eſt. Deus ergò efficaciſſimè volet: hoc eſt, omnia, quæ Deus volet, ſicut illa volet, erunt: nihilque, quod Deus vult, tale, quale illud vult, eſſe non poteſt. Hæc voluntatis divinæ ſumma realitas ſeu ſumma vis & efficacia eſt ipſa omnipotentia divina, unaque ab altera ne cogitatione quidem differt. Et quidem poſſe Deum omne id, quod vult, vel ſic etiam intelligi poteſt. Nemo aliquid vult, voluntate ſcilicet efficaci, hoc eſt, ita, ut ſimplici-

 ter

(60) Eodem argumento probabitur, non implicare, unum oculum omnia ſimul videre.

(61) Ingenuè fateor, me in his ratiocinationibus ſoliditatem nullam agnoſcere.

ter circa illam rem, in quam fertur & tendit, aliquid determinet, quæ una & maximè propria eſt voluntas, niſi id, quod vult, efficere ſe poſſe judicet (62). Illi enim noſtri actus, quibus in res, quas impoſſibiles judicamus, ferimur & tendimus, nihil circa res illas determinant, ſed inclinationem tantùm important, qua nos determinaremus, niſi res illas, in quas ferimur, vires noſtras excedere judicaremus. Quos actus ſcholaſtici vocant *velleitates*. E. gr. vellem volare, ſi alas haberem. Quòd ſi quis in rem impoſſibilem ita ſeſe fert & tendit, ut aliquid circa ipſam determinet, id fit ex ignorantia, quando ſcilicet neſcit, illam eſſe ſibi impoſſibilem. Jam verò Deus omnia perfectiſſimè novit (ex demonſtratis). Si ergò Deus nihil eorum, quæ vellet, poſſet, nullam planè voluntatem haberet, ut probatum eſt. Ergò non eſſet res volens. Ergo nec mens, (quod repugnat). Ergò aliquid, quod vult, poteſt. Ergò perfectio ſeu realitas quædam voluntatis eſt, poſſe aliquid eorum, quæ quis vult (63). Ergò ſumma perfectio ſeu ſumma realitas, poſſe omnia, quæ quis vult (64). Neque unum contradicit alteri. Nam τῷ aliquid poſſe contradicit hoc: nihil poſſe; non verò iſtud, omnia poſſe, quod maximè eſt aliquid poſſe. Ergò

1. Deus omnipotentia ſua, ſeu ſumma voluntatis ſuæ perfectione erit omne id, quod erit, idque neceſſariò, independenter ab ulla alia re, æternè & immutabiliter. Hoc eſt, erit puriſſimus, vi realiſſimæ volitionis ſuæ a ſe ipſo & per ſemet ipſum, nulli mutationi obnoxius neceſſariò & æternò exſiſtens actus. Cujus enim voluntas tantæ eſt efficaciæ, ut per illam omne id, in quod fertur & tendit, tale, quale illud determinat, ſit & exſiſtat, id maximè vi tantæ hujus efficaciæ a ſemet ipſo & per ſemet ipſum tale eſt, quale concipitur. Deum enim cum omnibus iſtis attributis, quæ memoravi, vi ſua exſiſtere poſſe, ſeu contradictionem non involvere, jam demonſtratum eſt. Ergo vis illa, per quam exſiſtere actu poteſt, actualis ad minimum eſſe debet, juxta ea, quæ de ente neceſſariò probata ſunt. Ubi autem erit vis illa actualis, qua Deus omne id actu eſſe poteſt, quod dixi, niſi in ſubſtantia actu exſiſtente (65)? Omne enim attributum actuale debet eſſe in ſubſtantia actuali. Quænam autem eſt illa ſubſtantia actualis, niſi cui illa vis eſt propria, hoc eſt, niſi ipſe Deus, qui eſt mens perfectiſſimè intelligens & volens? in qua quidem

(62) Succeſſus voluntatis res eſt a voluntate diſtincta. Perfectio voluntatis in eo conſiſtit, ut quis non niſi ea velit, quæ verè bona ſunt.

(63) Hæc ratiocinatio non probat, potentiam eſſe aliquam voluntatis realitatem ſeu gradum; aſſumit enim aliquid a voluntate diſtinctum, nempe intellectum comitantem.

(64) Fateor, ſi poſſibilis ſit omnipotentia, eſſe perfectionem.

(65) Eodem modo ratiocinari aliquis poſſet, vim illam actualem, qua ſe alia mens determinat, non poſſe eſſe, niſi in ſubſtantia actu exſiſtente, ac proinde omnem mentem neceſſariò exſiſtere.

quidem vis illa efficaciſſima ſemet ipſum determinandi ad omne id, cujus capax eſt, eſt ipſa realiſſima ſeu perfectiſſima volitio, quæ omnipotentia dicitur. Deus igitur actu exſiſtit. Q. E. D.

Vel ſic etiam: *neceſſariò eſſe* non involvit contradictionem. Eſt ergò attributum reale. Ergò in aliqua ſubſtantia, & quidem in mente perfectiſſima, hoc eſt, in Deo, (omnia ex demonſtratis). Ergo Deus vi ſua actu exſiſtit, ſeu actu ſeſe determinat ad omne id, cujus capax eſt. Quænam autem eſt illa vis in Deo? Perfectiſſima ejus volitio, id eſt, ipſa ejus omnipotentia. Ergò Deus vi perfectiſſimæ ſuæ volitionis, hoc eſt, per omnipotentiam ſuam actu exſiſtit (66). Q. E. D.

2. Omne ens, omnis realitas, quæcumque præter Deum eſſe aut cogitari poteſt, a voluntate divina pendet, ut illud ens, illa realitas ſit & exſiſtat, ſi Deus id velit; non verò ſit, aut non exſiſtat, ſi Deus id non velit. Probo: Deus habet omnes realitates, ſeu ſummam efficaciam in volendo (ex demonſtratis) (67). Jam verò plus realitatis habet, ſeu efficacior eſt illa voluntas, a qua omnis realitas, omne ens a ſe diſtinctum pendet, ita ut exſiſtat, ſi illa velit, contraque non exſiſtat, ſi non velit, quàm ſi quidquam eſſe aut exſiſtere poſſit, quod ipſa nolit, aut non eſſe & non exſiſtere, quod ipſa velit. Quin etiam

3. Non ſolùm omnis realitas ac ens, quod non eſt Deus, aut exſiſtit, aut non exſiſtit, prout Deus hoc vel illud vult, ſed etiam ut aliquid poſſit eſſe ens, ſeu ut aliquid ſit poſſibile tantùm; item

4. Ut aliquid omninò ſit verum, a voluntate divina pendet (68). Quod ultimum, nempe omne verum a voluntate divina pendere, paradoxum tibi videri ſcio. Eſt tamen veriſſimum, & facilè probari poteſt. Quin non hoc ſolum, ſed etiam illud, quod tertio loco dixi, nempe, ut aliquid poſſit eſſe ens, hoc eſt, ut ſit poſſibile tantùm, licèt non exſiſtat, a voluntate divina pendere (69): eſt enim una demonſtratio: (licet illud monitum velim, poſſe hoc omnino omitti, & tamen propoſitum ſufficienter demonſtrari: nempe neceſſariam exſiſtentiam in conceptu Dei con-

 tineri

(66) Non video, quomodo exſiſtat vi ſuæ volitionis actualis; prius enim natura eſt actu exſiſtere, quàm actu velle. Volitio actualis exſiſtentiam actualem ſupponit.

(67) Demonſtrationes illæ, ut dixi, ſunt imperfectæ.

(68) Scio, ſententiam eſſe *Carteſii*, veritatem rerum pendere a voluntate divina: quod fateor mihi ſemper viſum eſt abſurdum. Ita enim ipſa neceſſitas exſiſtentiæ divinæ, & ipſa neceſſitas volitionis divinæ a volitione divina pendebit; atque illa erit aliquid natura prius & poſterius ſe ipſo. Præterea veritatum neceſſariarum principium illud unicum eſt, quod contrarium implicat in terminis. Ita in geometricis theorematibus ſemper oſtendi poteſt contrarium implicare. Cùm verò incompoſſibilitas contradictoriorum non pendeat a voluntate divina, ſequitur, nec veritatem ab ea pendere. Quis dicet, *a* non eſſe *non a*, quia Deus decrevit?

(69) Ergo divinæ eſſentiæ poſſibilitas pendebit a voluntate Dei, ſeu, Deus erit poſſibilis, quia ſe talem eſſe vult.

tineri, huncque conceptum non involvere contradictionem, ſicut id jam reapſe demonſtratum eſt (70). Dico itaque, non ſolùm hoc, quod ens aliquod, e. gr. circulus exſiſtat aut non exſiſtat, ſed etiam illud, ut circulus aliquis ſit poſſibilis, ſeu ut realitatem habeat, quæ exſiſtere poſſit, pendere a voluntate divina, ita quidem, ut figura circularis ſit entitas quædam poſſibilis, quia Deus illam poſſibilem eſſe voluerit: eſſet verò non poſſibilis, ſi Deus id non voluiſſet, vel aliter voluiſſet. Uno verbo, figura circularis non eſſet poſſibilis, niſi Deus ejus naturam poſſibilem eſſe voluiſſet (71). Et ſic de ceteris. Eodem modo, ut hæc & ſimilia pronuntiata: omne totum eſt majus ſua parte: trianguli tres anguli æquantur duobus rectis, vera ſint, pendere illud a voluntate divina, ita ut vera ſint, quia Deus illa vera eſſe voluit; vera autem eſſe non poſſent, niſi Deus ita voluiſſet (72). Probo. Deus habet omnes realitates in volendo, (ex definit). Plus autem realitatis in volendo habet, a quo omnis poſſibilitas, omne verum pendet, quàm a quo id non pendet (73). Ergò multo plus perfectionis in volendo Deus habebit, ſi omnis poſſibilitas, omnis veritas ab ejus determinatione pendet, quàm ſi omnem poſſibilitatem & veritatem concipiamus, ut planè independentem a voluntate divina, ita ſcilicet, ut voluntas divina in hanc poſſibilitatem & veritatem nihil potuerit (74), ſed poſſibile & verum etiam aliquid ſit, ſi Deum vel maximè id noluiſſe fingamus. Et profectò, licet ens, quod poſſibile tantùm eſt, actu non ſit, eſt tamen ejus determinata natura, quæ, ſi planè a Deo non pendet, non omne ens ſeu non quævis natura realis a Deo diſtincta a Deo pendebit. Et per conſequens Deus non erit perfectiſſimè volens (75). Quod ex terminis manifeſtum eſt. Quodſi autem omnis poſſi-

(70) Quam vellem!

(71) Si quis ita loquitur, eum, quid *verum*, *poſſibile*, *eſſe*, *velle*, vocet, non intelligo.

(72) Exſpecto, ut dicatis, dari mundum aliquem, in quo totum eſt ſua parte minus, & in quo angulus ſemicirculi ſit acutus, idque perfectioni Dei conſentaneum eſt. Plus enim realitatis in volendo habebit hoc modo, quàm ſi unum tantùm velit ex his duobus. Quoniam enim omnia, quæ vult, poteſt, & hæc utique velle poterat, (quia impoſſibilitas non in ipſis eſt, ſed a voluntate oritur), non video, quomodo ſalva perfectione ſua potentiam ſuam ad pauca reſtringat. Conſentit *Carteſius*, qui nullos limites divinis operationibus poſitos eſſe contendit. Et poſito, juſtitiam & unitatem abſolutè a Dei arbitrio pendere, poterit eſſe mundus, in quo damnentur pii, ſalventur impii.

(73) Paucis reſpondetur, neceſſaria in ſe non eſſe objectum voluntatis, & hac eadem methodo nihil tam abſonum fingere poterimus, quod non poterimus Deo tribuere, oſtendendo ſcilicet, eum plus habiturum realitatis, ſi hoc quoque habeat.

(74) Voluntas divina ſequitur ex rerum neceſſitate, quia & exſiſtentia Dei ex rerum neceſſitate conſequitur, ſeu ex Dei eſſentia: nam Dei eſſentia congruit cum rerum neceſſitate.

(75) Nihil minus. Voluntas eſt eorum, quæ poſſibilia intellectus præſupponit.

poſſibilitas eſt a Deo, hoc eſt, ſi a voluntate divina pendet, quòd e. gr. triangulum ſuam determinatam naturam habeat, id etiam erit ab eadem voluntate divina, quòd illa trianguli natura determinata ſit ad tres angulos duobus rectis æquales. Neque hic quidquam incommodi video, quod hanc ſententiam urgeat (76). Si enim dicas (77): ſi omnis poſſibilitas, omne verum a libera voluntate divina pendet, non neceſſarium eſt e. gr. figuram circularem eſſe poſſibilem, ſeu non involvere contradictionem: non neceſſarium item eſt, ſed contingens, omne totum eſſe majus ſuâ parte: omne triangulum habere tres angulos duobus rectis æquales: quod abſurdum eſſe videtur. In promtu eſt reſponſio. Poteſt figura circularis, & pronuntiata iſta, quæ dixi, dupliciter conſiderari, vel in ordine ad intellectum noſtrum, vel in ordine ad voluntatem divinam. Et hoc poſteriori modo iterum vel in ordine ad voluntatem ordinatam, ſeu, quæ nunc eſt, vel in ordine ad abſolutam (78), hoc eſt, ad illam, qua Deus nullo habito reſpectu ad id, quod ſemel decrevit, aut ad quod ſemel ſe determinavit, concipitur ut perfectiſſimè volens, hoc eſt, ita volens, ut omne id, quod vult tale, quale vult, ſit & exſiſtat, ſed etiam ne eſſe quidem ulla ratione poteſt, niſi Deus ſeſe ad hoc determinet. Hoc poſteriori modo ſolùm modò dico omne poſſibile, omne verum a voluntate divina pendere, ita ut figura circularis non ſit poſſibilis, ſi Deus eam poſſibilem eſſe non vellet: ut item pronuntiata iſta: omne totum eſt majus ſua parte, item, omnis trianguli tres anguli æquantur duobus rectis, vera non eſſent, ſi Deus ad eorum veritatem ſe non determinaſſet, hoc eſt, ſi Deus hæc & ſimilia vera eſſe non voluiſſet (79). Atque hac conſideratione nihil ex ſe & ſuâ naturâ eſt poſſibile; nihil etiam ex ſe & ſuâ naturâ verum. At ſuperſunt adhuc duo alii modi, quibus aliquid ex ſe & ſuâ naturâ, ſeu neceſſariò poſſibile & verum ſit. Nempe primò, ſi figura circularis, pronuntiata etiam iſta ſæpiùs jam memorata, referantur ad intellectum noſtrum. Eſt enim certa omninò & infallibilis regula, unde intellectus certiſſimè dijudicat poſſibilitatem alicujus rei, nempe iſta: quidquid verum & realem, nullamque contradictionem involventem conceptum habet, illud eſt poſſibile. Atque hoc modo figura circularis ex ſe & ſuâ naturâ rectè dicitur poſſibilis, quia habet verum & realem, nullamque contradictionem involventem conceptum. Eodem modo eſt certiſſima intellectûs regula, qua veritas effatorum dijudicatur, iſta ſcilicet: quidquid in idea alicujus rei clarè & diſtinctè aut continetur,

(76) Ego quoque nullum uſum hujus ſententiæ video, & vereor, ne ſit inanis in verbis luſus.

(77) Ergo etiam a voluntate divina erit, quòd Deus ipſe ſit.

(78) Igitur ſaltem abſolutè loquendo, ſeu in ordine ad voluntatem divinam abſolutam hæ propoſitiones ſunt contingentes.

(79) Ergo ne divina quidem eſſentia ſua natura erit poſſibilis.

tinetur, aut non continetur, illud de ea re neceſſariò vel affirmatur, vel negatur. Atque hac ratione omne totum majus eſſe ſua parte neceſſariò verum eſt, quia hoc in idea totius & partis clarè & diſtinctè continetur, ut illud hoc majus ſit. Majus enim eſt altero, quod illud alterum habet, & præterea aliam partem aut alias partes. Eadem ratio eſt de ceteris. Deinde ſunt etiam hæc & id genus alia neceſſariò aut poſſibilia, aut vera, ſi referantur ad voluntatem Dei ordinatam, ſeu quæ nunc eſt. Quoniam enim illæ, quas dixi, regulæ omninò ſunt infallibiles, neque ulla major certitudo eſſe poteſt; hinc etiam manifeſtè ſcimus, Deum hæc non reliquiſſe indifferentia, id eſt, ita ut poſſibilia, aut non poſſibilia; vera vel falſa eſſe poſſint, ſed ſeſe actu determinaſſe ad id, ut circularis figura ſit poſſibilis; hoc verò enuntiatum, omne totum eſt majus ſuâ parte, verum (80). Ad quod autem Deus ſe determinat, hoc tale, quale illud eſſe vult, non poteſt non eſſe. Eſt ergò neceſſarium, ex determinatione ſcilicet divina. Atque hoc modo rectiſſimè *Carteſius* noſter omnes illos loquendi modos, tamquam in majeſtatem divinam injurios, & de ſumma voluntatis divinæ perfectione detrahentes, rejecit, quando dicitur, hoc vel illud nequidem per abſolutam Dei potentiam eſſe aut fieri poſſe. Item hoc ita verum eſt, ut per abſolutam Dei potentiam falſum eſſe non poſſit, & contrà. Qua ratione idem in Deo concipiunt, quod Ethnici in ſuo Jove, quem Stygi alligabant aut fato (81). Quid enim aliud eſt, aliquid per abſolutam Dei potentiam fieri non poſſe, aut aliquid ita verum vel falſum eſſe, ut id nequidem per abſolutam Dei potentiam aliter ſeſe habere poſſit, quàm Deum alligare ad ens aliquod omninò immutabile & independens (82), a quo ipſe dependeat, & in quod ipſi nihil poteſtatis competat? Quod omninò conceptui mentis, omnes in volendo perfectiones habentis, repugnat (83).

Ex dictis patet, eſſe aliquid diſſimilitudinis in conceptu intellectûs & voluntatis noſtræ & divinæ. In nobis intellectus quodam modo priùs concipitur

(80) Hi loquendi modi mihi planè abſoni videntur. Deus determinavit, ut circulus eſſet poſſibilis. Quid enim, o! cùm decretum hoc promulgaret, intelligebat-ne circulum, an non? Intelligebat, credo. Nam intellectus eſt natura prior voluntate, ſeu voluntas intellectum ſupponit. Porrò cùm intelligeret, circulum utique clarè diſtincteque intelligebat. Jam quidquid clarè diſtincteque intelligitur (ſive a Deo, ſive a nobis), poſſibile eſt. Ergò poſſibilitas circuli natura prior eſt tali Dei decreto. Breviter: voluntas Dei ſupponit rei volendæ intellectum; intellectus hic involvit rei intellectæ poſſibilitatem. Ergò voluntas ſupponit rei volendæ poſſibilitatem. Si quis aliud dicit, eum, ut mitiſſimè dicam, non intelligo.

(81) Minimè: quia illi non poſſibilitates, ſed exſiſtentias rerum non Deo, ſed neceſſitati rerum ſubjiciebant.

(82) Immò eſt alligare divinam voluntatem ad divinum intellectum.

(83) Minimè, ut oſtendi, neque enim perfectionem voluntatis tam latam fingere debemus, ut ea velit, quæ intellectus non capit.

concipitur voluntate (84). Priùs enim intelligimus, ſeu rem concipimus, quàm volumus, hoc eſt, quàm aliquid circa illam determinamus. Ratio eſt, quia nullum ens, nulla veritas, nullum bonum ut a nobis pendens, ſed ut aliquid in re poſitum, in quod voluntas noſtra nihil poteſtatis habeat, concipitur. Nihil enim ideo ens aut verum aut bonum eſt, quia nos id ens aut verum aut bonum eſſe volumus, ſed quia aliquid ens eſt, adeoque poſitivum conceptum involvit, ideò nos illud percipimus, & quia aliquid in alterius idea contineri aut non contineri videmus, ideò illud affirmamus aut negamus, & quia aliquid ut bonum nobiſque conveniens intelligimus, ideò illud appetimus. Prius ergò aliquid percipimus, quàm nos circa illud determinamus, ſeu volumus. In Deo verò intellectus & voluntatis actus omninò ſimul concipiuntur, ita ut unus altero ne ratione ſeu cogitatione quidem prior intelligatur (85). Deus enim non ideò aliquid ut ens verum, vel bonum, percipit, quia aliquid in ſe & ſuâ naturâ tale eſt; ſed quia Deus aliquid ut ens vel verum, vel bonum, percipit, id eſt, quia aliquid ens vel verum, vel bonum eſſe vult, ideò aliquid ens vel verum, vel bonum eſt. In Deo igitur intelligere & velle ne cogitatione quidem diſtinguuntur; ſed Deus eſt voluntas intelligens, & intellectus volens (86), adeoque actus omnino puriſſimus & ſimpliciſſimus, ſeu agens puriſſimum & ſimpliciſſimum. Hæc de mente perfectiſſima. Nunc videbimus,

an ens ſimpliciter perfectiſſimum implicet contradictionem?

Ita argumentor:

Mens perfectiſſima, qualem explicui, non implicat contradictionem.

At mens perfectiſſima eſt ens ſimpliciter perfectiſſimum.

Ergò ens ſimpliciter perfectiſſimum non implicat contradictionem.

 Pro-

(84) Etiam in Deo intellectus natura prior voluntate, quia nihil Deus vult, quod non intelligat, & multa intelligit, quæ non vult. Voluntas eſt quædam conſequentia intellectûs. Vult enim Deus, quidquid perfectiſſimum eſſe intelligit. Voluntatem inducere, quæ non ſupponat intellectum voliti, eſt ludere in vocabulis.

(85) Minimè verò. Nam ſemper formaliter differunt *intelligere* & *velle*; aut ego neſcio, quid ſit intelligere, quid ſit velle.

(86) Ego has ſententias & phraſes non tantùm puto eſſe abſonas, ſed & periculoſas. Inducunt enim Deum qui non ſit dignus amore; neque enim bonus atque juſtus dici poteſt, ſi nulla eſt conſtans ratio bonitatis & juſtitiæ, quam non ipſe pro lubitu fecerit. Neque laudari meretur propter ea, quæ fecit; nam ſi laudari meretur propter ea, quæ fecit, ſequitur, ea, quæ fecit, eſſe meliora, quàm ſi aliter feciſſet; quod eſt contra hypotheſin, quæ ponit, hoc ipſo, quia fecit, fieri bona; ergò ſi aliter feciſſet, eſſent æquè bona, non ergò alia aliis meliora; præterea Deus utique non eſt auctor ſuæ naturæ, ſeu non ſe volendo poſſibilem reddidit; ergò natura ejus non eſt bona, neque vera, ſiquidem omnis bonitas, veritas, perfectio a Dei voluntate eſt. Ergò neque amari, neque honorari meretur. Quæ ſunt certè plus quàm abſona.

Probatur minor :

Quidquid uno & ſimpliciſſimo, eodemque efficaciſſimo voluntatis ſuæ actu non ſolùm ſemet ipſum ad omne id, quod eſt, neceſſariò, immutabiliter, & æternò, ſed etiam res omnes a ſe diverſas, earumque exſiſtentiam, quin & ipſam illarum naturam, poſſibilitatem, & in univerſum omne verum & bonum ita, ut vult, determinat, illud omnes omninò habet perfectiones, omnes realitates, ſeu ſimpliciter nihil de non ente participat, adeoque eſt ſimpliciter perfectiſſimum. (Ex definitione).

Talis eſt mens perfectiſſima. (Ex demonſtratis.)

Ergò - -

Conſideremus jam omnia, quæ ad probandam exſiſtentiam hujus entis ſimpliciter perfectiſſimi, hoc eſt, Dei, adduci poſſunt. Et

1. quidem ex ipſo primo conceptu Dei immediatè deducitur exſiſtentia Dei, idque duobus modis. Primò conſiderando, illa attributa, *eſſe a ſe*, *eſſe neceſſarium*, *eſſe immutabile*, *eſſe æternum*, involvere ſimplicem ſeu non contradictoriam notionem. Ergò ſunt vera & realia attributa. Ergò in aliqua ſubſtantia, non in materia, neque in mente in communi conſiderata. Ergò in mente quadam particulari, & quidem in perfectiſſima. Ergò mens quædam, quæ dicitur perfectiſſima, a ſe, neceſſariò, id eſt, ipſo actu, immutabiliter, & æterno exſiſtit (87). (Omnia ex demonſtratis).

Deinde quemadmodum ex attributis jam memoratis colligitur, eſſe mentem quamdam perfectiſſimam, ita vice verſa, conſiderando mentem perfectiſſimam, hoc eſt, perfectiſſimè intelligentem & volentem, ſtatim ex idea perfectiſſimæ voluntatis ſequuntur illa attributa, eſſe a ſe, neceſſariò, immutabiliter, & æternò. Ergò mens perfectiſſima, ſeu, quæ perfectiſſimè vult, a ſe, neceſſariò ſeu actu, immutabiliter, & æternò exſiſtit (88). (Itidem ex demonſtratis.)

Eadem concluſio evidenter patet, ſi conſideremus ea, quæ neceſſariò a voluntate Dei pendent. Itaque

2. Eſt ens aliquod actu exſiſtens, quod non eſt Deus. E. gr. mens noſtra ſeu ſubſtantia illa, qua cogitamus. De hujus enim exſiſtentia abſolutè, id eſt, ita certi ſumus, ut ne ſcepticus quidem de ea dubitare poſſit. Ergò Deus actu exſiſtit. Omne enim ens, præter Deum, omne id, quod habet, a Deo habere debet. Ergò quod actu exſiſtit, hanc exſiſtentiam actualem a Deo habere debet. Non poſſet autem eam a Deo habere, niſi Deus etiam actu exſiſteret. Nemo enim alteri dare poteſt, quod ipſe non habet. Eodem modo ex exſiſtentia mundi actuali exſiſtentia Dei actualis

(87) Hæc argumenta non probant exſiſtentiam ex poſſibilitate, ſed alia ab initio adducta, quòd ſcilicet ens neceſſariam habens exſiſtentiam utique exſiſtit, modò ſciatur, tale ens poſſe concipi.

(88) Immò, tantùm poſſibilis.

tualis deducitur. Licèt enim a ſcepticis de exſiſtentia mundi dubitari poſſit; vix tamen quiſquam illorum, qui exſiſtentiam Dei in dubium revocant, de exſiſtentia mundi dubitat. Poſito autem, mundum actu exſiſtere, (quod nemo, niſi ſcepticus, negat), ſequitur, Deum actu exſiſtere. (Omnia itidem ex jam demonſtratis).

3. Ego actu, clarè & diſtinctè percipio multa poſſibilia, id eſt, multas determinatas, nullamque contradictionem involventes naturas, e. gr. naturam trianguli, circuli, quadrati, materiæ, mentis, &c. Ergò Deus actu exſiſtit, ſine ejus voluntate nulla determinata natura, nihil poſſibile eſſe poteſt. (Itidem ex demonſtratis).

4. Ego actu intelligo multas veritates, e. gr. omne totum eſſe ſua parte majus: omne triangulum habere tres angulos duobus rectis æquales, & ſimilia. Ergò Deus actu exſiſtit, a cujus voluntate omne verum pendet. (Ex demonſtratis).

Ita ergò demonſtratum eſt, Deum actu neceſſariò exſiſtere, non ſolùm ex natura Dei, ſed etiam ex natura illarum rerum, quæ ſunt a Deo. Sed ſi quid fortè in iis, quæ tertio & quarto loco dixi, deſideraveris, (quamquam non video, quid deſiderare poſſis), primum ſaltem & ſecundum argumentum ita erit comparatum, ut id nulla vi moveri aut labefactari poſſit, quin ſimul omnis veritas, omnis perceptio, ipſa mentis noſtræ exſiſtentia moveatur, & in dubium vocetur.

Nunc propoſitum alio modo obtinebo. Docet S. Scriptura, Dei exſiſtentiam ex exſiſtentia rerum illarum, quæ ſunt in hoc mundo, colligi & demonſtrari poſſe. Quæritur, quo pacto id fieri poſſit? Ego id longè aliter faciam, quàm communiter id fieri ſolet. Cogita ergò, quid ſentiendum ſit de hoc argumento:

Mens noſtra actu exſiſtit.

Quia, quidquid actu cogitat, hoc eſt, intelligit & vult, illud actu exſiſtit. Nihili enim nulla ſunt realia attributa.

Ergò *vis illa, per quam actu exſiſtit, actualis eſſe debet.*

Quæro vim illam, non ſolùm a qua mens mea exſiſtere cœpit, ſed etiam per quam actu jam exſiſtit, & ad omne id, quod habet, determinatum eſt. Hoc enim eſſe debet a vi, quæ actu etiam jam exſiſtat. Quæ enim vis actualis non eſt, ab illa nihil actuale eſſe poteſt. Et quando olim mens mea exſtitit, inde non ſequitur, quòd jam etiam actu exſiſtere debeat. Unum enim temporis momentum ab alio non pendet (89). Adeoque quod hoc

(89) Hoc etiam paralogiſmi ſuſpectum eſt. Videtur enim ex rei exſiſtentia ſemel poſita neceſſariò ſequi continuatio. Ponamus enim, exſtingui, nulla ratio erit, cur hoc momento, non alio? (niſi aliquid externum ſuperveniat). Ergò nullo modo extinguetur. Et ſi hoc præſenti momento exſtinguitur, cur non jam aliquo præterito. Quod ergò dicitur, unum temporis momentum ab alio non pendere, non debet aſſumi ſine probatione, vel ideo, quia ita ſequitur, continuum actu diviſum eſſe in inſtantia indiviſibilia.

hoc temporis momento mens mea exſiſtit, inde non ſequitur, quòd etiam proximè in ſequenti momento exſiſtere debeat (90). Ergò vis illa, a qua mens mea ſingulis momentis actu exſiſtit, actu exſiſtere debet (91).

Mens noſtra non exſiſtit vi propriâ, ſeu non exſiſtit a ſe.

In mente noſtra nihil actuale eſt, præter actus intellectûs & voluntatis. Nullus autem eſt actus vel intellectûs, vel voluntatis, cujus vi, ſeu per quem mens noſtra exſiſtat. Actus intellectûs & voluntatis ſunt cogitativi. Cogitare autem eſt actus exercere, quorum per ſe ſeu immediatè nobis conſcii ſimus. Nullus autem eſt actus neque intellectûs, neque voluntatis noſtræ, per quem nobis conſcii ſimus, nos propria vi, hoc eſt, a nobiſmet ipſis exſiſtere (92). Percurre enim omnes actus intellectûs & voluntatis tuæ, hoc eſt, omnes perceptiones, omnes volitiones tuas; nullam invenies, per quam tibi conſcius ſis, te hoc *eſſe*, quod mens tua habet, propria vi habere (93). Ergò quoniam nullius talis actûs actu nobis conſcii ſumus, nullus etiam eſt talis actus, cujus vi mens noſtra exſiſtat (94). Implicat enim, eſſe actum cogitativum actu exſiſtentem, per quem mens mea exſiſtat, & me ejus actûs non eſſe per ſe mihi conſcium. Actus enim cogitativus eſt, cujus per ſe mihi conſcius ſum. Ergò quicumque actus cogitativus actu in me eſt, ejus actûs etiam per ſe mihi actu ſum conſcius. Et cujus actûs per ſe mihi conſcius non ſum, is non poteſt eſſe cogitativus.

Deinde nega, te tua propria vi exſiſtere, aut exſiſtere etiam poſſe; hoc ipſo non negabis primarium mentis tuæ attributum, hoc eſt, te intelligere & velle. Clarè enim & diſtinctè ſine dubio cognoſcis, poſſe te intelligere & velle (95), etiamſi a te non exſiſtas, aut exſiſtere etiam poſſis, hoc eſt, etiamſi vim illam intelligendi & volendi a temet ipſo non habeas. Ergò hoc non eſt attributum tuæ mentis *a ſe exſiſtere*. Et cogita, quæſo, quàm evidens ſit id, quod dico. Si enim mens tua aliquid eſſe aut habere poteſt, cujus ſibi non ſit conſcia, quod primo loco dixi; vel etiam, ſi mens tua aliquid eſſe aut habere poteſt, quo negato non negetur primarium ejus attributum, ſeu quod ex primario mentis attributo non fluat; qui certus eſſe potes (96), dum audis luſcinias jam cantantes,

(90) Immò ea ratio, quæ fecit, ut huc uſque exſiſteret, faciet etiam, ut continuet, niſi nova ratio ſuperveniat.

(91) Non eſt opus novâ vi ſingulis momentis, ſed tantùm neceſſe eſt, ut negetur nova vis contraria.

(92) Supponitur hic, nullum eſſe actum in mente noſtra, cujus nobis non ſimus conſcii; de quo ego valdè dubito.

(93) Talia non poſſumus experiri. Nemo enim originis exſiſtentiæ ſuæ conſcius eſſe poteſt; alioqui, antequàm oriretur, eſſet.

(94) Non ſequi videtur: neque enim omnium actuum noſtrorum conſcii ſumus.

(95) Nondum ſcio, an intellectus & voluntas a nobis perfectè intelligantur.

(96) Certum eſt, ea, quorum mihi ſum conſcius, vera eſſe, & quorum contrarii ſum conſcius, eſſe falſa; ſed hinc non ſequitur, quæcumque in me verè ſunt, eorum me eſſe conſcium.

tes, in mente tua non eſſe luſciniam aliquam, quæ nidos ibi faciat, pulloſque ſuos excludat, vel etiam mentem tuam non eſſe luſciniam aliquam cantantem, vel arborem, vel ſolem, vel lunam, vel ipſum etiam hunc mundum ſenſibilem? Nam quidquid dixeris, quo mentem tuam demonſtrabis nihil horum, quæ dixi, eſſe, (uti certè illud demonſtrari poteſt ex hoc principio, quidquid clarè & diſtinctè percipi poteſt, non percepto attributo alicujus ſubſtantiæ primario, illud non eſt attributum ejus ſubſtantiæ) idem ſimul demonſtrabit vim illam, per quam mens tua exſiſtit, ad mentem tuam non pertinere.

Ergò *exſiſtit vi aliena*, ſeu, *exſiſtit ab alio.*

Ergò *actu exſiſtit aliqua ſubſtantia a mente noſtra diſtincta, a qua mens noſtra habet, quod actu exſiſtat.*

Dare enim menti noſtræ actualem exſiſtentiam, eſt attributum aliquod reale & actuale. Ergò debet eſſe in ſubſtantia aliqua actuali ſeu actu exſiſtente.

Illa ſubſtantia eſt ſolus Deus.

Ex Dei conceptu (97), quem dedi, id fluit & deductum eſt, quod rebus omnibus a ſe diſtinctis exſiſtentiam, quam habent, & omne id, quod habent, largiatur. Neque eſt ulla ſubſtantia a Deo diſtincta, ad quam id pertinere poſſit. Non enim hoc pertinet ad materiam, neque ad mentem in communi; ſed ad mentem aliquam in particulari, eamque perfectiſſimam, adeoque ad ſolum Deum. (Omnia ex demonſtratis).

Sed ut brevius hoc, quod dixi, obtineam, neque opus ſit omnia, quæ antè dixi, repetere, ita argumentor: ex primo Dei conceptu fluit, quòd omnibus rebus a ſe diſtinctis, adeoque & menti noſtræ, exſiſtentiam, ſi quam habent, largiatur. Ergò hoc atributum non poteſt pertinere ad ullam rem a Deo diſtinctam: alioqui non flueret ex primo Dei conceptu. Quemadmodum hoc attributum, *eſſe figuram capaciſſimam*, quoniam ex primo conceptu circuli fluit & deduci poteſt, ad aliam figuram a circulo diſtinctam pertinere non poteſt: vel illud etiam, *habere potentiam hypothenuſæ æqualem potentiis laterum*, quoniam ex primo conceptu trianguli rectanguli fluit, ad nullum triangulum, quod non ſit rectangulum, pertinere poteſt. Implicat enim, attributum aliquod ad primum conceptum alicujus rei fluere, & tamen pertinere etiam ad rem ab ea, e cujus primo con-

(97) Dei conceptu poſito, quòd ſit ens, cujus vi omnia exſiſtunt, ſeu cauſſa omnium, omnia vi ſua determinans, ſuppoſito, illum conceptum non eſſe impoſſibilem, & poſito, aliquid exſiſtere, neceſſariò ſequitur, id, quod exſiſtit, aut eſſe Deum, aut a Deo exſiſtentiam habere. Elegans ſatis hæc ratiocinatio. Nec opus eſt illis allatis, quòd mens non ſit a ſe, &c. Eo ipſo enim, quòd Deum definivimus id, quod omnibus aliis exſiſtentiam largitur, erit unicus. Mens autem non id facit. Ergò non eſt Deus; ergò poſita poſſibilitate hujus definitionis Dei, neceſſariò eſt a Deo.

conceptu fluit, diſtinctam. Quod attendenti evidentiſſimum eſt (98).

Ergò Deus actu exſiſtit. Q. E. D.

Ergò quam certum eſt, mentem noſtram, quando cogitat, & quamdiu cogitat, exſiſtere, tam certum etiam eſt, Deum exſiſtere. Hocque argumentum ita eſt comparatum, & ex talibus præmiſſis concluſio demonſtranda, deducta, & derivata, ut ſi vel minimum in illis negaveris, aut in dubium ſaltem vocaveris, eadem opera negandum & in dubium vocandum etiam ſit, mentem tuam exſiſtere cùm cogitat. Igitur evidentiſſimum hoc eſt, Deum exſiſtere.

Alterum argumentum hoc eſt (99):

Mundus ſenſibilis actu exſiſtit. Ex hypotheſi.

Non enim nobis jam res eſt cum ſcepticis, ſed cum iis, qui mundum eſſe concedunt.

Ergò *vis illa, per quam actu exſiſtit, actualis eſſe debet.* Juxta priora.

Non autem exſiſtit vi propriâ, ſeu, non exſiſtit a ſe. Ex prius demonſtratis.

Fusè enim jam docui, eſſe a ſe non poſſe eſſe attributum materiæ. Quæ videri poſſunt.

Ergò *exſiſtit vi aliena, ſeu ab alio.*

Ergò *actu exſiſtit aliqua ſubſtantia a mundo ſeu rebus materialibus diſtincta, a qua mundus habet, quod actu exſiſtat.* Juxta priora.

Illa ſubſtantia eſt ſolus Deus. Itidem per priora.

Ergò *Deus actu exſiſtit.* Q. E. D.

Tantum de illo, quod primo loco explicandum ſuſcepi. Pergo ad reliqua, & quidem ad litterarum tuarum exordium.

Duo moneo ante omnia, ais; *primum, me non negare, nonnulla* (100) *eſſe vera, & demonſtrabilia, quæ tamen a Carteſio demonſtrata fuiſſe negavi.*

Concedo, non nonnulla ſolùm, ſed innumera demonſtrabilia a *Carteſio* ne cogitata quidem, nedum demonſtrata eſſe. Sed quoniam id ſine dubio intelligis de exſiſtentia Dei, illa a *Carteſio* aut apertiſſimè demonſtrata eſt, aut, ſi non ſatis clarè ſe explicuit, ego beneficio methodi Carteſianæ id me feciſſe arbitror (101). Addere illud auſim, ſi demonſtrabilis eſt exſiſtentia Dei, illam nullo alio modo demonſtrari poſſe, quàm alterutro modo, quo *Carteſius* id fecit: nempe, vel ex ſolius naturæ divinæ conſideratione, (quod argumentum jam tractamus), vel ex conſideratio-

(98) Poſito ſcilicet, non implicare; quod tamen nondum eſt probatum.

(99) Hæc ratiocinatio coincidit propemodum præcedenti, ut patet.

(100) De quibus hic ſermo eſt.

(101) Elegantia ſatis hæc allata ſunt; ſed quæ in illis probo, mihi non videntur deberi methodo Carteſianæ, nec video, quid tandem in ſe peculiare habeat illa toties jactata methodus Carteſiana, quod nos reliqui ignoremus.

ratione ideæ Dei: quod argumentum in *Carteſio* exſtat, mihique per ſe ſatis clarum videtur (102).

Alterum, ita pergis, *me non attuliſſe novam demonſtrationem in ea, quam tibi miſi, ſcheda, ſed voluiſſe purgare Carteſianam ab inutili & dubitationibus obnoxia perfectionis mentione.*

Quid hac de re ſentiendum ſit, & an perfectionis vocabulum ſit inutile, & dubitationibus obnoxium, jam ſatis patere puto (103).

Ad ea, quæ tertio loco dicis, non neceſſe eſt prolixè reſpondere. Summa enim eorum, quæ affers, huc redit: ſcholaſticos idem argumentum habere, quod *Carteſius*, qui inutilem vocem perfectionis addiderit. Supplendam autem eſſe ſcholaſticorum demonſtrationem, & demonſtrandum, ens neceſſarium non involvere contradictionem. Reſpondeo: an argumentum *Carteſii* idem ſit, quod ſcholaſticorum, id mihi jam perinde eſſe poteſt, dummodò ſit verum. Nihil enim abſurdi eſſet, ſi ſcholaſtici veritatem æquè vidiſſent, ac *Carteſius*. Immò tanto melius id eſſet, ſi illis hæc veritas æquè ac huic patuiſſet. Ceterùm *Carteſius* in reſponſionibus ſuis metaphyſicis fusè docet, modum ſuum argumentandi longè diverſum eſſe a modo argumentandi ſcholaſticorum, quem hic exſcribere nihil attinet. Sed fac *Carteſium* a ſcholaſticis hac in re non abire, an ea etiam, quæ ego jam attuli, eadem ſint cum iis, quæ ſcholaſtici olim de exſiſtentia Dei differuerunt, & quæ adhuc in ſcholis hac ſuper re diſputari ſolent, tuum jam erit judicium (104).

Perfecti vocabulum non eſt inutile, quia id Latinè dicit, quod *reale* barbarè effert. Omitti autem & hoc, vel aliud etiam in illius locum, ſi lubet, ſubſtitui poteſt, dummodò de re ipſa conſtet. Ens neceſſarium nullam contradictionem involvere, etiam ſatis ſuperque patere puto.

Nihil itaque reſtat, quàm ut me de prolixitate hujus epiſtolæ excuſem, Deoque optimo maximo ſimul gratias agam, quòd opera & cura divini *Carteſii* eam tandem aliquando philoſophandi methodum (105) excitaverit,

(102) Neceſſe eſt, ut omnis demonſtratio, qua probatur Deus, derivetur vel ex conſideratione naturæ divinæ ſolius, vel accedente præterea conſideratione mentis noſtræ, aut aliarum rerum exſiſtentium in genere aut in ſpecie.

(103) Manifeſtum eſt *perfectionis* mentione careri poſſe, ſi quis modò oſtendat, ens neceſſarium, id eſt, ens, ex cujus eſſentia ſequitur exſiſtentia, non implicare contradictionem, idque ens eſſe Deum definiverit, jam Deum eſſe demonſtraverit.

(104) Haud dubiè hic multa elegantia & non vulgaria ſunt allata. Interim fateor, ſæpè præclara etiam & ingenioſa in ſcholaſticis reperiri.

(105) Mea opinione nihil *Carteſius* ad methodum contulit, ſed tantùm poſt *Galilæum* illuſtribus ſpeciminibus homines magis magiſque excitavit. Sed quod ad Deum & mentem attinet, a propoſito longiſſimè abfuit. Ceterùm nemo Carteſianorum quidquam alicujus momenti poſt *Carteſium* invenit: quod ſignum eſt, *Carteſium* egregia, quæ dedit, non vi methodi, ſed vi ingenii & peculiarium animi dotium præſtitiſſe.

citaverit, cujus beneficio in intimam non ipſius ſolùm, ſed reliquarum etiam rerum omnium naturam penetrare, veritatemque hactenùs incognitam feliciſſimè eruere, & in lucem protrahere poſſimus. Hujus tutelæ etiam atque etiam te, vir nobiliſſime, commendo. De me hoc tibi perſuadeas velim, eſſe me ſemperque fore nobiliſſ. amplitud. tuæ obſervantiſſimum cultorem. A. E. *Scribebam Rintelii ad diem Maii 1677.*

(7.)

ECKHARDUS LEIBNITIO.

De iis, quæ per ſe concipiuntur.

IPſum *eſſe* videtur per ſe concipi. Ponamus enim, concipi per alia, ut *a.* & *b.* videtur de his quoque *eſſe* poſſe concipi; quod abſurdum eſt. Exſiſtentia ergò eſt notio impoſita ſeu irreſolubilis.

Quemadmodum exſiſtentia per ſe concipitur, ita videtur etiam per ſe concipi eſſentia ſeu realitas in genere, ſive poſſibilitas [vel intelligibilitas].

Omnes res habent aliquid commune, ipſam ſcilicet eſſentiam ſeu realitatem. Omnes res homogeneæ ſunt quoad eſſentiam ſeu realitatem; uti omnia corpora ſunt homogenea quoad molem.

Diſcrimen realitatis & eſſentiæ. Eadem eſt in omnibus realitas, non verò eadem in omnibus rebus eſſentia.

Quoniam realitas in omnibus una, eſſentia diverſa; ideò id, in quo diſtinguuntur, non debet continere realitatem, ſiquidem poſitivum eſt. Nam contineat differentia ipſorum A. & B. contineat iterum realitatem, ideò non erit differentia mera. Ergò pura ſeu mera duarum rerum differentia, in qua ſcilicet nihil ſit ampliùs commune, nullam continebit realitatem abſolutam.

Breviùs & clariùs. Sint duæ res A. B. utique diſtinctæ: aſſignetur ergò, tum quod eſt in ipſis commune, tum quod eſt in ſingulis, ſeu differentia pura, nihil ampliùs commune continens: aio, differentiam non continere realitatem, quia realitas eſt aliquid commune, quod in differentia pura contineri non debet. Re tamen accuratè expenſa videtur ineſſe ſophiſma ratiocinationi, & poſtulatum eſſe impoſſibile. Nam cùm omnia, quæ concipiuntur a nobis, ſint realia cogitabilia, (nihil aliud enim realitas, quàm cogitabilitas) ideò non debemus poſtulare ultimam quamdam differentiam, in qua nulla inſit realitas ſeu cogitabilitas: nam ſupponimus, omnibus ineſſe. Sed hinc porrò ſequetur, nihil a nobis cogitari ſimpliciſſimum: ſaltem enim duo habet, cogitabilitatem & ſpeciem cogitabilitatis; aliquid ſcilicet commune, & aliquid proprium. Sed in hoc pro-
prio

prio rurſus eſt cogitabilitas; alioqui non cogitaretur. Ergò hinc ſequetur, illa duo non eſſe ſeparanda, nec a nobis cogitari, niſi uno actu.

Circa ſubjectum & adjunctum etiam magna eſt ſubtilitas. Nos ſubjectum ſeu ſubſtantiam cogitamus, dum dicimus: *ego*, *ille*, *hoc*. In his enim aliquid commune cogitamus, id eſt, ſubjectum in corporibus ipſis quoque quaſi per proſopopœiam. Omnis qualitas cogitabilis componitur ex cogitabilitate & ſubjecto cogitabilitatis. Huic ſubjecto ineſt cogitabilitas; ſed aliud eſt cogitabilitas, aliud ſubjectio. Ergo hæc ſubjectio cogitari non poteſt.

(8.)

ECKHARDUS LEIBNITIO.

ECKHARDUS *gratias agit* LEIBNITIO *de commendatione apud Principem ſuum, qua factum, ut ex Academia Rintelienſi vocaretur ad ephoriam Ieinſenſem, Hanoveranæ urbi proximam.*

RENuntiatum mihi eſt a reverendiſſimo Domino Abbate Luccenſi, quàm graviſſimum iſtum caſum, qui me per aliquot menſes afflixit, tandemque de omni priſtino ſtatu dejecit, familiariter tuleris: quantaque fide, curâ, & diligentiâ Sereniſſimo Brunſvicenſium ac Luneburgenſium Duci, hero tuo, & item meo clementiſſimo, me ſtudiaque mea commendaveris. Quo nomine equidem gratias tibi ago maximas: majores etiam habeo: memor futurus ſummorum tuorum in me meritorum, dum ſpiritus hos reget artus. O miram divini Numinis in me benignitatem, quam in mediis meis anguſtiis ſenſiſſe me, impius ſim, ſi negem! Dum enim fortunæ fluctibus agitatus nil niſi præſentiſſimum omnium fortunarum naufragium ante oculos video, adeſtis illico vos, ſummi viri, tantoque Principi digni Miniſtri, rebuſque meis feſſis opem tempeſtivi acceleratis. Vos e ſæviſſima hyeme turbulentiſſimaque tempeſtate in exoptatum tranquillitatis portum me adduxiſtis. Veſtra egomet opera terram illam teneo, ubi & ego, & ſtudia mea (nec vanum ſpero augurium) ſpiritum, vitam, vigorem recipiemus. Faxit ille, a cujus nutu cuncta humana pendent, ut omnia cedant feliciter: egoque ſereniſſimo hero devotiſſimum animi affectum, fideliſſimaque obſequia; tibi autem, ampliſſime vir, & reliquis novi fati mei conciliatoribus ſtudia, cultum, & obſervantiam meam ita probem, ut nec vos dati beneficii pœnitere, nec me accepti pudere umquam poſſit! Vale, vir nobiliſſime, faveque nobiliſſimæ amplitudinis tuæ obſervantiſſimo A. E. *Scribebam Rintelii ad d.* 5. *April.* 1678.

(9.)

LEIBNITIUS ECKHARDO.

DOctiſſimas & amplas magis, quàm prolixas litteras tuas ut primum accepi, ſtatim devoravi totas. Nihil enim eſt, quod legam lubentiùs, quàm quæ de tanti momenti argumento tam eleganter ac ſolidè ſcribuntur. Reſponderem fuſiùs, niſi reverendiſſimus Abbas Loccumenſis ſpem feciſſet ſecuturæ ratiocinationis in demonſtrationis forma. Hanc enim exſpectare malui. Sed quoniam nondum advenit illa demonſtratio, hæc pauca interea reponenda putavi, ut intelligas, acceptas mihi lectaſque ſtudiosè litteras tuas. Poſtquàm explicuiſti, perfectionem tibi eſſe entitatem, in quantum a non entitate recedere intelligitur, vel, ut ego definire malim, *perfectionem* eſſe gradum ſeu quantitatem realitatis ſeu eſſentiæ, ut intenſio gradus qualitatis & vis gradus actionis, ceſſant nonnullæ mearum objectionum. Patet etiam, exſiſtentiam eſſe perfectionem, ſeu augere realitatem, id eſt, cùm concipitur *A. exſiſtens*, plus realitatis concipi, quàm cùm concipitur *A. poſſibile.* Quamquam etiamnum videatur hinc ſequi, plus perfectionis ſeu realitatis eſſe in animo dolente, quàm in indifferente, qui nec gaudeat, nec doleat, adeoque, metaphyſicè loquendo, etiam dolorem eſſe perfectionem. Quoniam verò voluptas eſt etiam perfectio metaphyſica; quærendum videtur, dolorne, an voluptas, metaphyſicè loquendo, major ſit perfectio? Et videtur voluptas eſſe major perfectio, quia eſt conſcientia potentiæ; quemadmodum dolor conſcientia imbecillitatis. Imbecillitas autem etiam metaphyſicè loquendo minùs perfecta eſt, quàm conſcientia metaphyſicæ perfectionis. Atque ita dolor quamdam in dolente imperfectionem ſupponit. Superſunt tamen & hic ſcrupuli quidam, quos nunc prætereo. Ad arcem cauſſæ propero, quæ eſt: *utrum ens perfectiſſimum non implicet contradictionem.* Hoc enim demonſtrare ſuſcepiſti: quod neque *Carteſius* fecit, neque Carteſianorum quiſquam; licèt a me ſæpe ſint admoniti. Optimam id demonſtrandi ingrederis viam. Nam ſi confeceris, perfectiſſimi conceptum non eſſe compoſitum, etiam non implicare contradictionem concluſiſti. Promittis ergò, te aſſignaturum eſſe conceptum aliquem, quem conſtet & ſimpliciſſimum eſſe, & omnem involvere realitatem. Conceptus autem, quem aſſignas, hic eſt, ut ens perfectiſſimum, vel ens a ſe, vel ens neceſſarium ſit, quod ſe ipſum ad id omne, cujus capax eſt, determinat. Hunc conceptum, ais, non implicare, 1.) quia ſit diſtinctus: nam ſingulæ ejus partes ſunt claræ, 2.) præſertim cùm & omnes dividant ens in id, quod eſt a ſe, & quod ab alio: neceſſe eſt ergò, aliquam illis ſubjectam eſſe notionem; alioqui homines ut pſittaci loquerentur. 3.) Præterea ſcimus, quid

quid ſit, eſſe ab alio, ſeu ab alio ad aliqua determinari. Ergò ſciemus etiam, quid ſit, ab alio non determinari. 4.) Præterea experimur, non implicare hunc conceptum, *determinari a ſe* : hoc enim quotidie in volitionibus noſtris experimur. 5.) Item, purus actus ſimplicior actu cum poſſibilitate mixto. Ergò cùm hic non contineat implicantia, multo minùs continebit ille. Quin immò addis, nihil aliud ad ens perfectiſſimum requiri, quàm ut ſit mens perfectiſſima, id eſt, cui omnes competant perfectiones, quæ in aliquam mentem cadunt. Quoniam 6.) omnis ſubſtantia aut mens eſt, aut corpus. Ens autem ſe ipſum determinans non eſt corpus; ergò erit mens. Mens autem perfectiſſima utique non implicat: nempe mens perfectiſſimè intelligens & volens. Perfectiſſimè intelligere, ſeu omnia intelligere, non implicat contradictionem, quia nec intelligere. Ita omnia uno actu ſemper intelligere non implicat, quia plura uno actu aliquamdiu intelligere non implicat. Ipſi enim intellectioni repugnat nihil aliud, quàm non-intellectio, non-intellectio perfecta. Mens etiam perfectiſſimè volens non implicat, ſeu quæ omnia, quæ vult, poſſit. Nam ipſi potentiæ non opponitur, omnia poſſe, ſed ipſum non poſſe. Quia ergò ens ſe ad omnia, quorum capax eſt, determinans eſt mens perfectiſſima, adeoque perfectè volens ſeu omnipotens; ſequitur, omnes alias realitates ab ipſo eſſe. Atque ita 7.) alteram quoque partem probas aſſerti tui, ſcilicet, quòd conceptus, quem enti perfectiſſimo aſſignas, non tantùm non implicet, ſed & omnem aliam perfectionem producat, ſeu eminenter contineat. His jam oſtenſis 8.) probas exſiſtentiam entis perfectiſſimi etiam alio modo, ex exſiſtentia entium quorumdam contingentium, e. gr. mentis noſtræ, ut mundi. Talia enim entia neceſſe eſt accepiſſe ſuam exſiſtentiam ab eo, cujus natura hæc eſt, ut alia omnia ab eo fluant. His, ni fallor, ratiocinationum tuarum compendium continetur, quæ a te præclarè atque eleganter deducuntur. Dicam ingenuè ac ſincerè, quid etiamnum ad abſolutæ demonſtrationis perfectionem in ſumma deſiderem. Ad 1.) reſpondeo: non ſufficit ad diſtinctum conceptum, quod omnes partes ejus ſint claræ, niſi illud etiam clarum ſit, poſſe eas conjungi inter ſe. Ita, qui dicit maximam velocitatem, intelligit, quid ſit velocius, quid maximum; nec tamen intelligere poteſt maximam velocitatem. Ea enim implicat, ut facilè demonſtratur. Ad 2.) quemadmodum, qui dicunt maximam velocitatem, non loquuntur ut pſittaci, etſi aliquid dicant, cui nulla ſubeſt notio poſſibilis; ita & objici poteſt illos facere, qui ens a ſe enuntiant. Ad 3.) non ſequitur, oppoſitorum uno intelligibili exſiſtente, intelligibile eſſe & alterum: poteſt enim fieri, ut alterum oppoſitorum implicet. Ut ſi hominem dividas in rationalem & irrationalem, corpus in mobile & immobile. Ita & ſi ens dividas in id, quod eſt ab alio, & quod non eſt ab alio. Ad 4.) an a nobis, an verò potiùs ab objectorum impreſſionibus determinemur ad volendum, magna

adhuc quæſtio eſt. Ad 5) videtur eſſe σόφισμα. Eodem modo ſumma vel pura celeritas erit ſimplicior (in ſpeciem) celeritate, quæ cum tarditate mixta eſt. Et tamen ſimplex illa celeritas implicat; mixta tarditati non implicat. Et re rectè inſpectâ, purus actus ſupponit multa & magna, nempe tot potentias, quot ſunt res, ad quas ſe determinare debet; immò potentiam excludendi & velut repellendi potentias externas. Unde vides, quàm lubricum ſit argumentum hoc: actui non repugnat niſi non-actus; ergò purus actus non repugnat: quaſi verò certum ſit, omnes actus omneſque potentias ſecum invicem ſtare poſſe. Adverſarii credunt, talia entia, in quæ omnem virtutem, omnem actum velut coacervamus, eſſe chimærica. Ad 6.) aſſumitur ſine probatione, omnem ſubſtantiam eſſe mentem aut corpus: quod tamen certum non eſt; etſi nullæ aliæ a nobis umquam ſint cogitatæ. Poſſunt enim aliæ eſſe fortè, de quibus non magis cogitamus, quàm cœcus de coloribus. Ut probes, mentem omnia intelligentem perfectiſſimè volentem, ſeu omnia potentem, non implicare, eodem, quo antè, (ſi quid judico,) paralogiſmo uteris, quia ipſi intelligere opponitur non intelligere; non, omnia ſimul ac ſemper intelligere. Eodem argumento probabis etiam, oculum, omnia ſimul ac ſemper videntem, eſſe poſſibilem. Idem eſt, cùm ipſi *poſſe* opponi ais impotentiam; non potentiæ perfectionem. Hæc ad ea, quibus probas, conceptum entis ſe determinantis non implicare. Probatio autem, qua contendis, ens illud, quod ſe ipſum determinat, etiam alia omnia determinare, adhuc debilior, minuſque elaborata videtur. Nam huc redit: ens, ſe ipſum determinans ad omnia, quorum capax eſt, non eſt corpus. Ergò mens &c. (Aſſumitur ergò, quod minimè demonſtratum eſt, omnem ſubſtantiam eſſe mentem vel corpus). Porrò quia mens, nec mens quælibet, ideò erit mens aliqua in particulari; quæ alia ergò, quàm perfectiſſima? (quam poſſibilem eſſe, eo, quem dixi, paralogiſmo probare conaris). Sed hoc non ſequitur: poteſt enim menti perfectiſſimæ cum aliis quibuſdam mentibus commune eſſe, ut ſe ipſam ad omnia, cujus capax eſt, determinet. Nec enim ſtatim perfectiſſima erit, quæ ſe ipſam determinat, quia fieri poteſt, ut alia detur perfectior, ſe etiam ad omnia, cujus capax eſt, determinans. Nam perfectior mens cum plurium capax ſit, ſe etiam ad plura determinabit. At verò, inquies, mens perfectiſſima eſt omnipotens; ideò omnia alia poteſt, ſeu determinat. Ergò non poſſunt eſſe plures mentes ſe determinantes. Reſpondeo, non eſſe probatum, talem mentem perfectiſſimam poſſibilem eſſe, & præterea ſufficit ad perfectionem mentis, ut omnia ſciat, omniaque, quæ velit, poſſit. Hinc verò non ſequitur, omnia poſſe, quæ non omnia volet. Neque enim volet, quæ non eſſe in poteſtate intelliget, id eſt, non volet ea determinare, quæ jam per ſe determinantur. Ratiocinatio 7.) ſupponit, tale ens perfectiſſimum, a quo ſcilicet omnia ſint, poſſibile eſſe; ideoque non indiget peculiari reſponſione.

Hæc

Hæc ſunt, quæ per compendium tuis ratiocinationibus reponi poſſunt, ut, quidquid mihi adhuc ſcrupulum moveat circa rei ſummam, velut in tabula depictum videas. De reliquo multa a te pulchrè dicuntur, quæ nunc non attingo. Multa etiam paſſim inſpergis, quibus aſſentiri non poſſum: quale illud eſt Carteſianum, quòd æternæ voluntates ſint a voluntate Dei; quod mea ſententia aut error eſt, aut logomachia. Multa præclara affers de natura actionis, potentiæ, neceſſario, immutabili, æterno, voluntate, cogitatione, voluptate, dolore, quæ laudanda, non refutanda ſunt. Paſſim tamen annotavi nonnulla, quæ tibi, opinor, non ingrata futura, eaque tibi alias mittam vel ideò, ut ampliorem habeas materiam ingenii dotes explicandi. Ego in ſumma illud arbitror, *Carteſium*, quod maximè in hoc negotio deſiderabatur, poſſibilitatem entis perfectiſſimi probare ne aggreſſum quidem; itaque quod a te hoc loco factum eſt, non pro Carteſiano a me haberi, ſed pro tuo. Nam quod Carteſiana methodo id a te factum ais, non capio. Quid eſt enim, obſecro, illa toties a nonnullis jactata methodus Carteſiana? Et quid habet, quod nos alii ignoremus, aut quo non omnes benè ratiocinantes ante *Carteſium* natum ſint uſi? An fortè & *Archimedes* & *Galilæus* Carteſiani fuere? In Geometria, fateor, methodum dedit *Carteſius*; ſed illa neque a *Vietæa* multum abeſt, & multum abeſt a perfectione. Nam ad innumera, & potiſſima ac pulcherrima problemata non pertingit. Falſum enim eſt, problemata omnia ad æquationem revocari poſſe, quæ poſtea, per curvam aliquam, quales *Carteſius* recipit, conſtrui queat. Ego ingenium *Carteſii* & judicium maximi facio; ſed quæ vi ingenii præſtantis peregit methodo quadam ſingulari a ſe præſtita orbi perſuadere voluiſſe, ut ſcilicet allicerentur homines ſpe artem reperiendi, qua mediocre ingenium eximio æquari poſſit. Ego verò video, neminem ferè Carteſianum quidquam dediſſe, quod ad inventa magiſtri vel eminùs accedat, & quæ poſt *Carteſium* præclara reperta ſunt, ejus methodo non deberi; immò neſcio qua fortunæ invidia a quibuſvis potiùs, quàm Carteſianis, inventa eſſe. Quare nolim, vir clariſſime, tibi aliiſque eximiis philoſophis injuriam fieri, & quidquid ab ipſis producitur egregium, id ſtatim credi Carteſianum. Illud quoque obſervo, quicumque uni auctori nimis aſſueſcunt, plerumque ſibi obſtruere progreſſus ulterioris vias. Sed hæc de his nunc quidem. Varietatis cauſſa adjicio demonſtrationem cujuſdam ſingularis theorematis circa cycloidem a me reperti, quod Gallus quidam a me ſibi mitti poſtulat. Ego tibi examinandam ſubjicere volui. Rogo, ut mihi remittas. Non enim deſcribendi otium fuit, & talia per alium non commodè deſcribuntur.

(10.)

POST-SCRIPTUM EPISTOLÆ ECKHARDI AD MOLANUM.

QUæ a domino *Leibnitio* ad me miſiſti, mirificè mihi placent: illiſque reſponſum aliquod paro propediem ad vos mittendum. Objectiones, quas fecit, ad rem valdè faciunt; ad quas tamen ſatis commodè reſpondere, difficultateſque omnes amoliri me poſſe non diffido. Certat in hoc viro cum eruditione humanitas, alteraque alteri non cedit. Ego licèt eruditione ab ipſo me vinci non diffitear, id tamen operam dabo, ne humanitate etiam vincar. Theorema mathematicum nuper mihi tranſmiſſum deſcripſi, illudque jam remitto, gratiaſque ago viro nobiliſſimo, quod ſcientiam meam ingenioſiſſimo hoc invento augere non dedignatus fuit. Quòd autem judicium meum ea ſuper re inſuper requirit, humanitatem ejus agnoſco. Demonſtratio ſatis liquida eſt, & ex ſuppoſitis aptè & concinnè deducta. De horum veritate dubitari non poteſt, cùm poſterius a magnis Mathematicis, demonſtratum ſit, prius autem ex ipſius figuræ inſpectione pateat. Eſt enim linea *C D* a rotatione arcûs quadrantis *A D C* deſcripta, adeoque ipſi æqualis. De cetero gratulor ampliſſimo viro de tam nobili invento, quod vel ſolum ſummis quibuſque Mathematicis illum æquiparandum docet.

(11.)

ECKHARDUS SERENISSIMO DUCI BRUNSVIC. HANOVERANO.

Idem Sereniſſimo Jo. Friderico *de inſigni iſto beneficio gratias agit.*

Sereniſſime Princeps, Domine clementiſſime.

INter innumeros alios clientes, qui virtutum tuarum, quarum fulgentiſſimi radii longè lateque diſſeminati agmine quaſi facto mortalium oculis undique ſeſe impingunt, majeſtatem & gloriam propiùs agnituri, atque in ipſo lucis ſplendoriſque ſui fonte ac ſede adoraturi aditum ad te affectant, & ego compareo: non ingenii, non doctrinæ, (utpote qui doctorum principibus adeo me non annumero, ut civitatis inter plebem vix capacem me eſſe profitear), ſed humanitatis tuæ, quam reliquarum virtutum tuarum, principale illud dignitatis ſolium, quo ſummo tuo merito, publicoque omnium hominum bono emines & effulges, inſtar luci-

diſſimarum

diſſimarum quarumdam ſtellarum ornantium ac diſtinguentium choro tam admirabili mixtura, ſuaviſſimoque concentu, ſocias & conjungis, clementiſſimique affectûs illius, quo litteratos optimorumque ſtudiorum cultores complecteris, foves, tutaris, fiducia. Quid dico fiducia? immò certiſſimo divinæ virtutis iſtius tuæ, in cujus me laudes admirationis quidam æſtus abripuit, luculentiſſimoque in memet ipſum nihil tale exſpectantem, nihil tale merentem experimento. Dum enim ſeu fato, ſeu inimicorum æmulorumque injuria, ſeu denique (quid enim ceſſem id, quod res eſt, enarrare) errore quodam meo naviculam meam fortunæ fluctibus agitatam non ſatis peritus gubernator frango, omnibuſque rebus, præterquàm mihimet ipſi, excido, præſto mihi ſunt (Deus bone, quis putaſſet!) ſummi quidam viri, clariſſima illa aulæ tuæ lumina, maximaque non tuarum ſolum terrarum, ſed totius Germaniæ ornamenta: qui, non ſecùs ac fidi illi hominum generi delphini, de quibus tam mira prædicant non ſubleſtæ fidei auctores, me humeris quaſi ſuis exceptum, eque media hyeme turbulentiſſimaque tempeſtate in litus exportatum ad pedes tuos, domine, devolvunt, gratiamque tuam præter meritum ſuum afflictis tam promtam, tamque paratam, pro me orant, & dictum factum exorant. Ita per tot ego jactatus labores felici quodam errore meo, clementique fatorum inclementia, in terras tuas, tamquam in fortunatas inſulas delatus, ſolem illum, ſerenitate ſua noctem, qua circumdatus hactenùs fui, diſſipantem, nebulas disjicientem, tempeſtates fugantem, ſalutiferoque ſuo influxu mihi ſtudiiſque meis ſpiritum, vitam, vigorem, incrementa reducentem, rara Dei benignitate ſuſpicio; & rectiùs multo, quàm Perſæ exorientem olim cœlo ſolem, omni pietate devotiſſimoque animi affectu exoſculor, colo, deveneror. Macte, ſereniſſime domine, iſta tam præclara & non hujus ævi indole tua! macte hac tam ſolida divinæ bonitatis tuæ laude! macte tam rara, & numquam ex merito deprædicanda ſatis in bonæ mentis candidatos clementia! Ego quidem diem iſtum, quo te, inclytiſſime Princeps, ſalutis meæ benigniſſimum aſſertorem, fortunarum mearum clementiſſimum ſtatorem ſalutare divinitùs mihi contigit, omnium dierum candidiſſimum lætiſſimumque mihi illuxiſſe judico: oblatiſque ea, qua par eſt, humillima animi reverentia Sereniſſimæ Celſitudini tuæ devotiſſimis ſtudiis, fideliſſimiſque obſequiis meis, Deum opt. max. ſupplex oro & obteſtor, ut te magni Imperii maxime Princeps, per medios plauſus, per media præconia, medias per laudes triumphalibus quaſi quadrigis vehentem, inſtarque ſalutaris cujuſdam ſideris magno Europæ, majori Germaniæ, maximo Chriſtiani nominis bono omnia illuminantem, omnia foventem, omnia diſcutientem non niſi percurſo ampliſſimo illo gloriæ laudumque tuarum ſpatio, expletaque vivendi ſatietate, cœlo manſuræque felicitati redonatum æternis gaudiis præmiiſque caducas omnes coronas, omniaque peritura ſæculi tropæa longiſſimè ſuperantibus, propitius beet

mactet-

mactetque. In quo omine finio: quod concipiebam *Rintelii ad diem* 5. *Aprilis* 1678.

Sereniſſimæ Celſitudini tuæ &c. &c.

(12.)

ECKHARDUS ABBATI MOLANO.

ARNOLDI ECKHARDI *ſolutio problematis a* LEIBNITIO *per Abbatem* MOLANUM *ei propoſiti.*

SI Arithmetico diceres, adde mihi bis duo, ita ut inde emergant quinque, aut nega, poſſe te πᾶν πρόβλημα ἀριθμητικὸν λύειν; tuane hæc erit culpa, qui ea, quæ fieri non poſſunt, imperas, an arithmetici, qui id, quod vis, facere non poteſt?

Problema tuum tale eſt:

Invenire △*lum rectangulum, cujus latera ſint numeri rationales, & area ejus ſit numerus quadratus.*



Eſto AB = 2 Z
AC = Z

Erit area △li rectanguli ABC per ZZ y □to.

Add. □tum AB = 4 ZZ
□to BC = ZZ

Aggr. 5 ZZ = □to AC.

Unde ZV 5 = hypothenuſæ AC, quæ eſt quantitatis irrationalis.

Patet itaque, poſtulari aliquid hoc problemate, quod fieri nullo modo poſſit.

Explicabo tibi, cui, quid notæ illæ algebraicæ velint, exquirere fortaſſe non vacat, rem omnem valdè diſtinctè. Problema illud duo poſcit, quæ non magis conjungi poſſunt, quàm aggregatum ex bis duobus & numerus quinarius. Quod ita demonſtro: poſtulat problema primò, ut area △li rectanguli ABC ſit numerus quadratus. Jam duo ſunt manifeſta: primò,

primò, non fieri numerum quadratum, niſi ex ductu quodam numeri in ſemet ipſum (1), & deinde aream △li rectanguli produci ex multiplicatione dimidii catheti, ſeu dimidiæ altitudinis AB in baſin BC, aut vice verſa dimidiæ baſeos in cathetum ſeu altitudinem. Quibus poſitis, *ſi area △li rectanguli* ABC *numerus quadratus eſſe debet, altitudo ejus* AB *duplum eſſe debet baſeos BC* (2) aut vice verſa, hoc eſt, ſi AB eſt 2, BC erit 1: ſi illa 4, hæc 2: ſi illa 6, hæc 3. Et ſic in infinitum. Nam primo caſu dimidia AB erit 1., quæ ducta in BC, quæ itidem eſt 1. producit numerum quadratum 1. In ſecundo caſu dimidia AB, quæ eſt 2. ducta in BC. quæ eſt 2. producit 4. numerum quadratum. In tertio caſu dimidia AB quæ eſt 3, ducta in BC. quæ itidem eſt 3. producit numerum quadratum 9. Et ſic deinceps. Unde ſi BC eſt Z, AC. neceſſariò eſſe debet 2Z, ſcilicet ejus duplum; alioqui numquam proveniet area quadrata; quemadmodum jam demonſtratum eſt. Unde jam intelligi poteſt, quam ob rem AB poſuerim per 2Z & BC per Z, hoc enim ex natura problematis fieri aliter non potuit. Sed ſi altitudo AB ſumatur dupla baſeos BC quod, ut ex demonſtratis patet, neceſſariò fieri debet, ſi area numerus eſſe debet quadratus; hypothenuſa AC numquam erit numerus rationalis; quod tamen ſecundo loco in problemate requirebatur. Quod ita demonſtro: Quoniam in triangulo rectangulo ABC, duo quadrata AB & BC æquantur quadrato AC, multiplico

AB 2Z
per AB per 2Z

product. 4ZZ □ AB

Similiter multiplico BC Z
per BC per Z

product. ZZ □ BC.

Add. □tum AB = 4ZZ
□to BC = ZZ

Aggr. erit □tum AC = 5 ZZ. Ergo ſi ex □to AC ſeu 5 ZZ extrahatur radix quadrata, erit radix illa ipſum latus AC. Jam verò radix ex ZZ eſt Z; at radix ex 5 eſt quantitas irrationalis, ſeu in numeris dari non poteſt. Unde hypothenuſa AC, ita notatur Z√5, quod idem eſt, ac ſi

(1) Immò etiam ex ductu aliorum numerorum, e. g. 16 ex 2 & 8. 36 ex 3 & 12.

(2) Eſt error. Sequeretur pari jure, productum ex duobus numeris inæqualibus, verbi gratiâ, unumquodque parallelogrammum rectangulum, non poſſe æquari quadrato.

ſi dicas, radicem ex 5 extrahendam, & quod inde reſultat per Z multiplicandum eſſe, productum fore hypothenuſam A C, at radix ex 5 in numeris dari nequit.

Sed ſi hoc adeo manifeſtum tibi non erit, adhuc clariùs me explicabo. Duo requiruntur in problemate, unum, ut omnia latera △li A B C ſint numeri rationales, alterum, ut area ſit numerus quadratus. Ut omnia latera ſint numeri rationales, neceſſe eſt, ut □ta laterum A B & B C addita conſtituant numerum quadratum, ſeu talem numerum, ex quo radix quadrata extrahi poſſit. Nam duo illa quadrata A B & B C æquantur quadrato hypothenuſæ A C. Si itaque bina illa quadrata A B & B C addita non conſtituunt numerum quadratum, ſeu talem numerum, ex quo radix quadrata extrahi poſſit; hypothenuſa A C non erit numerus rationalis. E. gr. Eſto A B 4 B C 3, □tum A B 16 additum □to B C 9 conſtituit alium numerum quadratum 25, ex quo radix extracta 5 conſtituit hypothenuſam A C. Quodſi autem radix extrahi non potuiſſet, hypothenuſa non eſſet numerus rationalis. Jam verò ut bina illa quadrata A B & B C addita conſtituant alium numerum quadratum, *A C eſſe debet ad B C ut 4 ad 3* (3), aut vice verſa, (uti notum eſt ex theoremate Pythagorico 3.4.5.), hoc eſt, ſi B C eſt 3, A B debet eſſe 4. ſi B C eſt bis 3 hoc eſt, 6; A B debet eſſe bis 4 hoc eſt 8. Si B C eſt ter 3, hoc eſt 9; A B eſſe debet ter 4, hoc eſt 12. Si B C. eſt quater 3, hoc eſt 12; A B eſſe debet quater 4 hoc eſt, 16. Et ſic in infinitum. Ita *enim, & nulla alia ratione* (4), duo illa quadrata A B & B C addita conſtituunt alium numerum quadratum; ex quo cùm radix extrahi poſſit, hypothenuſa A C erit rationalis. Nam ſi A B eſt 8 & B C 6, quadratum ex A B eſt 64, & ex B C 36: quibus additis, ſumma erit 100, numerus quadratus, cujus radix 10 erit hypothenuſa AC. Si A B eſt 12 & B C 9, quadratum ex A B erit 144 & ex B C 81, quibus additis ſumma erit 225, cujus radix 15 erit hypothenuſa A C, & ſic de ceteris.

Patet itaque, ſi tam hypothenuſa A C, quàm reliqua duo latera A B & B C numeri debent eſſe rationales, *rationem lateris A B ad latus B C eſſe debere ut* 4 *ad* 3. Sed & ex antè demonſtratis patet, ſi area trianguli rectanguli A B C eſſe debet numerus quadratus, rationem lateris A B ad latus B C eſſe debere ut 2 ad 1. demonſtratum enim eſt, fieri non poſſe, ut area trianguli rectanguli ſit quadrata, niſi altitudo A B duplo major ſit baſi B C, aut vice verſa. Sed ut ratio ipſius A B ad B C ſimul ſit ut 4 ad 3, & ut 2 ad 1, non magis fieri poteſt, quàm ut bis duo ſimul ſint quatuor & quinque.

Vides itaque, duo in propoſito problemate conjungi, quæ per rei naturam

(3) Falſum. Dantur alia adhuc infinita triangula rectangula in numeris, ut, ſi latera ſint 5. 12. 13.

(4) Error, ut dixi.

turam conjungi non poſſunt. Vel meo itaque periculo jurabis aulico illi non indocto, qui problema illud ſolvendum tibi dedit, tunc demum aream trianguli rectanguli ſimul fore quadratam, & latera omnia numeros rationales, cùm bis duo ſimul erunt quatuor & quinque. Debet autem algebra problema aliquod propoſitum ſolvere, aut oſtendere, iſtud ex natura rei eſſe inſolubile. Sed de his ſatis.

Ego jam currum aſcendo, profecturus Brunſvigam ad agnatos meos, & rediturus, ſi Deus volet, futuro die Jovis. In via id operam dabo, ut fratri tuo oſtendam, demonſtrationes illas de immortalitate animæ, quas non ita pridem transmiſiſti, nihil minus eſſe, quàm demonſtrationes. Ego intra hos ſeptem dies novies ipſemet concionatus ſum: ut reliqua, quæ ex officii formula curare habeo, quæque aliunde mihi objiciuntur negotia, taceam. Quod ideo ſcribo, ne exiſtimes, noluiſſe me viro optimo, veterique amico, tantillam gratiam gratificari. Spero te, reverendiſſime domine Abbas, cum priſtina valetudine in gratiam propediem rediturum. Vale, &, quod facis, favere perge R. M. T. obſequentiſſimo.
Ieinſæ a. d. 13. *Jan.* 1679.

P. S.

Harum lator aditum ad te affectat: quem, credo, faciliùs impetrabit, quàm quæſitor ille tuus ſolutionem problematis ſui. Ego Rintelium nihil mittam.

(13.)

LEIBNITIUS ABBATI MOLANO.

LEIBNITIUS *ſolutionem illam mancam declarat.*

IN demonſtratione amici tui, qua probare conatur, impoſſibile eſſe *triangulum rectangulum in numeris, cujus area ſit quadratus*, eſt paralogiſmus manifeſtus, qui haud dubiè feſtinanti auctori excidit. Demonſtravit impoſſibilitatem caſus tantùm ſingularis, & quem abſurdum eſſe per ſe patet, ſcilicet radix quadrati quæſiti ſeu areæ deberet eſſe numerus primitivus. Duo ſupponit, & rectè,



1.) omnem quadratum produci ex aliquo numero in ſe ipſum:
2.) Aream trianguli AB produci ex dimidia altitudine AB in baſin.

Unde concludit: ſi area trianguli rectanguli eſt quadratus, erit dimidia altitudo æqualis baſi.

Quia autem error eſt quodammodo contra formam, ideò in argumentum redigam: quod foret circiter tale:

Major. „ Aliqui duo numeri, quadratum multiplicatione mutua producentes, ſunt æquales,

nempe ipſa quadrati latera, exempli gratiâ a, & a latera quadrati a^2 vel ab & ab latera quadrati $a^2 b^2$. *Aliqui*, inquam, non omnes; nam dantur alii duo numeri quadratum aliquem ſæpe mutua multiplicatione producentes, verbi gratia a^2 & b^2 in ſe invicem ducti producunt quadratum $a^2 b^2$, item $a^2 b$ & b in ſe invicem ducti producunt eumdem quadratum $a^2 b^2$. ponamus quadratum eſſe 36. qui numerus poteſt produci ex $\frac{6}{ab}$ in $\frac{6}{ab}$: item ex $\frac{4}{a^2}$ in $\frac{9}{b^2}$; & ex $\frac{12}{a^2 b}$ in $\frac{3}{eb}$

Minor. „ Dimidia altitudo, & baſis trianguli rectanguli in numeris non ſunt umquam æquales.

[Hoc eſt, quod rectè probat.]

Ergò dimidia altitudo & baſis trianguli dicti non ſunt numeri quadratum producentes ſeu area trianguli, quippe ex his duobus producta non eſt quadratus.

Quaſi ſcilicet numerus quadratus non niſi a ſuis lateribus, & non ab aliis etiam numeris, produci poſſit.

Patet, majorem eſſe particularem, quod in ſecunda figura permiſſum non eſt; itaque problema propoſitum tam facilè non reſolvitur.

(14.)

LEIBNITIUS MOLANO.

J'Avois peur, que la ſolution du problême, que vous m'avez envoyé, ne fût fautive, puiſqu'elle eſt ſi promte & ſi aiſée; & je ne m'y ſuis pas trompé. Car l'ayant conſidérée de près, j'ai trouvé d'abord en quoi vôtre ami a manqué; ſans doute parce qu'il a voulu trop ſe dépêcher, & parce qu'il avoit trop bonne opinion de l'analyſe ordinaire. Il eſt vrai, que tout nombre quarré eſt produit de deux nombres égaux, par exemple, 36 par 6 & 6; mais tous les nombres, qui produiſent un quarré, ne ſont pas égaux: car, par exemple, 36 peut être produit auſſi par 4 & 9. item par 3 & 12. Donc quoique les deux nombres, ſçavoir la moitié de la hauteur, & la baſe du triangle rectangle numerique doivent produire un quarré, ſçavoir l'aire [*aream*] du triangle, que nous voulons avoir quarrée, ils ne ſont pas pour cela néceſſairement égaux, comme vôtre ami prétend, & en quoi il fonde ſon impoſſibilité prétendue. Car cette égalité eſt impoſſible en effet, comme il le démontre fort bien. On

On voit par là, que la ſource de ce paralogiſme vient plutôt de la forme, que de la matiére.

Le problême n'eſt pas ſi aiſé qu'il penſe, & il n'en ſera pas quitte à ſi bon marché, s'il veut s'appliquer à le réſoudre. J'ai trop bonne opinion d'un Mathématicien, pour croire qu'il veuille ſoutenir ſa ſolution. Il eſt fort aiſé de faire des fautes de cette nature, quand on paſſe vite ſur les choſes. J'en ai fait quelquefois des pareilles. Mais quand on nous les fait remarquer, nous ſommes les premiers à les rejetter. Si par hazard il ne s'en appercevoit pas d'abord, il n'aura qu'à reduire ſa démonſtration à un argument en forme, & le défaut ſera manifeſte. Je ſuis avec paſſion &c.

(15.)

LEIBNITIUS MOLANO.

VOus devez avoir reçu aujourd'hui ma réponſe à la ſolution que vous m'avez envoyée. Il faut ajouter *poſt-ſcriptum*. Je trouve encore une raiſon dans la démonſtration prétendue de vôtre ami, par laquelle il veut prouver l'impoſſibilité du problême, ſçavoir, il ſuppoſe que tous les nombres qui peuvent être côtés d'un triangle numerique ſont 3. 4. 5. ou leurs multiples, comme 6. 8. 10. ou 12. 16. 20. &c. Or les deux moindres côtés, comme 3. 4. ou 6. 8. ou 12. 16. &c. ſont toujours l'un à l'autre comme 3. à 4., & par conſéquent ils ne ſçauroient produire le quarré, comme on le demande. Mais ce raiſonnement eſt encore fautif. Car il y a une infinité d'autres triangles en nombres d'une toute autre nature, & qui ne dépendent point des Pythagoriques, comme, par exemple, 5. 12. 13.; car les quarrés des deux premiers pris enſemble, font le quarré du dernier; ſans parler des fractions. Car ce ſeroit aſſez, ſi le problême étoit réſolu en nombres rompus.

(16.)

ECKHARDUS LEIBNITIO.

VOtre lettre du 24. d'Avril m'eſt parvenuë hier, avec la copie du manuſcrit Cartéſien, dont je vous ſuis très obligé: On m'a auſſi remis en même tems quelques exemplaires des *Acta Lipſienſia de Mencken*, où il eſt fait mention de votre méthode de trouver les Racines: J'ai auſſi moi même une autre voie très ſinguliére, & que je regarde comme d'une grande importance dans toute l'Algèbre; J'arrive d'abord à une progreſſion, & je coupe le calcul: Je donne une équation comme de $x^5 + b x^4 + c x^3 + d x^2 + e x + f$, qui eſt ce qu'on doit réſoudre. *Deſ-*

cartes pour reſoudre cette équation, en produit une autre en multipliant par les plus petites, & il ſuppoſe, que l'équation produite a les mêmes racines que l'autre qui a été donnée : Il compare ainſi les termes les uns avec les autres, & il cherche parlà la valeur des formules arbitraires ; Quand, par exemple, il veut ſavoir ſi l'équation donnée par une moindre comme x + l æqu. o, ou xx 4 l x + m æqu. o à partager, il multiplie celle-ci par des formules arbitraires, & il compare ce qui a été produit avec l'équation donnée, afin de chercher les lettres l, ou les lettres l & m. Mais s'il veut chercher la lettre l dans le premier cas pour æqu. x + l. æqu. o, alors il y aura une nouvelle équation, ſemblable en tout à celle qui a été donnée, & qui n'a aucun avantage : Mais s'il veut chercher dans l'autre l ou m, il y aura alors une autre équation qui eſt incomparablement plus grande : Je peux même déclarer d'avance par ma régle de la combinaiſon des Racines, juſqu'à quel point elle peut monter; car ſi dans l'équation donnée, il ſe trouve cinq degrés, l'équation pour trouver m montera au 20 degré, parce qu'il y a vingt combinaiſons des cinq choſes, & on ne gagne rien par là : *Deſcartes* a donc manqué en ceci, puiſqu'il cherche des équations qui ayent toutes les mêmes racines que l'on remarque dans l'équation donnée; mais j'ai eu une fois l'idée, s'il ne ſeroit pas convenable de recevoir des équations que l'on ſuppoſe n'avoir pas toutes les mêmes racines avec l'équation donnée, mais ſeulement une pour le moins ; Par exemple l'équation donnée eſt $x^5 + b x^4 + c x^3 + d x^2 + e x + f$ æqu. o. Je m'en imagine une autre du même degré, ſavoir $x^5 + l x^4 + m x^3 + n. x^2 + p x + q$ æqu. o. Si cette équation avoit toutes les mêmes racines que la premiére, elle ſeroit donc égale à la premiére, & l æqu. b. item m æqu. c &c. ce qui ne ſert à rien. Mais ſi je ſuppoſe que cette équation arbitraire a pour le moins une racine commune avec la premiére, ſans m'embarraſſer beaucoup ſi elle en a d'autres, je cherche alors le plus grand diviſeur commun de ces deux équations x + ⊙ æqu. o, [ſi je voulois avoir deux racines communes, il me faudroit chercher le plus grand diviſeur commun xx + ⊙ x + ☽ æqu. o] & même par la méthode ordinaire de chercher le plus grand diviſeur commun : cette méthode conſiſte en ce que je ſouſtrais une quantité d'une autre, autant que je le puis, & je ſouſtrais de nouveau ce qui reſte de ce qui a été ſouſtrait, ou ce qui eſt la même choſe, je diviſe ce dont on doit ſouſtraire par ce qui doit être ſouſtrait; après quoi je diviſe de nouveau le reſtant par le diviſeur, & ainſi du reſte ; mais dans la derniére diviſion je fais par x + ⊙ le reſtant égal à rien, afin qu'il ne ſubſiſte plus ; par conſéquent x + ⊙ doit être le plus grand diviſeur commun : Je peux donc arranger cette nouvelle équation dans laquelle le reſtant eſt poſé égal à rien, & où il n'y a aucun x, & où ni l ni m ni n ni p ni q ne peuvent pas aller au delà du cinquiéme degré,

degré, [comme je peux le démontrer par ma règle du nombre des racines *a priori*, à la ſimple vue.] Je l'arrange ſelon q & celles qui reſtent + 4 arbitraires, leſquelles je peux expliquer dans la nouvelle équation à mon avantage, afin qu'il en ſorte une équation pure, que l'on peut réſoudre par la ſeule extraction de la racine, & je n'ai pas beſoin même d'ôter tous les termes moyens. Ayant ainſi trouvé les lettres l. m. n. p. q. j'ai auſſi x par une équation ſimple, parce que x æqu. — ⊙; & la quantité ⊙ ſe trouve purement & raiſonnablement des lettres poſées l. m. n. p. q. au lieu que lorſque vous aurez trouvé vos arbitraires, vous ne chercherez la lettre inconnue x que par l'équation précédente: Par exemple, lorſque vous voulez dans la page 208. des *Acta* reſoudre l'équation $y^3 - q\,y - r$ æqu. o. vous employez cette équation yy æqu. b y + z + a, & après avoir trouvé a. b. & z. ſelon votre méthode, vous cherchez ſeulement alors y par une équation quarrée yy æqu. b y + z + a; & ſi vous vouliez réſoudre une équation du quatriéme degré, il faudroit chercher par cette méthode, après avoir trouvé les arbitraires, la principale lettre inconnue, par une équation du troiſiéme degré, & ainſi du reſte: ce qui augmente horriblement le calcul, ſurtout dans les nombres plus grands, ce qui n'eſt pas néceſſaire. Car par mes arbitraires l. m. n. p. q. que j'ai données, j'ai d'abord la valeur de la racine commune recherchée pour les deux équations: Par ce moyen [en ſuppoſant une équation nouvelle, qui auroit la même racine commune avec celle qui a été donnée] je peux faire bien des choſes ſinguliéres dans l'Algèbre, & je préfére de beaucoup cette méthode artificielle analytique à la comparaiſon des équations de *Deſcartes*. Je poſſéde auſſi un fort joli *Compendium tollendi omnes radices irrationales*, & autres ſemblables. Ma méthode *per formulam generalem quærendi quadraturas* ſert également à examiner, ſi la quadrature eſt poſſible algébraïquement, & la méthode par les racines des équations donne des ouvertures particuliéres, & conduit naturellement à trouver ce que l'on cherche.

(17.)

ECKHARDUS MOLANO.

ARN. ECKHARDUS *aliam Abbati ſolutionem problematis mittit.*

NOn equidem diffiteor, perfunctoriè me tractaſſe illud, quod nuper mihi ſolvendum miſiſti, problema. Neſciebam enim, unde illud accepiſſes; & qua de cauſſa ſolutionem ejus a me flagitares. Quod ſi ſciviſſem, in leges reverentiæ illius, quam & tibi, & viro illi illuſtri, qui tibi illud ſolvendum dedit, debere me agnoſco, utique peccaſſem, ſi illud

lud pro re parva , aut ſaltem non adeo magna , habuiſſem. Neque negare poſſum , habere ſolutionem ejus aliquid curioſi , & quod mediocrem ſaltem rerum algebraicarum notitiam requirat. Quamquam , ne quid diſſimulem , hactenùs videre nequeo , quam ob rem hujus & ſimilium problematum analyſin dare non poſſit algebra Carteſiana. Sed quid opus eſt verbis? Ipſa re , quod dico , demonſtrandum eſt. En tibi itaque, reverendiſſime domine Abbas , plenam & integram , niſi me omnia fallunt, hujus problematis ſolutionem : in qua nihil mihi omiſiſſe videor , quod quidem hac in parte deſiderari a me poſſit. Agitur jam gloria totius Algebræ Carteſianæ. Aut ergò pro inſigni humanitate ſua doceat vir illuſtris errorem , ſi quem fortè in hac ſolutione commiſi , cui ſi mederi nequeo , cauſsâ cadam , victumque me fatebor : aut, ſi id facere non poteſt, præſtantiam Algebræ Carteſianæ hactenùs rectè aſſertam eſſe fateri ne gravetur. Deus te ſervet, reverendiſſime domine Abbas ! Vale & favere perge reverend. magnificentiæ tuæ obſequentiſſimo A. E. *Leinſæ a. d.* 1. *Febr.* 1679.

PROBLEMA:

Invenire triangulum rectangulum , cujus latera omnia ſint numeri rationales , & area numerus quadratus.

ANALYSIS.

Ut problemati omni ex parte ſatisfiat, tria inveſtiganda mihi ſumo:

1. Quot modis omnia trianguli rectanguli latera numeris rationalibus exprimi poſſint.

2. Quot modis area trianguli rectanguli fieri poſſit numerus quadratus. Quibus explicatis ,

3. quæram , an duo illa , quæ in problemate requiruntur , conjungi inter ſe poſſint , hoc eſt, an fieri poſſit , ut trianguli rectanguli latera omnia ſint numeri rationales , & ſimul area ejus numerus quadratus. Quæritur itaque I.

Quot modis omnia trianguli rectanguli latera numeris rationalibus exprimi poſſint?



Quoniam in triangulo rectangulo A B C quadrata laterum B C , A B circa rectum angulum ſimul ſumta æqualia ſunt quadrato hypothenuſæ A C , pono pro latere A B $x - y$, pro hypothenuſa A C $x + y$, eritque ſubtracto quadrato A B $= xx - 2xy + yy$ a quadrato A C $= xx + 2xy + yy$, quadratum B C $= 4xy$. Ex quo duplex emergit problematis ſolutio.

1. Quoniam $4xy$ eſt numerus quadratus , ſtatuatur $4y = x$, ſeu $y = \frac{1}{4}x$: eritque $xx = 4xy$. Itaque ſi x, ſeu A B ſumatur pro lubitu , erit B C $= x$

$= x - y = x - \frac{1}{4} x = \frac{3}{4} x$, hoc eſt, æquale ipſi A B, mulctata quarta ſui parte: & $AC = x + y = x + \frac{1}{4} x = \frac{5}{4} x\ 4.$ hoc eſt, æquale eidem A B, auctæ quarta ſui parte. Erit itaque hoc priori modo ratio trium laterum trianguli rectanguli ut $\frac{3}{4} x$, $1 x$, ſeu $\frac{4}{4} x$ & $\frac{5}{4} x$, hoc eſt, diviſo ubique per x, & multiplicato per 4, ut 3. 4. 5. Ergò ſi numeri 3. 4. 5. per quemcumque alium numerum ſimul vel multiplicentur, vel dividantur, erunt quadrata duorum minorum numerorum, ſibi invicem addita, æqualia quadrato majoris.

2. Quoniam $4xy$ eſſe debet numerus quadratus, ſtatuatur radix ejus $= z$, fiatque, uti x ad z, ita z ad $\frac{zz}{x}$: Ergo $y = \frac{zz}{4x}$. Ex quo patet, ſi pro x & z ſumantur numeri quicumque, quo pacto y inveniri queat: erit enim ſemper $y = \frac{zz}{4x}$. E. gr. ſi ſumatur $x = 9$ & $z = 12$, fiatque, uti x ad z, hoc eſt, 9 ad 12, ita z ſeu 12 ad 16, erit $16 = \frac{zz}{x}$, & $4 = \frac{zz}{4z} = y$. Unde detracto $y = 4$ ab $x = 9$ erit latus B C $= x - y = 5$, & latus $AC = x + y = 13$. Ergò aggregatum ex quadrato 5 & quadrato 12 ſeu ex 25 & 144 æquatur quadrato ex 13 ſeu 169. Eodem modo ſi ſtatuatur $x = 4$, & $z = 3$, fiatque, uti x ſeu 4 ad z ſeu 3, ita z ſeu 3 ad $\frac{3}{4}$, erit $\frac{9}{4} = \frac{zz}{x}$ 1 & $\frac{9}{16} = \frac{zz}{4x} = y$. Unde detracto $y = \frac{9}{16}$ ab $x = 4$, erit latus $BC = x - y = \frac{55}{16}$, & latus $AC = x + y = \frac{73}{16}$. Ergò aggregatum ex quadrato $\frac{55}{16}$ & quadrato 3 ſeu $\frac{48}{16}$. æquale eſt quadrato ex $\frac{73}{16}$. Quodſi numeris integris efferre cupias, erit multiplicato ubique per 16, hoc eſt, demto communi denominatore, quadratum ex 55 ſeu 3025 additum quadrato ex 48 ſeu 2034 æquale quadrato ex 73 ſeu 5329. Et ſic de ceteris. Erit itaque hoc modo ratio laterum BC, AB, AC ad ſe invicem, ut $x - \frac{zz}{4x}$, z, $x + \frac{zz}{4x}$. ſeu $\frac{4xx - zz}{4x}$, z, $\frac{4xx + zz}{4x}$. Patet autem, numerum $2x$ debere majorem eſſe, quàm numerum z, ſeu x majorem eſſe debere, quàm $\frac{1}{2}$ z. Ergò ſi quicumque numeri in dicta ratione per quemcumque alium numerum ſimul vel multiplicentur, vel dividantur, erunt quadrata duorum minorum numerorum ſimul ſumta ſemper æqualia quadrato majoris. Qui eſt alter modus. Præter hos duos autem modos nullus alius dari poteſt. Ratio eſt, quia $4xy$ non poteſt fieri numerus quadratus, niſi his duobus modis jam explicatis: nempe ſi vel ſolus numerus x ſumatur pro lubitu, & ſtatuatur $4x = x$, qui eſt prior modus: vel ſi inter x & y ſtatuatur medius numerus proportionalis, nem-

pe z, & tam x, quàm z ſumantur pro lubitu, dummodo, uti dictum eſt, x ſit major, quàm $\frac{1}{2}$ z, qui eſt alter modus. Pergo ad II.

quot modis area △li rectanguli fieri poſſit numerus quadratus?

Omnis numerus quadratus, qui quidem ex multiplicatione duorum numerorum per ſe invicem producitur, aut fit ex multiplicatione ejuſdem numeri per ſemet ipſum, aut ex duobus aliis numeris, quorum media proportionalis ſit radix numeri quadrati. Ita numerus quadratus 36 fit primò ex multiplicatione radicis 6 per ſemet ipſum: Sed poteſt etiam produci ex multiplicatione 1 per 36; item 2 per 18; item 3 per 12; item 4 per 9, &, ſi fractos numeros accipere velis, infinitis aliis modis. Sed ex quibuſcumque demum numeris producatur numerus ille quadratus 36, ipſa radix 6 media debet eſſe proportionalis inter duos illos numeros. Nam uti 1 eſt ad 6, ita 6 ad 36; & uti 2 ad 6, ita 6 ad 18; & uti 3 ad 6, ita 6 ad 12; & uti 4 ad 6, ita 6 ad 9. Neque præter hos duos modos, nempe ut vel idem numerus in ſemet ipſum ducatur, vel duo alii numeri, inter quos ipſa radix ſit media proportionalis, per ſe invicem multiplicentur, ullus numerus quadratus per multiplicationem unius numeri per alterum produci poteſt. Quibus poſitis, cùm area trianguli rectanguli oriatur ex ductu dimidii unius lateris circa rectum angulum in alterum, non poteſt area iſta eſſe numerus quadratus, niſi unum latus circa rectum angulum ſit duplum vel alterius lateris, vel alterius extremorum numerorum, ipſi radici proportionalium. E. gr. ut area trianguli rectanguli A B C æquetur 36, duobus tantùm modis fieri poteſt. 1. Si latus A B ſit duplum ipſius radicis 6, nempe 12, & latus B C ipſa radix ſeu 6. Ita enim ſemiſſis ipſius A B, nempe 6, multiplicata per B C, quod itidem eſt 6, producet numerum quadratum 36. 2. Si duplum alterutrius extremorum numerorum, inter quos ipſa radix 6 eſt media proportionalis, ſumatur pro uno latere circa rectum angulum, & alter extremus proportionalis pro altero latere. E. gr. quoniam 6 eſt medius proportionalis inter 2 & 18, alteruter extremorum numerorum duplicandus eſt, ponendumque unum latus $= 4$, & alterum $= 18$, vel unum latus $= 36$, & alterum $= 2$. Ita enim ex multiplicatione ſemiſſis unius lateris per integrum reliquum latus itidem orietur numerus quadratus 36. Et ſic de ceteris. Neque præter hos duos modos ullus alius inveniri poteſt.

His jam ita explicatis, manifeſtum eſt

1. Secundùm priorem modum ſi A B ſtatuatur $= 2z$, B C fore $= z$. Eſt itaque ratio ipſius A B ad B C, ut 2 z ad z, vel uti 2. ad 1.

2. Deinde ſecundùm poſteriorem modum ſi ipſa radix ſtatuatur $= z$, & numerus, vel dividens, vel multiplicans ipſum z, ſtatuatur $=$ a, erit $\frac{z}{x}$ unus, & x z alter extremorum numerorum, ipſi z proportionalium. Eſt enim,

enim, uti $\frac{z}{x}$ ad z, ita z ad xz. Ergò hoc modo ſi area trianguli rectanguli numerus eſſe debet quadratus, erit, ſi unum latus AB eſt $\frac{2z}{x}$, alterum BC xz, aut ſi BC eſt 2xz, AB erit $\frac{z}{x}$. Eſt itaque hoc modo ratio unius lateris ad alterum ut $\frac{2z}{x}$ ad xz, hoc eſt, multiplicato utrimque per x, & diviſo per z, uti 2 ad xx: vel etiam uti $\frac{z}{x}$ ad 2xz, hoc eſt, multiplicato itidem utrimque per x & diviſo per z, uti 1 ad 2xx. Quod eſt ſecundum.

Pergo ad III.

Itaque quæritur, *an trianguli alicujus rectanguli areà ſimul poſſit eſſe numerus quadratus, & latera omnia numeri rationales?*

Id fieri non poſſe, ita demonſtro: ut area trianguli rectanguli ſit numerus quadratus, id ex iis, quæ ſecundo loco demonſtravi, duobus tantùm modis fieri poteſt,

1. ſi AB ſit ad BC ut 2 ad 1.

2. ſi AB ſit ad BC ut 2 ad xx ſeu ad quemcumque numerum quadratum; vel etiam ſi AB ſit ad BC, ut 1 ad 2xx, ſeu ad duplum cujuſcumque numeri quadrati; quod eodem recidit.

Deinde ex iis, quæ primo loco demonſtravi, duobus etiam tantùm modis fieri poteſt, ut omnia latera trianguli rectanguli ſint numeri rationales, nempe

1. ſi AB ſit ad BC, uti 4 ad 3.

2. ſi AB ſit ad BC, uti z ad $\frac{4xx - zz}{4x}$, ſeu ad $x - \frac{zz}{4x}$

Jam verò 1.) ſi AB ſit ad BC, uti 2 ad 1, non poſſunt omnia latera eſſe numeri rationales. Quod facilè demonſtratur. Si enim AB $= 2$, & BC $= 1$, & quadratum AB $= 4$, addatur quadrato BC $= 1$, erit quadratum hypothenuſæ AC $= 5$: unde ipſa AC $= \sqrt{5}$: qui eſt numerus irrationalis. 2.) Si AB ſit ad BC, uti 2 ad xx, vel etiam uti 1 ad 2xx, non poſſunt itidem omnia latera eſſe rationalia. Nam 2 ad xx neque eſt uti 4 ad 3, quod per ſe patet. Sit enim 2 ad xx, uti 4 ad 3, eritque $6 = 4xx$, & $\frac{3}{2} = xx$: quod fieri nequit. $\frac{3}{2}$ enim non eſt numerus quadratus. Similiter uti 1 ad 2xx ita 4 non eſt ad 3. Sit enim 1 ad 2xx, uti 4 ad 3: eritque $3 = 8xx$, & $\frac{3}{8} = xx$. Quod itidem fieri nequit. Nam $\frac{3}{8}$ non eſt numerus quadratus.

Neque etiam 2 eſt ad xx, uti z ad $\frac{4xx - zz}{4x}$

Ponatur enim $z = 2$, & erit $\frac{4xx - zz}{4x} = \frac{xx - 1}{x}$.

Faciamus jam, uti 2 ad xx ita 2 ad $\frac{xx - 1}{x}$: & erit $\frac{xx - 1}{x} = xx$, hoc eſt, numero alicui quadrato; quod eſſe non poteſt. Eſſet enim $xx - 1 = x^3$. Quod eſt abſurdum.

Similiter non eſt uti 1 ad $2xx$, ita x ad $\frac{4xx - zz}{4x}$. Ponatur enim $z = 1$, & erit $\frac{4xz - zz}{4x} = \frac{4xx - 1}{4x}$. Faciamus jam, uti 1 ad $2xx$, ita 1 ad $\frac{4xx - 1}{4x}$, & erit $\frac{4xx - 1}{4x} = 2xx$.

Quod eſſe planè non poteſt, & $4xx - 1 = 8x^3$. Quod eſt abſurdum.

Cùm itaque area trianguli rectanguli non poſſit eſſe numerus quadratus niſi alterutro horum modorum, 1) ſi A B ſit ad B C, uti 2 ad 1. 2) ſi A B ſit ad B C, uti 2 ad aa, vel etiam uti 1 ad $2aa$; & neuter tamen horum modorum fieri poſſit, ut omnia latera ſimul ſint numeri rationales (omnia ex demonſtratis): fieri etiam non poteſt, ut detur ullum triangulum rectangulum, in quo ſimul area ſit numerus quadratus & latera omnia numeri rationales. Quæ omnia erant demonſtranda.

(18.)

LEIBNITIUS MOLANO.

LEIBNITII *reſponſio ad litteras* ECKHARDI *d. 1. Febr. datas, ſcripta ad* MOLANUM.

JE vois bien par l'écrit de votre ami, que vous m'avez communiqué, qu'il eſt habile homme, & qu'il eſt capable de faire tout ce qui ſe peut faire par la méthode de *Deſcartes*, & j'en ſuis d'autant plus aiſe, que nous en pourrons tirer cette conſéquence, que s'il ne vient pas à bout de la ſolution de notre probléme, quelqu'autre Cartéſien que ce ſoit aura bien de la peine d'y parvenir. Il commence tout-à-fait bien, & démontre exactement, comment les côtés d'un triangle rectangle en nombres doivent être formés, & la proportion que deux nombres, qui produiſent enſemble un nombre quarré, doivent avoir l'un à l'autre; mais il s'eſt relâché à la fin, lorſqu'il eſt venu à la troiſiéme partie, c'eſt-

c'eſt-à-dire, lorſqu'il a voulu prouver, que les conditions des deux moindres côtés du triangle rectangle en nombres ſont incompatibles avec les conditions des deux nombres, qui enſemble doivent produire le double d'un quarré. Car il eſt très aſſuré, qu'il ne fait que propoſer certains exemples, où les choſes ſont incompatibles, & il ne ſe diſpoſe pas encore à la preuve de l'incompatibilité générale. Je crois qu'il l'a vu lui-même; car il y a des ratures dans ſon écrit, lorſqu'il a voulu ſe hazarder de dire quelque choſe en général; & nonobſtant qu'il a effacé les raiſons, parce qu'elles ne ſatisfaiſoient pas, il y a néanmoins laiſſé la concluſion. Je m'imagine donc, qu'il n'a pas voulu cependant retarder la réponſe. Pour venir au détail, & afin qu'il voye que j'ai conſidéré ſon écrit avec ſoin, comme il le mérite en effet, je dis, qu'il a bien démontré, *premiérement*, que les deux moindres côtés du triangle rectangle en nombres doivent être l'un à l'autre, comme z eſt à $x - \frac{zz}{4x}$. *Secondement* que ces deux côtés, (ſi l'aire du triangle doit être un nombre quarré), doivent être l'un à l'autre, comme 2 à yy aa. Je me ſers exprès de *a* au lieu de *x*, (dont il s'eſt ſervi) pour éviter une erreur. Car il n'eſt pas néceſſaire que le nombre *a*, c'eſt-à-dire, la racine de ce quarré, que nous cherchons égal à l'aire du triangle, ſoit égal à *x*, c'eſt-à-dire, à la moitié de la ſomme de l'hypoténuſe $(x + y)$, & d'un autre côé $(x - y)$ du triangle. A quoi il ſemble, que vôtre ami n'a pas aſſez pris garde. Car il lui eſt bien libre en calculant de ſe ſervir de quelque lettre que ce ſoit; mais quand il s'eſt une fois ſervi d'une lettre, comme de x, pour dire, que les deux côtés ſuſdits doivent être l'un à l'autre, comme z à $x - \frac{zz}{4x}$; il ne doit pas ſe ſervir enſuite de cet x, mais de quelque autre lettre, qui eſt encore indéterminée, comme de *a*. Car en diſant, que les deux côtés ſuſdits doivent être auſſi l'un à l'autre, comme deux eſt à un nombre quarré tel qu'il puiſſe être, alors il faut dire, que l'un eſt à l'autre comme 2 à aa, & non pas comme 2 à xx, parce que x eſt un nombre déja déterminé dans le calcul précédent à quelques conditions particuliéres, c'eſt-à-dire, qu'il eſt la moitié de la ſomme de l'hypoténuſe $(x + y)$ & d'un autre côté $(x - y)$ du triangle. C'eſt donc en quoi conſiſte le paralogiſme, qui eſt plutôt venu d'une inadvertance que d'une erreur. Et je m'étonne, que nôtre Mathématicien s'étant ſervi dans cette ſeconde ſuppoſition, de *a* au lieu de *x*, ait effacé enſuite l'*a*, & ait mis l'*x* à la place, ſans doute parce qu'il trouvoit moyen de raiſonner, en ſe ſervant de cet *x* deux fois; car ainſi il pouvoit venir à une équation. Mais il n'a pas pris garde, que cela détruiſoit entiérement toute la force de la démonſtration. Il y a encore

une autre difficulté. Car ſuppoſant même x égal à a, il ne prouve l'impoſſibilité qu'en certains cas encore plus particuliers, comme, par exemple, quand il ſuppoſe z égal à 2. ou à 1, au lieu qu'il le doit prouver en général, quelque nombre qu'on puiſſe prendre pour z. Nous ſommes donc encore aux premiers termes, c'eſt-à-dire, vôtre ami ayant fort bien & même démonſtrativement établi en général les conditions des deux moindres côtés du triangle rectangle en nombres, dont l'aire doit être un nombre quarré, il eſt temps maintenant de venir au principal, c'eſt-à-dire, de démontrer l'incompatibilité prétendue de quelques-unes de ces conditions: Car il s'agit ici, comme il le reconnoit fort bien, de la gloire de l'Algèbre de M. *Deſcartes*, & s'il la peut rétablir, il fera plus que quelques uns des plus habiles de ſes ſectateurs à Paris n'ont pû faire. S'il achève ce qu'il a ſi bien commencé, je dirai non-ſeulement, qu'il a maintenu la gloire de l'Algèbre de M. *Deſcartes*, mais je dirai de plus, qu'il l'a perfectionnée en ces matiéres, dont elle a grand beſoin. Je ne diſſimule pas, Monſieur, que je tiens vôtre ami capable de le faire. Car je remarque déjà dans ſon écrit, qu'il s'eſt ſervi d'une adreſſe, que la méthode de M. *Deſcartes* ne lui enſeignoit pas, ſi ce n'eſt que nous voulions dire, que tout ce qui eſt raiſonnable, appartient à la méthode de M. *Deſcartes*. Car qui eſt-ce qui lui a dit, qu'il devoit poſer un des moindres côtés du triangle $x - y$ & l'hypotenuſe $x + y$? car le calcul ne le menoit pas à cela, & il pouvoit ſuppoſer toute autre choſe. Mais ayant de l'eſprit, comme il en a, il voyoit bien que cette ſuppoſition lui ſerviroit à détruire les quarrés x^2. & y^2. Car le quarré de $x + y$ eſt $x^2 + 2xy, + y^2$, & le quarré de $x - y$ eſt $x^2 - 2xy + y^2$, & ôtant l'un de l'autre, il reſte $4xy$. C'eſt-à dire, les quarrés ſont détruits, & il ne reſte que les lettres ſimples. Mais ſi cette deſtruction ſe peut prévoir par un homme d'eſprit, dans un exemple aiſé comme celui-ci, où il n'y a que deux lettres, & où l'on ne monte qu'au ſecond degré; il eſt bien difficile, & même impoſſible par la ſeule force d'eſprit, ſans avoir une règle, de la prévoir dans les problêmes qui montent plus haut: comme, par exemple, il eſt bien difficile de reſoudre celui-ci, qui paroit aſſez ſimple: trouver un nombre quarré (*numerum cubum invenire, qui latere ſuo minutus relinquit quadratum*), or je ſoutiens, que cette règle ou méthode, pour prévoir ou procurer ces deſtructions des hautes puiſſances par de certaines ſuppoſitions propres à cela, ne ſe trouve encore nulle part, & que tout ce que les Algébriſtes ont fait en ces matiéres, n'a été, que de ſe ſervir de certaines adreſſes particuliéres, ſuivant le génie & l'expérience d'un chacun: comme ceux qui ont écrit depuis peu ſur *Diophante*, après M. *Deſcartes*, & qui ont fort bien entendu ſon calcul, le témoignent aſſez par leur exemple. Mais je ne conſidére pas, que vous & vôtre ami êtes plus occupés que moi, & je finis en

en vous ſuppliant de l'aſſurer de mon eſtime, & de croire que je ſuis avec zéle, &c. *A Hanover ce 4. de Février* 1679.

P. S.

Je vous ſupplie, Monſieur, d'excuſer que j'écris en François, car je crois que vôtre ami l'entend; & quoique j'entende aſſez le Latin en liſant ce que les autres ont écrit, je n'ai pas aſſez d'habitude pour y expliquer diſtinctément mes penſées, ſur-tout dans une lettre entiére, qui me donneroit bien plus de peine, ſans comparaiſon, que la ſolution du problême n'en donnera à vôtre ami.

(19.)

LEIBNITIUS MOLANO.

Je vois que M. *Eckhardus*, dont vous m'avez communiqué les lettres, n'a pas moins d'humanité que d'érudition; & c'eſt à cette humanité que j'attribue les paroles trop favorables, dont il ſe ſert à mon égard. Pour ce qui eſt du ſujet de ſa lettre, j'avoue qu'il a déterminé très ingénieuſement les conditions générales d'un triangle rectangle en nombres, & celles du double d'un nombre quarré produit par deux autres nombres, qui repréſentent les moindres côtés de ce triangle. Cependant je ſuis obligé de dire, que je ne comprends pas encore la démonſtration de l'incompatibilité de ces conditions; mais je ferai mon poſſible pour la comprendre, & je tâcherai de la repréſenter ici, afin que M. *Eckhardus* me puiſſe avertir ſi j'ai manqué en quelque choſe.



A. ſoit A B égale à $x - y$

A C - - - $x + y$

B. B C ſera - $2\sqrt{xy}$

C. ſoit Z - - - $2\sqrt{xy}$

& Y ſera - - $\frac{zz}{4x}$

Donc A B ſera - $x - \frac{zz}{4x}$

A C ſera - $x + \frac{zz}{4x}$

B C ſera - z

Or

Or puiſque A B & $\frac{BC}{2}$, ou bien $\frac{AB}{2}$ & B C multipliés l'un par l'autre doivent produire un nombre quarré, qui doit être l'aire du triangle A B C, il eſt manifeſte que la racine de ce quarré ſera moyenne proportionnelle entre A B & $\frac{BC}{2}$, ou bien entre $\frac{AB}{2}$ & B C. Je vois ici, que M. *Eckhardus* a appellé cette moyenne proportionnelle z. Mais comme z eſt déja déterminé à être le côté B C, & par conſéquent ne doit pas être pris pour la racine de l'aire; ſi nous voulons raiſonner généralement, ſervons nous plutôt d'une autre lettre, ſi M. *Eckhardus* le permet, c'eſt-à-dire, appellons cette moyenne proportionnelle v, & ſon quarré ſera v v; & poſons ſuivant M. *Eckhardus* l'un des deux nombres, qui le doivent produire, égal à $\frac{v}{a}$, l'autre égal à a v; ils produiront v v multipliés l'un par l'autre. Par conſéquent ſi $\frac{BC}{2}$ eſt poſée égale à $\frac{v}{a}$, & A B égale à a v (ce qui dépend de nous) $\frac{BC}{2}$ ſera à A B comme $\frac{v}{a}$ eſt à a v, c'eſt-à-dire, comme 1. eſt à aa. Et par conſéquent B C ſera à 2 A B comme 1 eſt à a a, ou 2 B C ſera à 2 A B, c'eſt-à-dire, B C à A B comme 2 eſt à aa.

Maintenant il s'agit de prouver, qu'il eſt impoſſible de ſuppoſer, que B C peut être à A B; c'eſt-à-dire [z] à $\left[x - \frac{zz}{4x} \right]$ comme [2] à [aa]. Et c'eſt de quoi dépend toute nôtre diſpute. Monſieur *Eckhardus*, pour prouver cette impoſſibilité, ſuppoſe, que z vaut 2, & dit, qu'il peut le ſuppoſer ſans faire tort à la généralité de ſa démonſtration; ce que je ne lui accorde pas; & il eſt très manifeſte, que z par ſa propre ſuppoſition eſt le côté B C. Donc ſa démonſtration n'auroit lieu, qu'à l'égard de ces triangles rectangles ſeulement, qui ont un des côtés, comme B C égal au nombre 2. Et par conſéquent la démonſtration n'eſt pas générale à l'égard de tous les triangles rectangles en nombres.

Mais comme je vois un moyen de remédier néanmoins à la généralité, je lui accorderai par ſurcroit, que B C ou Z peut être priſe généralement pour 2 : donc A B ou $x - \frac{zz}{4x}$ ſera $x - \frac{1}{x}$, & $x - \frac{1}{x}$ ou $\frac{xx - 1}{x}$ doit être égal à a a. Il faut donc montrer que cela eſt impoſſible, c'eſt-à-dire, qu'il eſt impoſſible qu'un nombre quarré moins limité, étant diviſé par ſa racine, puiſſe être égal à un autre nombre quarré. Monſieur *Eckhardus* prétend de prouver cette impoſſibilité de la maniére ſuivante : Si

Si $\frac{xx-1}{x}$ eſt un nombre quarré, il faut que cette fraction ne ſoit pas moindre que x, lorſque x eſt un quarré; ni moindre que xx, lorſque x n'eſt pas un quarré, parce que x de pluſieurs dimenſions (ſçavoir xx) y eſt diviſé par x ſimple, ou d'une ſeule dimenſion. Mais il eſt manifeſte, que cette fraction eſt moindre que x, & encore plus moindre que xx. Donc elle ne ſçauroit être un quarré. Et c'eſt là tout ſon raiſonnement. Mais je m'étonne, qu'il ait avancé ſans preuve, que $\frac{xx-1}{x}$ ou quelqu'autre fraction, dans laquelle x de pluſieurs dimenſions eſt diviſé par x d'une dimenſion, ne peut être un quarré, ſi elle eſt moindre que x, & moindre que xx. Il falloit prouver cette aſſertion; mais il eſt impoſſible de la prouver ainſi. Car voici une inſtance contraire: ſoit x égal à 5, & $\frac{xx-x}{x}$, (qui eſt auſſi une fraction, où x de pluſieurs dimenſions eſt diviſé par x d'une dimenſion) ſera 4, & par conſéquent cette fraction eſt moindre que x, c'eſt-à-dire, moindre que 5; & néanmoins elle eſt égale au nombre quarré 4.

Je conclus, que ſuivant mon opinion M. *Eckhardus* doit ſe ſervir de quelque principe plus haut, s'il veut venir à bout de la ſolution de ce problême. Car je dis ingénument, que je ne vois pas qu'il ait trouvé juſques ici une entrée dans l'intérieur de la choſe. Et comme je jugerois aiſément, qu'un Géomètre cherchant une moyenne proportionelle entre deux lignes données, n'y arriveroit pas, ſi je voyois qu'il n'avoit tracé ſur le papier que des lignes droites, & juſqu'à-ce qu'il ſe ſerve de cercles; de même j'oſerai avertir Monſieur *Eckhardus*, que ce ſera peine perdue, s'il n'ajoute quelque autre choſe à ce qu'il a dit juſqu'ici.

Je ne m'arrêterai pas à répondre par détail à tous les points de ſa lettre. Car un ſeul défaut ſuffit pour renverſer une démonſtration, & il me ſemble que j'en ai marqué, qui ſont très conſidérables. Je dirai ſeulement en paſſant, que je crois de n'avoir pas ſoutenu ſans raiſon, qu'il ne faut pas employer les mêmes lettres dans deux problêmes différents, quand ces deux problèmes ſont réunis à la fin dans un même calcul d'un ſeul problème, comme il arrive ici. C'eſt pourquoi ce que dit M. *Eckhardus* de ce que l'un pouvoit être réſolu à Paris, l'autre à Rome, & que rien n'empêche que les deux Algebriſtes ne ſe ſervent par hazard de mêmes lettres, ne me touche point. Car j'entends, qu'il ne faut pas donner des déterminations particuliéres à une lettre, quand on veut reſoudre le problème univerſellement. Or cela arriveroit ici, en faiſant x égal à *a*. Car x eſt A C + A B; mais *a* eſt quelque autre choſe, c'eſt-à-dire, *a* eſt un nombre, dont le quarré eſt au nombre 2, comme A B eſt à B C. (Car

je m'étois trompé dans la lettre précédente, en diſant à la hâte, que *a* étoit la racine du quarré égal à l'aire demandée du triangle). Or il eſt viſible, que le problème dans ſa généralité, ne demande pas que cet x (pris pour A C + A B) ſoit égal à ce nombre *a* (dont le quarré ſoit au nombre 2 comme A B eſt à B C :) & par conſéquent il ne faut pas ſuppoſer *x* égal à *a*, quand on veut raiſonner généralement; non plus que z (qui repréſente le côté B C) égale à la racine demandée du quarré égal à l'aire du triangle. Mais il eſt inutile de diſputer là-deſſus, puiſque M. *Eckhardus* a eu la condeſcendance dans ſa derniére, de ſe ſervir de *a* au lieu de *x*. Au reſte il n'a rien répondu à ce que j'avois remarqué dans ma derniére, qu'en poſant A B égale à x — y, & A C égale à x + y, il avoit bien fait ſans doute, pour détruire les quarrés x x & y y plutôt par l'adreſſe de ſon eſprit que par règle, mais que cette adreſſe ne pourroit ſervir dans les plus hauts degrés, & lorſqu'il y a pluſieurs lettres, où l'on ne peut pas prévoir les deſtructions futures; comme par exemple, pour trouver deux nombres quarrés égaux à un nombre quarré. Et perſonne n'a encore publié une voye aſſurée pour arriver à ces ſuppoſitions favorables. Par où l'on peut juger de l'imperfection de l'Algèbre autant qu'elle eſt connue publiquement juſqu'ici. Je crois que M. *Eckhardus* eſt du nombre de ceux qui peuvent contribuer beaucoup à ſa perfection. C'eſt pourquoi je vous remercie, Monſieur, de m'avoir donné ſa connoiſſance: mais je prendrois un exemple, qui ne monte qu'au quarré, & qui n'eſt pas des plus difficiles, mais qui a trois lettres: trouver trois nombres, en ſorte que la ſomme de deux quelconques & la différence de deux quelconques faſſe un nombre quarré. Si M. *Eckhardus* peut trouver trois nombres de cette ſorte par ſa méthode, j'avoue que je l'eſtimerai encore plus que je ne fais. Car comme je ſçai que ce problème eſt poſſible, il s'agira de nous donner ces trois nombres en effet, & nous n'aurons rien à diſputer ſur le raiſonnement. Car les paralogiſmes s'y refuteront d'eux-mêmes, parce qu'ils ne méneront pas à ce qu'on cherche. Je ne le fatiguerai point d'autres problèmes, s'il achéve ces deux, démontrant l'impoſſibilité du premier par le raiſonnement, & faiſant voir la poſſibilité du ſecond par l'expérience &c. *Hanoveræ a. d.* 7. *Febr.* 1679.

(20.)

ABBAS MOLANUS LEIBNITIO.

Neſcio, quis bonus genius *Eckhardo* noſtro in aurem ſuſurraverit, nuperæ ipſius reſponſioni quippiam adhuc deeſſe: En ergo novas ad perſonatum Baronem noſtrum litteras, quas is a me Oſnabrugam mitti obnixè petit, antequàm ille reſponſum ſuum adornet. Scenæ, ut vides, inſer-

inſerviendum fuit, adeoque promiſi me id bona fide facturum. Remitto igitur tibi, quas mihi nudius ab hinc tertius dediſti, litteras, & ſpero, in ſequiorem partem a te acceptum non iri, quod Carteſiano noſtro prænotato locum ac tempus reliquerim. Dici non poteſt, quàm is ſibi ultima hac reſponſione placeat, quamque ſeriò arbitretur, ſe inveniſſe denique, non quod pueri in faba. Vale, amicorum honoratiſſime, ac ſalve ex æquo a tuo &c. *Hanoveræ d.* 17. *Martii* 1679.

P. S.

Pro nupera objectione puto balſamum in Gilead ſupereſſe: de quibus aliquando coram.

(21.)

LEIBNITIUS MOLANO, ABBATI.

J'Ai reçu la lettre de Monſieur *Eckhardus*, que vous avez eu la bonté de me communiquer. Je vous en remercie fort. Elle eſt ſçavante auſſi-bien que les autres, qui ſont aſſez connoitre l'érudition & l'eſprit de l'auteur. Mais comme il y a des choſes qui ne ſont pas encore claires, je les toucherai afin d'en être éclairci. Je ne m'arrête pas à la diſpute touchant les lettres x & z, puiſqu'il en a employé d'autres. Je demeure d'accord auſſi, qu'il peut ſuppoſer le côté AB du triangle être égal à 2. pourvu qu'il prenne garde alors, que les côtés du triangle peuvent auſſi être des fractions, afin que l'impoſſibilité qui doit être démontrée, convienne auſſi-bien aux nombres rompus qu'aux nombres entiers.

Je viens au principal, c'eſt-à-dire, à la preuve qu'il apporte, que $\frac{xx - 1}{x}$ ne ſçauroit être un nombre quarré. Il le prouve, parce qu'alors deux nombres quarrés-quarrés ſeroient égaux à un nombre quarré, ce qu'il ſoutient n'être pas poſſible. La conſéquence eſt bonne, & je la ſçavois bien; c'eſt pourquoi je lui propoſai ce même problème (trouver deux quarrés-quarrés égaux à un quarré), ſachant qu'il eſt le même en effet que le problème du triangle rectangle en nombres, dont l'aire eſt un quarré. Mais voyons la preuve de l'impoſſibilité de ces deux quarrés-quarrés, qui doivent compoſer un quarré. Il dit, ſi $a^4 + b^4$ eſt égal à un quarré, il s'enſuit, que aa eſt égal à $\frac{2bbc - cc}{2b^2 - 2c}$, ce qui eſt encore impoſſible en nombres rationaux. La conſéquence eſt vraye comme je le montrerai ci deſſous. Mais voyons comment il prouve, que $\frac{2bbc - cc}{2b^2 - 2c}$ ne ſçauroit être un nombre quarré. Si cette fraction eſt un nombre quarré, il

il ſera néceſſaire, dit il, que ſon numerateur, auſſi-bien que ſon nominateur, ſoient des nombres quarrés. Ce qu'il tâche de prouver en effet être impoſſible, ſuppoſant encore, qu'un nombre, dont le nominateur n'eſt pas quarré, ne ſçauroit être un nombre quarré. Mais ce raiſonnement eſt néanmoins un paralogiſme bien manifeſte. Car une fraction peut être un nombre quarré, quoique ni ſon nominateur, ni ſon numerateur ne ſoient point quarrés; par exemple, $\frac{12}{3}$, $\frac{72}{8}$ ou $\frac{8}{72}$. C'eſt pourquoi nous ſommes encore dans les mêmes termes où nous en étions au commencement de la diſpute. Car je crois qu'il ſeroit plus aiſé de prouver, que $\frac{xx - 1}{x}$ n'eſt pas un quarré, que de le prouver de $\frac{2b^2c - c^2}{cb^2 - 2c}$. Monſieur *Eckhardus* dit, qu'il veut cacher la méthode, par laquelle il a prouvé que a^2 eſt égal à $\frac{2b^2c - c^2}{2b^2 - 2c}$, & qu'il a découvert une règle, dans laquelle conſiſte le myſtère des deſtructions; mais qu'il ne veut point la découvrir, que lorſque je lui dirai, ſi j'en ai une auſſi, ou non. Mais il eſt aiſé de voir, comment il a trouvé a^2 égal à $\frac{2b^2c - c^2}{2b^2c - 2c}$, & ſi ſa méthode ne conſiſte qu'en cela, elle eſt aſſez connue, mais elle n'eſt pas ſuffiſante. Voici ce myſtère, comme il l'appelle: $a^4 + b4$ doit être égal à un quarré. Poſons que la racine de ce quarré ſoit $a^2 + b^2 - c$, & nous aurons cette équation $a^4 + b^4$ égal à $a^4 + b^4 + 2a^2b^2 - a^2c - 2b^2c + c^2$, ou après la deſtruction & tranſpoſition $2a^2b^2 - 2a^2c$ égal à $2b^2c - c^2$, c'eſt-à-dire, a^2 égal à $\frac{2b^2c - c^2}{2b^2 - 2c}$. Voilà donc ſa méthode, qui eſt auſſi l'ordinaire, dont tous les interprètes de *Diophante* ſe ſervent, & ils ont déja trouvé par là, comment on peut faire un triangle rectangle en nombres. Car ſoit $x^2 + y^2$ égal à $x^2 + y^2 + 2xy - 2xy - 2yz + z^2$, & nous aurons x égal à $\frac{z^2 - 2yz}{2z - 2y}$ ou $z - \frac{z}{2z} - 2y$. Poſons y égal à $y - z$, & nous aurons x égal à $z - \frac{z^2}{2y}$. Et c'eſt ce que M. *Eckhardus* a encore voulu ſupprimer. S'il me donne un exemple de deux nombres cubo-cubes rationels égaux à un cube, je tâcherai encore de trouver une règle pour en avoir. Et j'aurai ſatisfait ainſi à tout ce qu'il me propoſe.

Mais il s'en faut beaucoup que cette méthode, dont M. *Eckhardus* ſe ſert ici, ſoit ſuffiſante. Car il s'agit maintenant de trouver en termes rationels la valeur ſimple de *a*, (c'eſt-à-dire, de $\sqrt{\frac{2b^2c - c^2}{2b^2 - 2c}}$) ou de

de prouver qu'elle eſt impoſſible. Tandis qu'il ne fait pas cela, ſa méthode ne ſera pas encore ce qu'on demande.

Quand je lui ai propoſé ce problème : *invenire numerum cubum, qui latere ſuo minutus. relinquat quadratum*, j'ai entendu *numerum rationalem.* Car toutes nos lettres n'ont parlé que de nombres rationels, & ſans cela je n'aurois pas propoſé un problème comme difficile, dont la ſolution eſt connue, & a été donnée il y a long-tems, & qui n'a point de rapport à la méthode dont il s'agit. Mais afin que Monſieur *Eckhardus* ne ſe donne pas la peine de chercher ceci, comme un nouveau problème, je lui dirai, qu'il eſt encore le même avec le notre; car ſi $\frac{xx - 1}{x}$ eſt un quarré, $\frac{x^3 - x}{xx}$ ſera auſſi un quarré, par conſéquent $x^3 - x$ ſera auſſi un quarré. Par là notre problème eſt reduit aux plus ſimples termes. Et il s'agit maintenant ou de trouver un tel quarré, ou de prouver qu'il eſt impoſſible; ce qui eſt à mon avis aſſez difficile à faire, ſans une méthode toute autre que l'ordinaire. Comme M. *Eckhardus* a trouvé la méthode ordinaire de lui-même & par ſon eſprit, je ne doute point qu'il ne ſoit enfin capable de trouver la vraye méthode univerſelle, & d'avancer beaucoup l'Algèbre. Mais je ſuis encore perſuadé, qu'il faut qu'il s'y prenne d'une autre façon; ſans cela il ſe donnera une peine inutile. Car juſqu'ici nous n'avons fait que tourner la roue d'*Ixion* dans nos lettres. Je vous ſupplie, Monſieur, de le ſaluer de ma part, & je ſuis avec paſſion &c. *Hanoveræ a. d.* 15. *Martii* 1679.

P. S.

Je croyois d'avoir achevé cette lettre, lorſque j'ai reçu la votre avec une lettre de M. *Eckhardus*, qu'il vous a écrite pour ſuppléer à ce qui pouvoit manquer dans ſa démonſtration. Il a vû une partie de ce que je lui objecte ici. Car il a vû, que $\frac{4ff - 16b^2de + 4d^2e^2 + 4de^3 + e^4}{8}$ pourroit être égal à un 8 quarré, quoique le nominateur 8 ne ſoit pas un nombre quarré. Cela étant, je m'étonne qu'il ne ſe ſoit pas apperçu, que la fraction $\frac{4b^2c - c^2}{4b^2 - 2c}$ pourra auſſi être un nombre quarré, quoique ſon nominateur ne le ſoit pas. Car ſon nominateur, par exemple, pourroit être égal à 8, ou à quelqu'autre nombre. C'eſt pourquoi le fondement de toute cette démonſtration de l'impoſſibilité prétendue eſt renverſé. Mais ſi j'accordois même à M. *Eckhardus*, que $4b^2c - c^2$ & $4b^2 - 2c$ devroient être tous deux quarrés en même tems, il n'auroit pas encore gagné ſon procès; car il n'a pas encore bien prouvé que cela eſt impoſ-

impoſſible. Il eſt vrai, qu'il entreprend cette preuve dans la derniére lettre, mais d'une maniére qui n'eſt pas ſoutenable. Cela fait voir, qu'il eſt bien aiſe d'abuſer de ce qu'on appelle analyſe, quand on ne procède pas avec rigueur, & pour ainſi dire, en forme. Voyons cette preuve. Ayant pris pour certain, que $4\,b^2 c - c^2$ & $4\,b^2 - 2\,c$ doivent être des nombres quarrés, il montre, que $8\,b^3 d - 6\,b^2 d^2 + 2\,b d^3 - \frac{1}{4}\,d\,4$ doit être un nombre quarré: il poſe la racine de ce quarré égale à $e - d$. Donc nous aurons $8\,b^3 d - 6\,b^2 d^2 - \frac{1}{4}\,d^4 + 2\,b\,d^3$ égal à $e^2 - 2\,e\,d + d^2$. La conſéquence eſt bonne. Mais pour prouver que cela eſt impoſſible, il montre, qu'il y a une impoſſibilité de ſuppoſer en même tems $8\,b^3 d$ égal à e^2, & $6\,b^2 d^2 + \frac{1}{4}\,d^4$ égal à $2\,e\,d$, & enfin $2\,b\,d^3$ égal à d^2. Mais c'eſt ici où je ne puis pas diſſimuler, que je m'étonne de ſon procedé. Par où a-t il prouvé ces trois égalités? ou comment a-t-il prouvé, qu'il lui eſt permis de faire ces ſuppoſitions impoſſibles, que le problème ne demande pas? Car en faiſant ces trois ſuppoſitions, il détermine à un ſeul exemple les lettres b. d. e, qui pourtant ſont générales, & doivent convenir à une infinité d'exemples. Il ne faut donc pas s'étonner, s'il a rencontré une impoſſibilité en déterminant ces trois lettres au hazard. Car on les pouvoit déterminer autrement d'une infinité de façons. S'il m'eſt permis d'agir ainſi, je prouverai, que tous les problèmes ſont impoſſibles: par exemple, je prouverai que le triangle rectangle en nombres eſt une choſe impoſſible: ſoit $x^2 + y^2$ égal à $3\,c^2 + c^2$. poſons $y\,2$ égal à c^2, & x^2 ſera égal à $3\,c^2$, & nous aurons x égal à $c\sqrt{3}$: ce qui eſt impoſſible en nombres. Si M. *Eckhardus* veut ſoutenir ſes trois ſuppoſitions, il faut qu'il prouve qu'elles ſubſiſtent ſauf l'univerſalité; mais c'eſt ce qu'il ne fera jamais; car c'eſt comme s'il vouloit prouver, que le problème de b. d. e. n'eſt intelligible que dans un ſeul exemple, qui ſe trouve juſtement impoſſible en nombres rationaux, au lieu qu'il peut avoir une infinité d'exemples, & il faut prouver de tous enſemble, qu'ils ſont impoſſibles en nombres que nous demandons.

(22.)

ECKHARDUS MOLANO.

Accepi, quæ illuſtris ille antagoniſta meus, vir non humanitate minùs, quàm doctrina & eruditione inſignis, ultimis meis reponere voluit. Diſputatio noſtra ad finem ſpectare videtur, egoque id operam dabo, ut, quantum in me eſt, finis illi, non mora, imponatur.

Confitetur vir illuſtris, ſolviſſe me problemata ſua, nihilque reſtare, quàm ut aut in numeris rationalibus ſolvantur, aut illa in iis ſolvi non poſſe legitimè demonſtretur. Gaudeo, quòd hactenùs res illa non malè mihi

mihi ſucceſſit. De illa quidem difficultate, quæ viri illuſtris judicio adhuc expedienda eſt, jam videbo, idque operam dabo, ut, ſi ſuperata nondum eſt, a me ſuperetur.

Dicit vir illuſtris, ſcire ſeſe myſterium meum. Ego verò ea de re ne dubitavi quidem; quin potiùs exiſtimo, etiamſi id antea incognitum fuiſſet, facilè tamen ab homine non obtuſi ingenii, in quorum numerum minimè referendum eſſe virum illuſtrem eruditiſſima ejus ſcripta ſatis ſuperque demonſtrant, ex ſolutione ipſorum problematum erui potuiſſe.

Quod verò addit, eſſe illam methodum communem, quo interpretes in reſolvendis *Diophanti* problematis utantur, hoc illud eſt, quod ego volo. Nam præſtantiam methodi Carteſianæ, qua vulgò jam utimur, aſſerendam ſuſcepi, ſemperque præ me tuli, nulla me uti methodo, niſi qua & olim uſus fuerit *Carteſius*, & qua utantur omnes ii, qui methodo Carteſiana ritè ſunt imbuti.

Reſtat itaque hoc unum, an beneficio ejuſdem methodi, qua problemata viri illuſtris huc uſque (1) reſolvi, etiam hoc inveſtigari poſſit, utrum problemata iſta numeris rationalibus explicabilia ſint, nec ne? &, ſi non ſint, quo pacto id demonſtrari poſſit? Putat vir illuſtris, id methodo ſeu vulgata, ſeu Carteſiana (utrocumque tandem nomine illam appellare libeat) fieri non poſſe, opuſque eſſe ad eam rem aliâ quadam methodo, a Carteſiana diversâ. Ego verò in contraria ſum ſententia, ſcilicet poſtquam problemata & iſta, & id genus alia, eo uſque ſoluta ſunt, quouſque a me ſoluta (2) fuerunt; nihil eſſe facilius, quàm eadem methodo, qua uſus fui, porrò inveſtigare, an in numeris rationalibus explicari poſſint, nec ne; & ſi non poſſint, id ad oculum demonſtrare.

Ut viam ad iſtam rem muniam, duo dicenda mihi ſunt. Dixeram ego in proximè ſuperioribus litteris, ut $\frac{2bbc - cc}{2bb - 2c}$ eſſe poſſit numerus quadratus, requiri, ut tam numerator $2bbc - cc$, quàm denominator $2bb - 2c$ ejus fractionis numerus ſit quadratus. Hoc ratiocinium manifeſtiſſimi paralogiſmi incuſat vir illuſtris. In exemplum adducit $\frac{12}{3}$, $\frac{72}{8}$ aut $\frac{8}{72}$, qui numeri ſint quadrati, etiamſi nec numeratores, nec denominatores harum fractionum tales ſint. Non dubito, quin ex feſtinatione dubium illud moverit in re non ſolùm certiſſima, ſed etiam facillima, quæque ita comparata ſit, ut ex definitione numeri quadrati ſtatim pateat. Quid enim eſt numerus quadratus, niſi qui oritur ex multiplicatione ejuſdem numeri per ſemetipſum, & per conſequens, ex quo radix quadràta extrahi poteſt. E. gr. 4 eſt numerus quadratus ideò, quia oritur ex multiplicatione ejuſdem numeri 2 per ſemetipſum, atque adeò eadem radix 2 ex 4 extrahi poteſt. Quemadmodum itaque 2 facit numerum quadratum, ſi per ſemetipſum multiplicetur, & 3 facit numerum quadratum, ſi itidem per

(1) Huc uſque nihil actum eſt.

(2) Nullo modo hactenùs ſoluta fuerunt.

per ſemetipſum multiplicetur; ita etiam fractio iſta $\frac{2}{3}$ non poteſt redigi ad numerum quadratum, niſi tam numeratore, quàm denominatore, hoc eſt, niſi tam numero 2 quàm numero 3 quadratè multiplicato; id quod per ſe patet. Uti ergò quadratum ex $\frac{2}{3}$ eſt $\frac{4}{9}$, ita etiam e contrario $\frac{4}{9}$ quadratum eſſe non poteſt, niſi tam numerator 4, quàm denominator 9 radicem habeat quadratam. Et ſic de ceteris.

Neque obſtant exempla ab illuſtri viro in contrarium adducta. Sunt enim illa aut numeri integri in modum fractionis poſiti, aut *fractiones non ad ſimpliciſſimos ſuos terminos reductæ* (3), ad quos ſi reducantur, fiunt perfecti numeri quadrati. Quomodo infinitas poſſe conſtitui fractiones quadratas, licèt earum neque numeratores, neque denominatores ſint numeri quadrati, quis neſcit? Quemadmodum enim 4 ſeu $\frac{4}{1}$ eſt numerus quadratus, quia tam numerator 4, quàm denominator, ſunt numeri quadrati; ita etiam $\frac{12}{3}$ eſt numerus quadratus, quia eſt ipſe numerus $\frac{4}{1}$, ſed ita, ut tam numerator 4, quàm denominator, per eundem numerum 3 ſint multiplicati. Et ſic de ceteris. Quotieſcumque itaque fractio aliqua eſt numerus quadratus, cujus tamen neque numerator, neque denominator talis exſiſtit, toties & numerator & denominator erunt per eumdem numerum multiplicati, per quem ſi uterque iterum dividatur, emerget aut numerus integer, aut fractio aliqua, cujus tam numerator, quàm denominator ſint numeri quadrati. Et ſi præter hunc caſum dederit vir illuſtris fractionem quadratam, cujus & numerator & denominator non ſint numeri quadrati, vicerit. Quid opus eſt verbis? Quemadmodum $\frac{a}{b}$ redigitur ad numerum quadratum, ſi tam numerator a, quàm denominator b quadratè multiplicentur; ita etiam e contrario $\frac{aa}{bb}$ fractio quadrata non eſſet, niſi tam aa quàm bb eſſent numeri quadrati. Eſt quidem $\frac{aac}{bbc}$ etiam fractio quadrata, etiamſi neque aac neque bbc ſint numeri quadrati; at aac & bbc habent communem diviſorem c, per quem ſi dividantur, emerget fractio $\frac{aa}{bb}$, cujus & numerator & denominator ſunt numeri quadrati. Verùm enim verò quantum ad iſtam fractionem $\frac{2bbc - cc}{2bb - 2c}$, illa quidem eſt ad minimos ſeu ſimpliciſſimos ſuos terminos reducta, hoc eſt, in ea neque numerator, neque denominator habent

(3) Oſtendere ergò debet, hanc fractionem $\frac{2bbc - cc}{2bb - 2c}$ eſſe ad ſimpliciſſimos terminos reductam.

bent ullum communem diviſorem (4), per quem dividi ulteriùs poſſint, (quod ſemper quidem faciunt non algebraici ſolùm, ſed etiam arithmetici, ideoque id monere opus non fuerat). Si itaque $\frac{2bbc - cc}{2bb - 2c}$ numerus debet eſſe quadratus, neceſſe eſt, ut tam numerator $2bbc - cc$, quàm denominator $2bb - 2c$ tales ſint. Et quid, quæſo, ſignum illud $\surd$ fractioni iſti præpoſitum aliud ſignificat, quàm tam ex numeratore, quàm denominatore extrahi debere radicem quadratam? Eſt enim quantitas $\surd\frac{2bbc - cc}{2bb - 2c}$ planè eadem cum iſta $\frac{\surd 2bbc - cc}{\surd 2bb - 2c}$. Quod itaque exiſtimat vir illuſtris, me propter iſtam objectionem ſuam vidiſſe, non abſurdum videri, ſi dicas, quantitatē illā $\frac{4ff - 16bbde + 4ddee + 4de^3 + e^4}{8}$ caſum admittere poſſe, ubi non repugnet illam eſſe numerum quadratum, id, quod pace ſummi viri dictum velim, longè aliter ſe habet, egoque in ſuperioribus litteris meis diſertis verbis explicui. Nihil enim impedire videtur, ut numerator iſtius fractionis ſtatuatur æqualis octuplo quadrati alicujus, hoc eſt quadrato alicui per 8 multiplicato, e. g. 8 g g. Quo caſu fractio iſta æqualis erit $\frac{8gg}{8}$, id eſt, diviſo utrimque per 8, æqualis $\frac{gg}{1}$ ſeu æqualis ipſi g g. Atque hæc fuit cauſſa, quam ob rem alio modo eamdem rem obtinere aggreſſus ſum: qui modus cùm viro illuſtri etiam non placeat, non admodum repugno, præſertim cùm alius ad manum mihi ſit, cui reponi nihil poſſit. Nimis quidem prolixus fui in re manifeſtiſſima; attamen non poſſum, quin virum illuſtrem ſuâ ipſius hypotheſi convincam denique. Dicit, ſi $\frac{xx - 1}{x}$ eſt numerus quadratus, erit $\frac{x^3 - x}{xx}$ etiam numerus quadratus, & per conſequens (abjecto denominatore xx) $x^3 - x$ etiam numerus quadratus. Nihil rectius; neque ego id nego. Sed quî ſcit vir illuſtris, ſi $\frac{x^3 - x}{xx}$ eſt numerus quadratus, etiam numeratorem $x^3 - x$ talem fore? Nam dum aſſertum hoc ſuum demonſtraverit, eadem opera demonſtrabit aſſertum illud meum, de quo hactenùs diſputavi. Non,

(4) Immo poſſunt habere in quibuſdam caſibus communem diviſorem: nam ſit b æq. 5 & c æqu. 4 erit $\left(\begin{matrix} 2b^2c - c^2 \\ 200 - 16 \end{matrix}\right.$ æqu. 184 & $2b^2 - 2c$ æqu. 42, & fractio erit $\frac{184}{42}$ in qua communis diviſor eſt 2.

credo, ægrè feret vir illuſtris, quòd tam prolixus fuerim in aſſerto meo probando, ſine quo nihil ulteriùs demonſtrare me poſſe profiteor. Ceſſi ipſi antehac in omnibus, quæ, quantumvis eſſent veriſſima, non tamen ita ſimpliciter neceſſaria erant ad inſtitutum meum obtinendum, ut illud alio modo obtineri a me poſſe diffiderem. Ita in omnibus prioribus litteris ſuis inter alia acerrimè negavit, univerſitati rationis (quando probandum mihi erat, non poſſe idem triangulum rectangulum ſimul habere aream quadratam & latera rationalia) nihil obſtare, ſi unum latus ſupponatur = 2: quod tamen in his ultimis concedit. Ceſſi nihilominùs, uti dixi, tametſi res erat evidentiſſima. In hoc autem, quod jam propoſui, cedere non poſſum, ſiquidem quidquam adhuc proferre velim, quod ad rem faciat: ceſſurus alioqui, ſi poſſem. Tantum de primo.

Alterum, quod monere volui, illud eſt. Dicit vir illuſtris, problema noſtrum eo jam eſſe redactum, ut nihil in eo ſuperſit præter hoc unum, nempe cùm $x^3 - x$ numerus debeat eſſe quadratus, ut aut ille inveniatur, aut illum dari non poſſe demonſtretur, & dum id hactenùs factum non fuerit, verſaſſe nos *Ixionis* rotam. Aut ego inſigniter fallor, aut in proximè ſuperioribus litteris meis demonſtravi, $x^3 - x$ non poſſe eſſe numerum quadratum: ut adeò, ſi hoc tantùm ſuperſit, rem planè confectam jam eſſe contendere non dubitem. Demonſtratio hæc fuit: eſto $x^3 - x = aa$, eritque $x^3 = 1\,x + aa$. Quæ æquatio eſt ejuſdem formæ cum iſta: $z\,3 = x + p\,z + q$. Jam verò nemo algebraicorum etiam ante *Vietam* & *Carteſium* ignoravit, radices harum æquationum $z\,3 = x.\ p\,z.\ q.$ nullo numero eſſe explicabiles. Atque ea fuit cauſſa, quam ob rem *Vieta* in tractatu ſuo *de numeroſa poteſtatum reſolutione* radices harum æquationum inveſtigarit, quæ a veris quàm minimùm recedant; *Carteſius* autem in *Geometria* ſua eaſdem radices in lineis dare tentaverit, idque feliciſſimè perfecerit. Quod cùm viro illuſtri ignotum eſſe non poſſit, egoque in ſuperioribus litteris meis jam tum monuerim; mirari profectò ſubit, illud planè præteriiſſe virum illuſtrem. Si ergò grave non eſt, doceat me, an vel ab algebraicis, qui ante *Vietam* & *Carteſium* vixerunt, vel etiam ab ipſo *Vieta* aut *Carteſio*, eorumque ſectatoribus, ſatis liquidò demonſtratum nondum ſit, æquationum propoſitarum radices nullo numero eſſe explicabiles, & an defectum illum a me ſuppleri cupiat. Ego enim problematis iſtis ſatis feciſſe mihi videor, ſi iſta ad hos, quos dixi, terminos, aut verò ad iſtos: $z\,4 = x - p\,zz.\ q.\ z.\ \surd$ & ſimiles reduxero, ad quos ſi reducta fuerint, nemini ampliùs ignotum eſſe exiſtimo, radices harum æquationum nullo numero eſſe explicabiles. Vale, reverendiſſime domine Abbas, viroque humaniſſimo, ſi grave non eſt, pro miſſa per te ſalute meo nomine gratias age, ipſique ſignifica, non minùs me eſſe illuſtris ſui, quàm rev. nominis tui obſequentiſſ. cultorem A. E. *Dab. Ieinſæ a d.* 7. *April.* 1679.

(23.)

(23.)

LEIBNITIUS MOLANO.

J'Ai reçu la lettre de M. *Eckhardus*, & j'eſpère, comme lui, que la diſpute ſera bientôt finie. Car nous verrons bientôt, ſi M. *Eckhardus* a achevé ſa démonſtration, ou s'il ſera obligé d'avouer, qu'il n'a rien avancé encore; ſi ce n'eſt qu'il apporte *novum medium demonſtrandi.* Il dit de moi: *confitetur*, *ſolviſſe me problemata ſua*, *nihilque reſtare*, *quàm ut aut in numeris rationalibus ſolvantur*, *aut illa in iis ſolvi non poſſe*, *legitimè demonſtretur.* Il reſte donc encore tout. D'abord je n'ai demandé que cela, & nous ne ſommes donc pas plus avancés qu'au commencement. La méthode des deſtructions, dont il ſe ſert, a été déja miſe en uſage par les Algébriſtes du ſiécle paſſé : & M. *Deſcartes* n'y a pas plus *de droit*, *qu'à l'Arithmétique ordinaire ; mais cette méthode eſt imparfaite.*

M. *Eckhardus* avoit ſoutenu, que $\frac{2bb - cc}{2bb - 2c}$ ne ſçauroit être un nombre quarré, parce que ſon nominateur & ſon numerateur ne ſçauroient être enſemble nombres quarrés. Je lui avois nié *& antecedens*, *& conſequentiam.* Il a tâché de prouver *antecedens*; mais il abandonne maintenant cette preuve, n'en parlant plus dans ſa lettre. Pour ce qui eſt de la conſéquence, je lui avois répondu, qu'il ne s'enſuit pas que cette fraction ne puiſſe pas être quarrée, de ce que ſon numérateur & ſon nominateur ne le ſoient pas, & je lui avois apporté des exemples contraires, comme $\frac{3}{12}$. Il répond à cet exemple, que $\frac{3}{12}$ eſt en effet autant que $\frac{1}{4}$, parce que le nominateur & le numérateur ſont diviſibles par le même nombre, ſçavoir par 3. Hé bien, c'eſt ce que je voulois: Car peut-être que cette fraction $\frac{2bb - cc}{2bb - 2c}$ eſt auſſi reduiſible à une fraction quarrée, & le raiſonnement de M. *Eckhardus* aura ſeulement lieu, s'il démontre que les deux nombres, $2bbc - cc$ & $2bb - 2c$ ſont néceſſairement *primi inter ſe*, c'eſt-à-dire, qu'ils n'ont point de commune meſure. Il tâche de le prouver, mais pas ſuffiſamment. Je lui donnerai un exemple contraire, pour prouver que ces deux nombres peuvent avoir un diviſeur commun, par exemple, ſoit b égal à 5 & c égal à 4. $2bbc - cc$ ſera 184, & $2bb - 2c$ ſera 42, dont la fraction ſera $\frac{184}{42}$. Par conſéquent on ne peut pas dire en général, que ces deux nombres ſont toujours *primi inter ſe.* Mais s'il l'avoit démontré, cela ne ſerviroit encore de rien, tandis qu'il ne prouve pas, que l'un & l'autre enſemble ne ſçauroient être quarrés.

Monſieur *Eckhardus* m'objecte, que j'ai agi moi-même contre mon objection, en diſant, que $\frac{x^3 - x}{x\,2}$, étant quarré, $x^3 - x$ le doit être néceſſairement auſſi. Je ſuis bien aiſe de cette objection; cela ſervira à lui faire mieux remarquer la différence entre mon procedé & le ſien. Car toujours dans une fraction quarrée, le nominateur étant quarré, le numérateur doit être quarré auſſi, *& contra.* Mais il peut arriver, que ni l'un ni l'autre ſoit quarré: & néantmoins la fraction pourra être quarrée, comme j'ai montré ci-deſſus.

Je viens au nouveau moyen dont M. *Eckhardus* ſe ſert pour prouver ſon deſſein. C'eſt qu'il dit, que cette équation $x^3 - x$ *æqu.* a a eſt néceſſairement inexplicable en nombres rationaux, parce que cette équation aura cette forme: x^3 *æqu.* $+ x + a\,a$. ou z^3 *æqu.* $p\,z + 9$. faiſant x égal à 2. & p. égal à 1. & q égal à a a. Or, dit-il, cette forme z^3 *æqu.* $p\,z + q$. eſt toujours inexplicable en nombres rationaux. Et il demande, ſi je veux qu'il le prouve, ou ſi je me contente des preuves de *Viete* & *Deſcartes.* Mais je ne veux pas qu'il prouve une choſe impoſſible à prouver. Auſſi ni *Viete* ni *Deſcartes* n'ont pas dit cela. Et pour lui faire voir qu'il eſt impoſſible de le prouver, je lui apporterai un exemple, où cette forme d'équation eſt explicable en nombres rationaux, par exemple, ſoit l'équation z^3 égal à $3\,z + 2$, qui a la même forme que z^3 égal à $p\,z + q$. poſant 3 égal à p, & 2 égal à q. je dis, que z eſt égale à 2. nombre rationel, comme il eſt aiſé de voir. Je vois bien ce qui a trompé Monſ. *Eckhardus:* la racine de cette forme d'équation ne peut pas être exprimée par une formule générale explicable par les moyennes proportionelles. C'eſt ce que *Cardan* & *Deſcartes* ont dit. Mais il ne s'enſuit pas pour cela, qu'elle ne ſoit pas explicable en nombres en aucun cas particulier. Peut-être donc, que nôtre problème eſt de ceux qui ſe peuvent reſoudre en nombres rationels en certains cas particuliers. C'eſt pourquoi je dis encore une fois, qu'il eſt très aiſé de ſe tromper en Algèbre, quand on ne raiſonne pas avec rigueur, à la façon des anciens Géométres. Monſ. *Eckhardus* a l'eſprit excellent; mais comme il ſe fie trop à ſes méthodes prétendues, il eſt ſujet à faire des paralogiſmes. Je ne l'en eſtime pas moins, & je ſuis avec paſſion &c. &c.

(24.)

LEIBNITIUS MOLANO.

La lettre de M. *Eckhardus* eſt pleine d'eſprit; mais il faut que je diſe la vérité, & que je vous avoue, que je ne ſuis pas encore ſatisfait. Je voudrois, qu'il ne parlât pas ſi poſitivement en diſant, *ſi in iis, ſuper quibus*

quibus jam diſputamus, cauſſa cecidero, non in Algebraicis ſolùm, ſed ne in ulla quidem leviſſima re quidquam me ſcire. Car on peut être habile homme, quoiqu'on ſe trompe en quelque choſe. Pour moi, je me crois fort aſſuré de deux choſes; premiérement, que M. *Eckhardus* eſt fort ſçavant en Mathématique; & ſecondement, qu'il a commis ici des paralogiſmes. Il a appris cette maniére de parler de *Deſcartes*, qui eſt auſſi un peu trop poſitif en bien des choſes. J'avois cru qu'il prendroit encore un autre chemin, après avoir reçu ma lettre; mais comme il inſiſte cette fois ſi poſitivement ſur les mêmes raiſons, il faut que je ne me ſois pas bien expliqué à ſon égard.

M. *Eckhardus* avoit entrepris de prouver, que la fraction $\frac{2b^2c - c^2}{2b^2 - 2c}$ ne ſçauroit être un nombre quarré. Pour cet effet il entreprend de prouver que le numérateur & le dénominateur ne peuvent être enſemble des nombres quarrés, donc la fraction entiére ne peut être un nombre quarré. L'argument de M. *Eckhardus* ſeroit tel: *Omnis fractio generalis, cujus numerator & nominator non ſunt ſimul quadrati in ullo caſu particulari, non poteſt eſſe quadratus in ullo caſu particulari*:

Fractio $\frac{2b^2c - c^2}{2b^2 - 2c}$ *eſt talis.*

Ergò, &c.

J'ai nié la Mineure abſolument, & j'ai répondu à la preuve, en ſorte que M. *Eckhardus* l'a abandonnée, & a cherché un nouveau moyen pour arriver à ſon but. Mais feignant que la Mineure eſt vraye, j'ai répondu par ſurcroit à la Majeure, *diſtinguendo*: *Omnis fractio generalis, cujus numerator & nominator in omni caſu exiſtentes primi inter ſe non ſunt ſimul quadrati*, &c. *Sed ſic negatur minor.* Et M. *Eckhardus* devroit prouver, que ces deux nombres généraux $2b^2c - c^2$ & $2b^2 - 2c$ ſont toujours *primi inter ſe*. Mais pour lui épargner cette peine inutile, puiſqu'il eſt impoſſible de le prouver, j'avois apporté des inſtances ou exemples en contraire. Et mon argument étoit tel en effet.

Quicumque duo numeri habent diviſorem communem, illi non ſunt primi inter ſe.

Aliqui duo numeri $2b^2c - c^2$, *&* $2b^2 - 2c$ *habent diviſorem communem,* (*nempe* 2. *eo caſu, quo b eſt* 5 *& c eſt* 4, *tunc enim aliquis* $2b^2 -$ *eſt* 184, *& aliquis* $2b^2 - 2c$ *eſt* 42).

Ergò aliqui duo numeri $2b^2c - c^2$ *&* $2b^2 - 2c$ *non ſunt primi inter ſe.*
Monſ. *Eckhardus* forme l'argument autrement; mais voilà le mien; & il faut qu'il réponde à la majeure, ou à la mineure, s'il ne demeure pas d'accord de la concluſion.

Je ne réponds donc pas à ce qu'il dit à l'argument qu'il ſe forme lui-

même,

même, puiſqu'il n'eſt pas le mien; mais je deſire qu'il réponde à mon argument *in forma*, commençant par le ſyllogiſme principal, & y appliquant la diſtinction entre les nombres primitifs & non primitifs. Si j'avois dit, que les deux termes $2\,b^2\,c - c$ & $2\,b^2 - 2\,c$ NB. peuvent être rendus non primitifs entre eux, étant multipliés par un même nombre 2, j'aurois parlé inutilement, & ce qu'il répond auroit lieu; mais j'ai fait voir que ces deux nombres $2\,b^2\,c - c^2$ & $2\,b^3 - 2\,c$ tels qu'ils ſont, ſont condiviſibles dans un certain cas, & il y en a une infinité d'autres.

Quoi qu'il en ſoit, Monſ. *Eckhardus* voyant qu'il lui ſeroit très difficile de prouver que ces deux nombres ne peuvent être enſemble quarrés, lors même qu'ils ſont primitifs entre eux; il a abandonné entiérement ce raiſonnement, & s'eſt jetté ſur un autre, dont je lui avois donné occaſion, en lui propoſant, qu'il auroit achevé la queſtion, s'il pouvoit prouver, que ce nombre $x^3 - x$ ne ſçauroit jamais être quarré. Voyant donc, que cette équation $x^3 - x$ égal à a^2 ou x^3 égal à $x + a^2$ a la même forme que celles qui ne peuvent être réſolues généralement par la régle de *Cardan*, il a cru qu'elles n'étoient jamais reduiſibles en nombres. Mais je lui ai donné des inſtances. Là-deſſus il avoue, que ces équations ſont exprimables en nombres, lorſqu'elles ſont déprimables. Fort bien; c'eſt ce que je veux. Il faut donc qu'il prouve, que cette équation $x^3 - x$ égal à $x\,a^2$ n'eſt jamais déprimable en aucun cas particulier. Il tâche de le prouver ainſi, en diſant, que cette équation $x^3 - x - a^2$ égal à o. ne ſçauroit être diviſée par aucun binome: x plus ou moins un diviſeur de a. Car tous les diviſeurs de a^2 ſont ou 1 ou a ou a^2. Or la diviſion ne réuſſit pas avec un. Donc l'équation n'eſt pas déprimable. Mais c'eſt ici où il ſe trompe viſiblement de deux façons; car premiérement la règle de *Nonius* & de *Deſcartes* a ſeulement lieu, quand l'équation eſt en nombres entiers; c'eſt pourquoi *Deſcartes* commande qu'on ôte de l'équation toutes les fractions. Mais pour parler généralement, il faut conſidérer, que a^2 peut être une fraction; & que M. *Eckhardus* a entrepris de prouver l'impoſſibilité généralement. Secondement, poſant que *a* ſoit un nombre entier, il eſt faux que tous les diviſeurs de a^2, ſont toujours 1 ou a, ou a^2: cela eſt vrai ſeulement quand *a* eſt un nombre primitif. Mais ſi nous poſons *a* égal à f g, il eſt viſible que a^2 eſt égal à f 2 g 2, & par conſéquent diviſible par 1. f. g. f^2. g^2. $f^2\,g$. $f\,g^2$. $f^2\,g^2$; & ſi f & g ne ſont pas primitifs, a^2 pourra être diviſé encore par pluſieurs autres. Après une conviction ſi claire, j'eſpère que M. *Eckhardus*, étant de bonne foi, reconnoitra lui-même ſon paralogiſme, & avouera l'imperfection de cette algèbre, & la facilité qu'il y a de ſe tromper. Je ne ſçais s'il réuſſira en prenant d'autres meſures; mais toutes celles qu'il a priſes juſqu'ici, ſe ſont trouvées courtes; ce que j'attribue à l'imperfection de ſes méthodes, & à la trop grande croyance qu'il leur donne, plutôt qu'à ſa perſonne, que j'eſtime toujours beaucoup. Je ſuis avec zèle, &c.

(25.)

(25.)

LEIBNITIUS MOLANO.

JE vous remercie de la communication de la lettre de M. *Eckhardus* du 26. de Juin. Il n'y répond pas à mon objection; mais il en forme plutôt une autre. J'avois dit, que ſon raiſonnement de la lettre paſſée prouveroit non-ſeulement, que l'équation $x^3 - x$ égal à a^2, mais auſſi que l'équation $x^3 - x^2$ égal à a^2 ſeroit impoſſible, puiſqu'il convient à l'une auſſi-bien qu'à l'autre. Mon objection n'eſt donc pas, comme M. *Eckhardus* la forme [ſi l'une eſt poſſible, donc l'autre l'eſt auſſi], mais plutôt ainſi, [ſi l'argument, qui doit prouver l'impoſſibilité de l'une eſt bon, le même argument prouvera que l'autre eſt impoſſible auſſi]. Ainſi M. *Eckhardus* fait bien voir, qu'il y a de la différence entr'elles; mais il ne fait pas voir, qu'il y a de la différence entr'elles à l'égard de ſon argument ou preuve de l'impoſſibilité, qui étoit, que tout ce qui ne paroit pas faiſable par $x^3 - x^2$ égal à a^2 ne paroitra pas faiſable par $x^3 - x^2$ égal à $b^2 g^2$, ce qui eſt faux. Car ſuppoſant g égal à x, nous voyons la poſſibilité, comme il le reconnoit lui-même. Ainſi on voit l'utilité des ſuppoſitions particuliéres, & on pourroit dire, qu'il y a auſſi peut-être quelque voye particuliére pour l'équation dont nous diſputons: Au reſte s'il prouve, que $\frac{1}{4} b 4 + 1$ ne peut être un quarré, ſoit qu'on ſuppoſe b entier ou rompu, il aura gagné. J'attendrai ce que M. *Eckhardus* nous promet encore, & je vous envoyerai volontiers toutes ſes lettres, pour être par vous ſcellées avec les miennes.

Monſieur *Eckhardus* ne touche pas au problème que je lui avois propoſé dans ma derniére. S'il le peut reſoudre, j'eſtimerai ſa méthode, comme j'eſtime déja beaucoup ſa perſonne. Je ſuis avec zéle, &c. *Hanover, ce* 14. *Juillet* 1679.

(26.)

ECKHARDUS MOLANO.

ARN. ECKHARDUS *Abbati* MOLANO *mittit novam problematis ſolutionem.*

AD quæſtionem meam nuper tibi propoſitam rectè tacuiſti; erat enim reſponſione indigna. Mitto ſolutionem problematis, in qua ſi acquieſcere non vult Dominus Baro, mittat illud ad quoſcumque voluerit Mathematicos. Peto autem, ut illud Domino *Leibnitio* communicare ne graveris, antequàm ad Dn. Baronem tranſmittatur. Vale, reverendiſſime Domine Abbas, pergeque in gratia habere rev. magnif. tuæ obſequentiſſ. *A. E. Ieinſæ ad d.* 10. *Octobr.* 1679.

(27.)

(27.)

ECKHARDUS MOLANO.

ARN. ECKHARDUS *Abbati* MOLANO *mittit ultimam ſuam problematis Leibnitiani ſolutionem.*

EN tibi, quæ ſuper problemate iſto, quod ab illuſtri Barone *de la Devancière*, præcipuis totius Europæ Carteſianis propoſitum ſolutionem ſuam hactenus invenire non potuit, ultimo loco conſcribere volui. Quæ quidem ſeriùs aliquanto mitto, tum quòd prudentiſſimo monito iſti tuo, ſat citò, ſi ſat benè, parere debui; tum quòd per varias occupationes, quibus aliquot abhinc hebdomadis diſtentus fui, meditationibus iſtis, ita ut opus erat, vacare non potui; tum quia pro virili providere volui, ne ſummis non Galliæ ſolùm, ſed totius terrarum orbis Mathematicis, ad quos provocavit, quorumque arbitrio rem omnem commiſit illuſtris Dn. *Baro*, ludibrium debuiſſe videri poſſim. Rem omnem a primo capite uſque ad extremum percurro, quæque dico, ea aut nota ſunt & apud omnes in confeſſo, aut ex notis & confeſſis demonſtrata, ita ut vereri non ſubeat, ne in iis, quæ hoc ſcripto continentur, cauſſa cadam. Sed ad rem. Ad ea, quæ hactenùs ſcripſi, multa movit vir illuſtris, in quibus omnibus non repugnavi, neque adhuc repugno, præterquàm in his duobus: *invenire numerum cubum, qui latere ſuo minutus relinquat numerum quadratum*; ſi $x^3 - x$ ſtatuatur $= aa$, ſeu $x^3 - x - aa = 0$, æquationem iſtam nullo caſu eſſe reducibilem, adeoque radicem x nullo numero explicabilem (1). Deinde ut ſignum algebraicum ad ſimpliciſſimos ſuos terminos reductum, cujuſmodi eſt $\frac{4bbc - cc}{4bb - 2c}$, de quo tum lis erat, numerum quadratum ſignificare poſſit, neceſſe eſſe, ut ejus tam numerator, quàm denominator ſignificare poſſit numerum quadratum (2). In quibus quidem duobus pronunciatis acerrimè ſeſe mihi oppoſuit vir illuſtris, & quandoquidem lis illa inter nos componi non potuit, tandem ad doctos provocavit. Quod ad prius attinet, quoniam problemate iſto ad ſolutionem problematis primarii non utor, potueramus iſta diſputatione ſuperſedere. Itaque de eo aliàs. Poſterius niſi mihi in ipſo limine concedatur, nihil demonſtrare poſſum. Demonſtravi illud tertia vice in ſuperioribus ſcriptis meis, & cùm illuſtris antagoniſta, licèt nullum in demonſtrationibus iſtis meis vitium notaſſet, in negatione tamen ſua perſiſteret,

(1) Non quæritur, an hoc verum, ſed an demonſtratum?

(2) Hoc ne nunc quidem ſequi puto.

ſiſteret, ter ad ipſam experientiam provocavi. Dicit ſcilicet, *dans toute la fraction quarrée le dénominateur étant quarré, le numerateur le doit être auſſi*, & contrà (3). Quod quidem pronunciatum eſt veriſſimum, demonſtratuque facillimum. Dixi itaque, quòd ſi pronunciatum iſtud ſuum demonſtrare poſſit vir illuſtris, niſi ea, quæ de numero fracto quadrato in medium attuleram, concedat omnia, victas me illico daturum manus. Et ut videat vir illuſtris, quàm immeritò ſeſe mihi hac in parte oppoſuerit, quamque meum aſſertum vel planè idem ſit cum ſuo, vel ſaltem ex ſuo iſto ſequatur; ego in omni hac demonſtratione mea ſuis ipſius verbis ſemper utar. (4)

PROBLEMA.

Invenire triangulum rectangulum, cujus area ſit numerus quadratus, & latera omnia numeri rationales.

In quo ſolvendo ita progredior:

PROBLEMA I.

Invenire triangulum rectangulum, cujus latera omnia ſint numeri rationales.



Quoniam in triangulo rectangulo A B C quadrata a lateribus A B, B C æquantur quadrato hypotenuſæ A C, problema huc redit: *invenire duos numeros quadratos, quorum ſumma ſit numerus quadratus*: vel etiam, *invenire duos numeros quadratos, quorum differentia ſit numerus quadratus.* Pono itaque pro radice majoris numeri quadrati $x + y$; pro radice minoris $x - y$; quadratum minoris $xx - 2xy + yy$ ſubtractum a quadrato majoris $xx + 2xy + yy$ relinquit $4xy$ numerum quadratum ex hypotheſi. Eſto radix ejus z, fiatque uti $4x$ ad z, ita z ad $\frac{zz}{4x}$, erit $y = \frac{zz}{4x}$. Unde ſi pro majore numero ponatur $x + \frac{zz}{4x}$, pro minore autem $x - \frac{zz}{4x}$, quadratumque minoris $xx - \frac{1}{2}zz + \frac{z^4}{16xx}$ ſubtrahatur a quadrato majoris $xx + \frac{1}{2}zz + \frac{z^4}{16xx}$, relinquetur zz numerus quadratus. Vel con-

(3) Sed non ſequitur; ſi neuter ſit quadratus, fractionem quoque quadratam eſſe non poſſe, niſi demonſtretur, ſemper numeratorem & nominatorem, talibus terminis expreſſos, eſſe primos inter ſe.

(4) Ergo omiſſa ipſius hypotheſi de fractione $\frac{4b^2c - c^2}{4b^2 - c}$ fruſtrà de ea diſputatur.

trà, ſi pro majore numero ſumatur $x + \frac{zz}{4x}$ & pro minore z, quadratumque minoris zz ſubtrahatur a quadrato majoris $xx + \frac{1}{2}zz + \frac{z4}{16xx}$, reſiduum $xx - \frac{1}{2}zz + \frac{z4}{16xx}$ erit numerus quadratus, cujus ſcilicet radix eſt $x - \frac{zz}{4x}$. Patet autem, numerum $2x$ majorem eſſe debere numero z, quia alioqui $x - \frac{zz}{4x}$ ſeu $\frac{4xx - zz}{4x}$ nullus eſſet. Oportet enim quadratum ex z ſubduci a quadrato ex $2x$. E. gr. ſit $x = 4$ & $z = 4$, eritque $\frac{zz}{4x} = 1$, adeoque $x + \frac{zz}{4x} = 5$, $x - \frac{zz}{4x} = 3$. Unde ſi à quadrato ex 5 nempe 25 auferatur quadratum ex 3, nempe 9, relinquetur quadratum ex 4. nempe 16. Vel etiam, ſi a quadrato 25 auferatur quadratum 9, relinquetur quadratum 16, cujus radix eſt 4. Eodem modo ſi ſtatuatur $x = 9$, $z = 12$, erit $\frac{zz}{4x} = 4$, adeoque $x + \frac{zz}{4x} = 13$ & $x - \frac{zz}{4x} = 5$. Unde ſi a quadrato ex 13, nempe 169 auferatur quadratum ex 5, nempe 25; relinquetur quadratum ex 12, nempe 144. Vel etiam, ſi a quadrato 169 auferatur quadratum 144, relinquetur quadratum 25. Et ſic de ceteris. Ut itaque in triangulo rectangulo A B C latera omnia ſint numeri rationales, hypotenuſa A C. ſemper debet eſſe æqualis $x + \frac{zz}{4x}$; reliquorum autem laterum circa rectum angulum A B, B C alterum æquale $x - \frac{zz}{4x}$; alterum verò æquale z.

Corollarium I.

Quicumque numerus exprimitur per z, ille etiam exprimi poteſt per $x - \frac{zz}{4x}$, & contrà; quicumque numerus exprimitur per $x - \frac{zz}{4x}$, ille etiam exprimi poteſt per z. Ut in exemplo priori, in quo $z = 4$, & $x - \frac{zz}{4x} = 3$. Poteſt etiam vice verſâ z ſtatui $= 3$, & $x - \frac{zz}{4x} = 4$, nempe ſi ponas $x = 4\frac{1}{2}$ ſeu $= \frac{9}{2}$. Erit enim $\frac{zz}{4x} = \frac{1}{2}$. Unde $x + \frac{zz}{4x} = \frac{10}{2}$ ſeu 5, & $x - \frac{zz}{4x} = \frac{8}{2}$ ſeu 4. Eodem modo in poſteriori exemplo, in quo

z = 12

$z = 12$ & $x - \frac{zz}{4x} = 5$, poteſt etiam vice verſâ z ſtatui $= 5$, & $x - \frac{zz}{4x} = 12$: nempe ſi ponas $x = 12\frac{1}{2}$ ſeu $\frac{25}{2}$. Erit enim $\frac{zz}{4x} = \frac{1}{2}$. Unde $x + \frac{zz}{4x} = \frac{26}{2}$ ſeu 13, & $x - \frac{zz}{4x} = \frac{24}{2}$ ſeu 12.

Scholium.

Praxis hæc eſt. Sit numerus z, qui antè erat 4, commutandus in 3; & $x - \frac{zz}{4x}$ qui antè erat 3, commutandus in 4. Quod ita fieri poteſt: $x + \frac{zz}{4x} = 5$: $x - \frac{zz}{4x} = 4$ ex hypotheſi. Ergò additis $x + \frac{zz}{4x} = 5$ & $x - \frac{zz}{4x} = 4$, erit ſumma $2x = 9$, & $x = \frac{9}{2}$. Subtracto autem $x - \frac{zz}{4x} = 4$ ab $x + \frac{zz}{4x} = 5$ differentia $\frac{zz}{2x} = 1$ & $\frac{zz}{4x} = \frac{1}{2}$. Unde $x + \frac{zz}{4x} = 5$; $x - \frac{zz}{4x} = 4$, & $z = 3$. Eodem modo procedi poteſt in poſteriori, & in omnibus reliquis exemplis.

Corollarium II.

Ex quo manifeſtum eſt, quæcumque quantitates ad ſe invicem non ſunt ut $x + \frac{zz}{4x}$ ad z, illas etiam ad ſe invicem non eſſe ut $x + \frac{zz}{4x}$ ad z: quippe cùm omnis numerus denotatus per $x - \frac{zz}{4x}$ exprimi etiam poſſit per z, & contrà, per corollar. 1.

Corollarium III.

Ergò quæcumque quantitates ad ſe invicem non ſunt uti $x + \frac{zz}{4x}$ ad $x - \frac{zz}{4x}$ (5) illarum quadrata a ſe invicem ſubtracta non relinquunt quadratum rationale ſeu numerum quadratum. Ut enim unum quadratum ab altero ſubtractum relinquat numerum quadratum, neceſſe eſt, ut radix unius ſit ad radicem alterius, ut $x + \frac{zz}{4x}$ ad $x - \frac{zz}{4x}$, vel etiam ut x

(5) Ut $4x^2 + z^2$ ad $4x^2 - z^2$;

$+ \frac{zz}{4x}$ ad z, per probl. I. Quæcumque autem quantitates non ſunt ad ſe invicem ut $x + \frac{zz}{4x}$ ad $x - \frac{zz}{4x}$, illæ etiam non ſunt ad ſe invicem, ut $x + \frac{zz}{4x}$ ad z, per Coroll. 2. Patet itaque propoſitum

PROBLEMA II.

Invenire triangulum rectangulum, cujus area ſit numerus quadratus.

Omnis numerus quadratus oritur vel ex multiplicatione ejuſdem numeri, quæ radix dicitur, per ſemet ipſum, aut ex multiplicatione duorum numerorum, inter quos radix eſt media proportionalis. Exempli gratiâ, numerus quadratus 36 oritur ex multiplicatione vel ſuæ radicis 6 per ſemet ipſam, vel ex multiplicatione 1 per 36, vel 2 per 18, vel 3 per 12, vel 4 per 9, &, ſi numeros fractos adhibere velis, per infinitos alios. Eſt enim uti 1 ad 6, ita 6 ad 36: uti 2 ad 6, ita 6 ad 18: uti 3 ad 6, ita 6 ad 12; uti 4 ad 6, ita 6 ad 9; & ſic de ceteris. Ergò ſi ipſam radicem exprimas per u, & unum extremorum proportionalium per $\frac{u}{a}$, alterum verò per $a\,u$, ratio generalis, quæ eſſe debet inter duos numeros, ex quorum multiplicatione produci poſſit numerus quadratus, erit ut $\frac{u}{a}$ ad $a\,u$, ſeu multiplicando utrimque per a & dividendo per u, ut 1 ad aa, ſeu, ut 1 ad quemcumque numerum quadratum. Itaque cùm unius cujuſque trianguli rectanguli area æqualis ſit producto ex ſemiſſe unius lateris circa rectum angulum in alterum latus, ut area ſit numerus quadratus; neceſſe eſt, ut unum latus circa rectum angulum ſit ad alterum, uti 2 ad aa, vel etiam uti 1 ad 2 aa. His ita inveſtigatis ſequitur ipſum primarium

PROBLEMA III.

Inveſtigare, an in triangulo rectangulo latera ſimul poſſint eſſe numeri rationales, & area numerus quadratus.

Ut latera omnia trianguli rectanguli ſint numeri rationales, neceſſe eſt, ut unum latus circa rectum angulum ſit ad alterum, ut z ad $x - \frac{zz}{4x}$ per problema I. Ut autem area ſit numerus quadratus, neceſſe eſt, ut unum

unum iſtorum laterum ſit ad alterum, uti 2 ad aa; vel etiam uti 1 ad 2aa: per probl. 2. Eſto jam ex hypotheſi

$$2 \text{ --- } aa \text{ --- } z, \begin{cases} x - \dfrac{zz}{4x} \\ \dfrac{4xx - zz}{4x} \end{cases}$$

$$\frac{4xx - zz}{2x} = aaz.$$

$$\frac{4xx - zz}{2xz} = aa$$

Ex quo patet, cùm aa debeat eſſe quadratum rationale, etiam $\frac{4xx - zz}{2xz}$ ipſi aa æquale debere eſſe quadratum rationale. Quod fieri non poſſe, ita demonſtrare aggredior. Ut fractio $\frac{4xx - zz}{2xz}$ eſſe poſſit numerus quadratus (6), requiritur, ut, ſi denominator 2xz ſit numerus quadratus, numerator 4xx — zz etiam talis exſiſtat: quod eſt ipſum viri illuſtris pronunciatum. Sed ſi denominator 2xz eſt numerus quadratus, numerator 4xx — zz numerus quadratus eſſe non poteſt. Ergo fractio $\frac{4xx - zz}{2xz}$ numerus quadratus eſſe non poteſt (7). Minorem probo: Sit ex hypotheſi 2xz numerus quadratus, cujus radix ſit t, eritque faciendo, ut 2x ad t, ita t ad $\frac{tt}{2x}$, $z = \frac{tt}{2x}$. Si ergò 4xx — zz etiam poteſt eſſe numerus quadratus, erit, ſubſtituendo in locum, zz, $\frac{t4}{4xx}$ ipſi æquali, $4xx - \frac{t4}{4xx}$ etiam numerus quadratus, adeoque multiplicando per 4xx numerum quadratum 16x4 —— t4 etiam æqualis numero quadrato. Unde quæſtio huc redit, cùm 16x4 & t4 ſint quadrato quadrata, an duo dari poſſint numeri quadrato quadrati, quorum differentia ſit numerus quadratus. Qui ſi dari poſſunt, problema eſt poſſibile; ſin minùs, im-

(6) Propoſitio ſic formanda eſſet: ſi fractio quadratus, & nominator quadratus; tunc & numerator quadratus.

(7) Syllogiſmus non eſt bonus in forma.

impoſſibile. Antequàm autem illud inquiram, hoc tantùm oſtendam, ad eamdem, quam dixi, quæſtionem omnem recidere difficultatem, ſi dicas, ut area trianguli rectanguli ſit numerus quadratus, neceſſe eſſe, ut unum latus circa rectum angulum ſit ad alterum, ut 1 ad 2 aa. Eſto enim ex hypotheſi

$$1 \text{———} 2aa - z, \frac{4xx - zz}{4x}$$

$$\frac{4xx - zz}{4x} = 2aaz$$

$$\frac{4xx - zz}{8xz} = aa$$

Quoniam itaque $\frac{4xx - zz}{8xz}$ numerus eſſe debet quadratus, neceſſe eſt, ut ſi denominator $8xz$ ſit numerus quadratus (8) numerator $4xx - zz$ talis etiam exſiſtat. Eſt ipſum viri illuſtris pronunciatum. At hoc fieri non poteſt. Ergò. Minorem probo: Sit ex hypotheſi $8xz$ numerus quadratus, ejuſque radix t, eritque, faciendo, uti $8x$ ad t, ita t ad $\frac{tt}{8x}$, $z = \frac{tt}{8x}$. Si ergò $4xx - zz$ eſſe poteſt numerus quadratus, erit, ſubſtituendo in locum ipſius zz, $\frac{t4}{64xx}$ ipſi æquali, $4xx - \frac{t4}{64xx}$ quoque numerus quadratus, & multiplicando per $64xx$, $256x4 - t4$ etiam numerus quadratus. Quæſtio itaque, uti dixi, iterùm eò redit, cùm $256x4$ & $t4$ ſint quantitates quadrato quadratæ, an duo dari poſſint numeri quadrato quadrati, quorum differentia ſit numerus quadratus? Eſto itaque

PROBLEMA IV.

Invenire duos numeros quadrato quadratos, quorum differentia ſit numerus quadratus.

Eſto $a4 - b4$ æqualis numero quadrato ex hypotheſi. Eritque aa radix ipſius $a4$ ad bb radicem ipſius $b4$, ut $x + \frac{zz}{4x}$ ad $x - \frac{zz}{4x}$, vel etiam,

(8) Quid ſi neuter ſit quadratus; poterit fractio nihilominùs eſſe quadratus.

etiam, uti $x + \frac{zz}{4x}$ ad z; per probl. 1. Sed non poteſt aa eſſe ad bb ut $x + \frac{zz}{4x}$ ad $x - \frac{zz}{4x}$. Quod ita probo. Eſto

$$aa \text{———} bb \text{———} \begin{cases} x + \frac{zz}{4x},\ x - \frac{zz}{4x} \\ \frac{4xx + zz}{4x},\ \frac{4xx - zz}{4x} \\ 4xx + zz,\ 4xx - zz \end{cases}$$

$$4aaxx - aazz = 4bbxx + bbzz$$
$$4aaxx + bbxx = aazz + bbzz$$
$$xx = \frac{aazz + bbzz}{4aa - 4bb}$$

Quoniam itaque $\frac{aazz + bbzz}{4aa - 4bb} = xx$ numerus debet eſſe quadratus, erit, ſi (9) denominator $4aa - 4bb$ eſt numerus quadratus, numerator $aazz + bbzz$ etiam talis. Eſt ipſum viri illuſtris pronunciatum. Sed hoc eſſe non poteſt. Ergò fractio $\frac{aazz + bbzz}{4aa - 4bb}$ non eſt numerus quadratus. Minorem probo. Statuatur $4aa - 4bb$ æqualis numero quadrato, eritque dividendo per 4 numerum quadratum quotiens $aa - bb$ etiam numerus quadratus. Statuatur porrò $aazz + bbzz$ æqualis numero quadrato, eritque dividendo per zz quadratum, quotiens $aa + bb$ numerus quadratus. Ergò $aa - bb$ & $aa + bb$ ſimul erunt numeri quadrati. Sed hoc eſſe non poſſe, ita demonſtro. Ut $aa - bb$ ſit numerus quadratus, a debet æquari $x + \frac{zz}{4x}$, b verò æquari debet vel $x - \frac{zz}{4x}$ vel z, per probl. 1. Ut autem $aa + bb$ ſimul ſit numerus quadratus, a debet æquari vel $x - \frac{zz}{4x}$ & b ipſi z: vel etiam a æquari debet ipſi z, & b ipſi $x - \frac{zz}{4x}$, itidem per probl. 1. Ergò ut $aa - bb$ & $aa + bb$ ſimul ſint numeri quadrati, *a* ſimul debet æquari vel $x + \frac{zz}{4x}$ &

x —

(9) Sed hoc non eſt opus: poteſt enim neuter eſſe quadratus, & tamen tota fractio quadrata.

$x - \frac{zz}{4x}$, vel etiam ipſi $x + \frac{zz}{4x}$ & z. Sed *a* non poteſt ſimul æquari $x + \frac{zz}{4x}$ & $x - \frac{zz}{4x}$. Eſſet enim $x + \frac{zz}{4x} = x - \frac{zz}{4x}$ pars toti: quod eſt abſurdum. Sed nec *a* ſimul æquari poteſt $x + \frac{zz}{4x}$ & z. Eſſet enim ob

$$x + \frac{zz}{4x} = z$$

$$4xx + zz = 4xz$$

$$zz = 4xz = 4xx$$

$$z = 2x$$

Quod fieri nequit, per probl. 1. ubi demonſtratum eſt, numerum 2 x majorem eſſe debere numero z. Ergò aa — bb & aa + bb non poſſunt ſimul eſſe numeri quadrati. Ergò aa non poteſt eſſe ad bb, ut $x + \frac{zz}{4x}$ ad $x - \frac{zz}{4x}$. Ergò nec aa ad bb eſſe poteſt, ut $x + \frac{zz}{4x}$ ad z; per coroll. 2. probl. 1. Ergò $a^4 - b^4$ non poteſt eſſe numerus quadratus, ſeu, quod idem eſt, problema quartum eſt impoſſibile, per Coroll. 3. probl. 1. Ergò & problema 3, quod a quarto dependet, impoſſibile eſt. Q. E. D.

Atque ita problema viri illuſtris bono cum Deo penitùs expediviſſe mihi videor. Qua in re quid præſtiterim, neſcio. Illud ſaltem gratiæ algebraicis noſtris apponi mihi velim, quod ipſos moleſta rerum impoſſibilium inveſtigatione liberaverim.

Quod ad alterum ejus problema attinet, nempe, invenire tres numeros x : y : z, ita ut x — y : x — z : y — z : xx — yy : xx — zz ſint numeri quadrati, quod methodo ſuâ ſolutu facillimum eſſe profitetur; peto, ut ejus exemplum mihi dare ne gravetur vir illuſtris, ut videam, problema illud poſſibile eſſe, methodoque ſuâ ſolubile. Quod ubi videro, id operam dabo, ut & ego ſolutionem ejus inveniam. Ego enim, quod pace ſummi viri dixero, cauſſam habeo ſuſpicandi, problema illud, cujus ſolutio hoc ſcripto continetur, beneficio methodi illius ſuæ non facilè ſolutum iri. Vale, reverendiſſime domine Abbas, faveque rev. magnif. tuæ obſequentiſſimo A. E. *Ienſæ a. d.* 10. *Octobr.* 1679.

(28.)

LEIBNITIUS MOLANO.

Lettre de Mr. LEIBNIZ *à Mr.* MOLANUS, *où il trouve bon de porter au Tribunal de l'Académie des Sciences de Paris, la prétendue démonſtration de l'impoſſibilité du problème numérique de Mr.* ECKHARD *contenue dans ſa Lettre du* 27. *May.*

JE croyois fermement, Mr. que ma derniére lettre ſeroit capable de faire voir à M. *Eckhardus*, en quoi conſiſte l'imperfection de la méthode dont il s'eſt ſervi. Mais j'ai appris pluſieurs choſes par cette diſpute, & entre autres celle que je ne croyois pas, c'eſt qu'il faut un Juge de controverſes en Mathématiques auſſi-bien qu'en Théologie; c'eſt pourquoi, ſi M. *Eckhardus* le trouve bon, je ne ſçai point d'autre moyen que de choiſir un Juge. Si vos affaires le permettoient, Monſieur, il ne faudroit avoir recours qu'à vous. Mais comme vous avez trop d'autres ſoins, pour vous appliquer à une choſe de cette nature, j'ai ſongé, que le meilleur ſeroit de communiquer les piéces de nôtre procès à l'Académie Royale des Sciences établie à Paris. Car il y a des perſonnes parfaitement intelligentes en Géometrie & en Algébre; comme entr'autres M. *Hugenius*, dont *Schoten* fait ſi ſouvent mention dans ſes *Commentaires*, & qui entend la méthode de *Deſcartes* autant que qui que ce ſoit. Ces Meſſieurs jugeront, ſi la démonſtration de l'impoſſibilité du problème numerique dont il s'agit, que M. *Eckhardus* a apportée, eſt valable en aucune façon. Et même puiſque M. *Eckhardus* ſe tient ſi aſſuré de ſa ſolution, qu'il ne lui en reſte pas le moindre ſcrupule, à ce qu'il dit, & qu'il prend tout ce que j'ai objecté pour une raillerie, je ſuis prêt à faire une gageure de 40 à 50 Ecus plus ou moins, comme il lui plaira. S'il en eſt content, nous mettrons l'argent entre vos mains, Monſieur, ſi vous avez la bonté de vous en charger, en témoignant de l'avoir reçu, & d'être prêt à le donner à celui qui aura gagné ſa cauſe par la ſentence. Voila le ſeul moyen de décider la queſtion à ce que je vois, puiſque les raiſons de l'un ſur l'autre ne peuvent rien, & puiſque l'un eſt perſuadé de la préoccupation de l'autre. Ainſi nous n'aurons pas beſoin ni d'expreſſions trop fortes, ni de comparaiſons odieuſes. M. *Eckhardus* verra que je ne parle ni par raillerie, ni par opiniâtreté, puiſque je me veux expoſer à une gageure. Et de ſon côté il n'aura rien à craindre, puiſque tout eſt ſi clair, comme il le dit; car cela étant, les Juges ſeront ou fort mal habiles, ou fort injuſtes, s'ils ne prononcent pas pour lui.

Cependant je veux faire encore un effort, & je veux eſſayer ſi je me puis

puis rendre intelligible. Monſieur *Eckhardus* s'eſt ſervi de pluſieurs moyens pour prouver l'impoſſibilité de nôtre problème, mais il a abandonné tous les autres après mes remontrances; & comme j'avois déclaré, que le problème ſeroit reſolu ſi on pouvoit prouver que cette équation $x^3 - x$ *æqu.* a^2 n'eſt jamais reſoluble en nombres rationels, M. *Eckhardus* a voulu profiter de cet avis, & voyant que l'équation n'eſt pas déprimable généralement, il a cru qu'il s'enſuit de là qu'elle n'eſt jamais déprimable en aucun cas particulier. Le raiſonnement *in forma* doit être tel. Toute équation, qui n'eſt jamais diviſible en aucun cas par x plus ou moins, le diviſeur du dernier terme n'eſt pas réſoluble en nombres rationels: Cette équation eſt telle: *Ergò*: *Probatur minor.* Toute équation, qui n'a jamais (en aucun cas) d'autres diviſeurs du dernier terme, que 1 a a^2, & qui n'eſt pas diviſible ni par x plus ou moins 1. ou a ou a^2, n'eſt pas diviſible par x plus ou moins aucun diviſeur du dernier terme. Or notre Equation eſt telle, c'eſt-à-dire, elle n'a jamais (en aucun cas) d'autre diviſeur, que 1 ou a ou a^2, & n'eſt pas diviſible par là: *Ergò*: *Nego minorem proſyllogiſmi.* Car je ſoutiens, qu'il y a certains cas où il y a d'autres diviſeurs, que 1. a. a^2: par exemple, lors que *a* eſt diviſible lui-même. Je crois que cela eſt raiſonner *in forma*, & je crois que le problème ſeroit réſolu, ſi poſant a égal à f g, l'équation pouvoit être diviſée par $x - f$; il faut donc prouver que cela eſt impoſſible, & quoiqu'on prouve que l'équation n'eſt pas diviſible par x plus ou moins, ou a ou a^2, c'eſt-à-dire, par 1 ou f g, ou $f^2 g^2$, on n'a pas encore prouvé qu'elle n'eſt pas diviſible par $x - f$. Et cela a encore lieu de plus lorſque *a* eſt une fraction. Il faut donc, ou que M. *Eckhardus* achève ce raiſonnement, ou qu'il en forme un autre, pour me faire comprendre ſa démonſtration prétendue de l'impoſſibilité.

Mais puiſque les inſtances ont plus de force que les raiſons pour faire toucher les choſes au doigt, je lui en donnerai une, & quand il l'aura conſidérée, je ne ſçai s'il aura aſſez de fermeté pour demeurer dans ſa premiére opinion. Voici une équation fort ſemblable à la notre:

$$(x^3 - x^2 \text{ égal à } a^2)$$

Car la notre eſt

$$x^3 - x \text{ égal à } a^2$$

Si je propoſois donc cette équation ($x^3 - x^2$ égal à a^2) à M. *Eckhardus*, & demandois ſi elle eſt déprimable ou réſoluble en nombres en certains cas, ou non; M. *Eckhardus* ſuivant ſon raiſonnement, ſeroit obligé de dire que non. Et en étant préoccupé, comme il eſt, je crois qu'il le diroit ſur le champ, s'il étoit ici. Car tous les diviſeurs du dernier terme de cette équation ſont 1 ou a ou a^2 comme dans la notre. Et comme la notre, à l'égard de la formule générale, ne ſe peut diviſer par x plus ou moins 1 ou a ou a^2, celle-ci de même ne ſe peut pas diviſer

viſer ainſi. Donc ſi la notre par cette raiſon n'eſt jamais reſoluble en nombres rationels, cette nouvelle ($x^3 - x^2$ — égal à a^2) ſera auſſi impoſſible en nombres. Cependant Mr. *Eckhardus* ayant raiſonné ainſi ſuivant ſa méthode, ſeroit bien trompé, ſi je lui faiſois voir qu'elle eſt très poſſible. Car poſant x égal à 5, nous aurons $x^3 - x$ égal à 100, c'eſt-à-dire, à un quarré a^2, dont la racine *a* eſt 10 &c. Et en ce cas, dans l'équation $x^3 - x^2$ égal à a^2 poſant *a* égal à f g. & $x^3 - x^2$ égal à $f^2 g^2$, & poſant x égal à 5 & f égal à 5 & g égal à 2. l'équation eſt diviſible par $x - f$ (car x eſt égal à f) quoique cette diviſibilité ne paroiſſe pas dans la formule générale : ainſi cette conſéquence de M. *Eckhardus*, [*quoniam* $x^3 - x^2 - a^2 = 0$ *non eſt diviſibilis* (*nempe per x plus vel minùs termini* 1 *vel a vel* a^2; *nam de his tantùm locutus eſt*) *etiam* $x^3 - x^2 - f^2 g^2$ *æqu.* 0 *nulla ratione* (*ſcilicet per x plus vel minùs diviſore ultimi termini ut f*) *diviſibilem fore*]. eſt clairement refutée.

Si après cela M. *Eckhardus* veut encore ſoutenir ſa démonſtration, je ne vois point d'autre expédient, que d'avoir recours à un arbitre, comme j'ai dit ci-deſſus. Pour ce qui eſt de cette queſtion, ſi la fraction $\frac{2 b^2 c - c^2}{2 b^2 - 2 c}$ ne ſçauroit être un quarré, quand le numérateur & le nominateur ne peuvent être des quarrés enſemble; je crois encore, que quand M. *Eckhardus* acheveroit même la preuve de ce qu'il avoit avancé, (que ces deux nombres $2 b^2 c - c^2$ & $2 b^2 - 2 c$ ne peuvent être quarrés enſemble) néanmoins la conſéquence, pour prouver que la fraction même ne peut être un quarré, ne ſeroit pas bonne en général, & réuſſiroit ſeulement dans ce cas particulier, quand le numerateur & le nominateur ſont *primi inter ſe*; ce qui n'arrive pas toujours, comme je l'ai fait voir par des inſtances. Il ne ſuffit pas de réduire la formule algébrique générale d'une fraction aux termes plus ſimples, pour conclure quelque choſe de tous les cas particuliers qui ſont compris là-deſſous; car il peut arriver, que la formule générale ſoit réduite aux plus ſimples termes, c'eſt-à-dire, qu'on ne la puiſſe abréger d'une maniére convenable à tous les cas particuliers pour quelques cas particuliers. Et par conſéquent, toute preuve d'impoſſibilité, qui eſt fondée ſur ce que la formule générale eſt réduite aux plus ſimples termes, prouve ſeulement, que ce qu'on demande n'eſt pas poſſible en tous les cas en général, mais elle ne prouve pas que cela eſt impoſſible en tous les cas particuliers. Si M. *Eckhardus* conſidère ceci avec attention, peut-être ſe laiſſera-t-il convertir. Car je crois, que tout ce qui l'a trompé dans ſa derniére lettre, dépend de l'intelligence de ceci. Au reſte il ſe ſert de quantité d'expreſſions pour exagérer la clarté prétendue de ſon opinion, & pour faire voir que j'ai grand tort de contredire à des choſes ſi claires; ce qu'on pourroit imputer à mon opiniâtreté, puiſqu'il n'a pas le moindre ſcrupule, & que ſes réponſes ſont

 les

les plus aiſées du monde, & que c'eſt comme ſi on nioit, que 24 fait vingt & quatre, & que toute analyſe ne vaut rien, s'il ſe trompe ici ; & que je pourrois plus faire que tous les algébriſtes, ſi je lui montre ſon erreur ; item, que je demande des choſes, que Dieu même ne ſçauroit faire ſucceſſivement &c. Mais je n'y veux pas toucher, pour ne pas échauffer la diſpute, & j'aime mieux chercher des termes, qui marquent l'eſtime que j'ai pour M. *Eckhardus*, & ſur-tout le zèle avec lequel je ſuis &c.

P. S.

Quand j'ai dit, que les équations ſont explicables en nombres, lorſqu'elles ſont déprimables, j'ai parlé des cubiques; pour ce qui eſt de *a* égal à f g, ou f g h. &c. on peut trouver des démonſtrations générales, qui conviennent à toutes ces ſuppoſitions particuliéres. Mais il faut d'autres méthodes que les ordinaires. Je ne me ſouviens d'aucun problème que Mr. *Eckhardus* m'ait propoſé, ſi ce n'eſt celui-ci, *invenire duos cubo-cubos æquales cubo.* Mais je demande, comment M. *Eckhardus* l'entend, c'eſt-à-dire, s'il en veut la réſolution en nombres rationels, ou s'il demande ſeulement la ſolution en racines irrationelles, comme il a voulû faire à l'égard de celui-ci, *invenire duos numeros quadrato-quadratos æquales quadrato*; car de cette maniére il ne mérite pas d'être cherché. Mais ſi M. *Eckhardus* le demande en nombres rationels, je déſire qu'il diſe, s'il le peut réſoudre lui-même en nombres rationels, & s'il en peut donner des exemples; en ce cas j'en chercherai la réſolution. Autrement il y a grande apparence, qu'il eſt auſſi impoſſible que celui des deux quarrés-quarrés.

N°. LXXXIX.

N°. LXXXIX.

FRAGMENS

DE DIVERSES LETTRES

DE M^R^. G. G. LEIBNIZ

A M. DE LA LOUBERE.

MR. *de la Loubére*, de l'Académie Françoiſe, & de celle des Inſcriptions & Belles-Lettres, mort en 1729. fit connoiſſance avec Mr. *Leibniz* à Hanover, où il fut porter des complimens à S. A. S. feu Monſeigneur l'Evêque d'Oſnabrug ſur ſon avénement à la ſucceſſion du Duché de Hanover. Il lui communiqua ſa définition de la raiſon Géométrique, & ſon problème, dans lequel il donne *la méthode de donner par nombres & par lettres, autant de ſouſtractions qu'on veut du détail de la raiſon des Racines des deux hautes Puiſſances de toute Equation donnée.* Il y eut une correſpondance ſuivie entre ces deux Sçavans, dont nous avons perdu une partie: Celle qui regarde les Mathématiques ſe trouve dans un livre intitulé, *de la Réſolution des Equations ou de l'extraction de leurs Racines, par feu Mr. de la Loubére &c. imprimé à Paris chez Quillau en* 1732 *in* 4°. publié par M. *Bégaud*, chargé de ce ſoin par un Anonyme, qui a dû poſſéder pluſieurs lettres de *Leibniz*, écrites à *de la Loubére*: Elles feroient mieux placées dans cette Collection que dans un cabinet où elles ſe trouvent vraiſemblablement perdues: Ce qui nous en reſte, ce ſont les quatre Lettres ſuivantes.

1. *Extrait d'une lettre écrite d'Hanover le $\frac{11}{21}$ Novembre* 1680.

J'ai reçu votre obligeante lettre, dont je vous ſuis infiniment obligé. Je vous aurois répondu il y a long-tems, mais elle m'a été renduë aſſez tard, & lorſque j'étois embarraſſé avec mon entrepriſe aux mines, d'où je prétends de tirer l'eau..... Je voudrois ſçavoir la progreſſion des quotiens redoublés, exprimant la grandeur du cercle, comme vous exprimez les termes de la moyenne & extrême raiſon; mais ce ſera un peu pénible, à moins qu'on ne trouve quelque abregé pour cela. Je n'ai pas encore avancé à mon gré dans cette méthode. Pour la perfectionner il faudroit pouvoir reſoudre ces Problèmes généraux, qui ſeroient comme de l'algorithme de cette méthode, *nimirum addere & ſubtrahere, item multiplicare & dividere quotientes replicatos, exempli gratiâ :*

Sit $\frac{a}{b}$ æqual. $1 + \cfrac{1}{l + \cfrac{1}{m + \cfrac{1}{n}}}$ &c. Et $\frac{c}{d}$ æqual. $1 + \cfrac{1}{p + \cfrac{1}{q + \cfrac{1}{r}}}$ &c.

Invenire $\frac{ac}{bd}$ *æqual. &c. Item* $\frac{a}{b} + \frac{c}{d}$ *æqual. &c. poſito eſſe* l, m, n, *&c. Item* p, q, r, *&c. eſſe numeros integros datos, id eſt ſaltem datas eſſe & ipſarum rationes inter ſe invicem, ſive datos eſſe valores ipſarum* $\frac{l}{m}$ *&* $\frac{l}{n}$, *&* $\frac{m}{n}$ *&* $\frac{l}{p}$, *&* $\frac{m}{q}$ *&* $\frac{l}{r}$ *aliarum ejuſmodi rationum expreſſos per quotientes replicatos numero finitos, quia ſunt commenſurabiles & dati. Puto hoc poſſibile eſſe, & ex attenta conſideratione rationum commenſurabilium talem methodum generalem eligi poſſe. Ea autem habita haberetur, ut dixi, algorithmus talis calculi, & perinde calculare poſſemus adhibitis æquationibus aliis quibuslibet finitis ordinariis. Antequam autem alius hujuſmodi calculi algorithmus inveniatur, id eſt rationum additio & compoſitio, ſive multiplicatio ſemper hærebimus, nec niſi pauca & faciliora dabimus.*

2. *Autre Extrait du $\frac{15}{25}$. Août* 1681.

Monſieur, je vous dois encore réponſe à une lettre très obligeante que vous avez eu la bonté de m'écrire de Toulouſe. Mais j'eſpérois de pouvoir pouſſer plus avant la recherche, *De quotientibus replicatis*, dont la ſuite exprime l'eſpèce de la raiſon, ce qui eſt conforme à vos penſées; cependant on m'a taillé tant d'autres beſognes..... Je ſouhaite fort, Monſieur, que vous pourſuiviez vos penſées de Géométrie, qui ſont très conſi-

conſidérables & très ſolides. J'eſpère que vous aurez mis vos projets en état de ne pas en être empêché. Il eſt vrai que la Cour peut être . . . .

3. *Autre Extrait du $\frac{5}{15}$ Octobre 1691.*

Pour moi en particulier j'aurois ſouhaité de voir votre méthode d'eſtimer les grandeurs par la recherche de la commune meſure (ou d'une ſérie de quotiens, lorſque cette meſure ne ſe ſçauroit trouver) pouſſée plus avant. Vous vous ſouviendrez peut-être que j'avois coutume d'exprimer votre ſérie des quotiens par une telle équation

$$\frac{a}{b} = l + \cfrac{1}{m + \cfrac{1}{n + \cfrac{1}{p + \cfrac{1}{q + \&c.}}}}$$

où l, m, n, q, &c. ſont des quotiens, leſquels ſont égaux, lorſque la ligne eſt coupée en moyenne & extrême raiſon. Mais ce qui me fait répéter cela ici, eſt que j'ai remarqué depuis dans l'Arithmétique des infinis de Mr. *Wallis*, que Milord *Brounker*, (qui a été Préſident de la Societé Royale) avoit exprimé la grandeur du cercle par une formule approchante, mais qui ne donne pas cette ſerie des quotiens, comme je l'aurois ſouhaité. Voici cette expreſſion.

Le quarré du diamètre eſt au cercle,

Comme $1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{4}{2 + \cfrac{9}{2 + \cfrac{16}{2 + \cfrac{25}{2 + \cfrac{36}{2 + \&c.}}}}}}$ eſt à l'unité.

Cette expreſſion eſt en quelque façon un renverſement de la votre, énoncée à ma maniére ; car au lieu que dans votre expreſſion il y a toujours l'unité, il y a dans celle-ci 1, 4, 9, 16, &c. qui ſont les quarrés tous de ſuite ; & au lieu de vos quotiens variables, il y a ici 2, 2, 2, &c. Je ne ſçai ſi cela vous pourroit peut-être ſervir pour exprimer la grandeur du cercle par une ſérie de vos quotiens, ce qui ſeroit fort conſidérable.

4. *Autre*

4. *Autre Extrait du 6. Novembre 1705.*

Je ſouhaiterois, Monſieur, que vous fuſſiez de loiſir & d'humeur de pourſuivre vos belles penſées ſur les proportions, en les cherchant par la voie de l'Inquiſition, *maximæ communis menſuræ*, ou par une ſubſtraction répetée du réſidu. Il eſt remarquable que par cette voie, non-ſeulement la recherche ſe termine, quand les grandeurs ſont commenſurables, mais auſſi quand l'incommenſurabilité eſt du premier degré; c'eſt-à-dire, quand l'équation eſt du ſecond, la propoſition infinie des quotiens eſt périodique.

N°. XC.

N°. XC.

DEUX LETTRES DE Mr. G. G. LEIBNIZ A M. NICOLAS FATIO DE DUILLIER,

avec une Réponſe de celui-ci. (a)

N°. I.

Poſtcript d'une Lettre de Mr. Leibniz *à M.* De Beyrie *Réſident à Londres pour les Ducs de Zell & Hanovre, écrite vers le commencement de l'an* 1694.

JE ſuis bien obligé à M. *Fatio* de l'honneur de ſon ſouvenir, & je vous ſupplie bien fort, Monſieur, de lui témoigner que j'eſtime extrêmement ſon mérite ſi extraordinaire. Je m'en promets beaucoup pour le progrès des ſciences profondes. Les échantillons qu'il a donné ne nous en laiſſent point douter. Je voudrois ſavoir des particularités des progrès de ſes méditations, & ſi j'étois en état de lui rendre quelques ſervices, ce ſeroit un de mes plus grands plaiſirs. Comme M. *Newton* eſt un des ſavans de l'univers que j'eſtime le plus, & que M. *Fatio*, à ce que j'apprens, a des liaiſons avec lui très particulières, j'attens un grand effet de cette combinaiſon de mérite. Je ſerois bien aiſe d'apprendre ce que dit M. *Newton* ſur quelques objections de M. *Huygens*, dans ſon traité de la lumiére, & ce qu'il juge de ſes ondes de lumiére, qui me paroiſſent heureuſement trouvées. Il n'y a rien de ſi beau que l'explication de la

(a) Nous ſommes redevables de ces lettres à M. *Le Sage*, correſpondant de l'Académie des Sciences de Paris, qui les avoit fait venir d'Angleterre en 1766, avec pluſieurs papiers de M. *Fatio de Duillier*, mais dont Milord Comte *Stanhope*, membre diſtingué des Societés de Londres & de Montpellier, n'a pas voulu permettre qu'il fit les fraix. M. *Le Sage* ſe propoſoit de les faire paroître dans un ouvrage auquel il travaille, ſur l'*Hiſtoire des tentatives qu'on a faites pour découvrir la cauſe de la peſanteur?* Mais il a bien voulu contribuer à la perfection de ce Recueil, en nous les cédant pour les rendre publiques avant que ſon ouvrage paroiſſe.

la route des planètes, que M. *Newton* nous a donnée par la ſeule Trajection, jointe à la Peſanteur. Je m'imagine néanmoins qu'il y faudra joindre quelque mouvement de la matiére fluide. Si la peſanteur eſt l'effet d'une force centrifuge, ſuivant *Kepler*, *Deſcartes* & Mr. *Huygens*, elle viendra d'une maniére de tourbillon. Il me paroit auſſi très probable que les queues des Comètes ſoient des émiſſions réelles. M. *Huygens* m'a mandé que M. *Fatio* avoit fait des progrès très conſidérables ſur la converſe des Tangentes, mais qu'en ayant communiqué avec M. *Newton*, il avoit trouvé que celui-ci étoit allé bien au delà. Ce que je voudrois ſavoir eſt, ſi M. *Newton* peut toujours reduire cette converſe aux quadratures. Pardonnez moi, Monſieur, d'inſérer dans votre lettre, ce qui ne peut convenir qu'à M. *Fatio*.

N°. 2.

Lettre de M. Nicolas Fatio de Duillier *à M.* De Beyrie, *en réponſe à la précédente.*

Je ſuis extrêmement obligé, Monſieur, à M. *Leibniz* de toutes ſes honnêtetés. Vous ſavez dans quels engagemens je ſuis entré depuis peu; ils ſont d'une telle nature, qu'ils ne me laiſſent pas la liberté d'écouter les propoſitions qui me peuvent être faites d'ailleurs, mais ils n'empêchent pas que je ne reſſente les offres de M. *Leibniz* avec toute la reconnoiſſance que j'en dois avoir. Il me fait pluſieurs queſtions dans la lettre qu'il vous a écrite. Voici, Monſieur, à peu près ce que j'y dois répondre.

M. *Newton* perſiſte à croire que toutes les parties des corps terreſtres s'attirent les unes les autres, nonobſtant ce que M. *Huygens* dit à la page 159. de ſon traité de la Peſanteur. Je ſuis, Monſieur, du même ſentiment que M. *Newton*, & j'ai fait voir à l'un & à l'autre de ces illuſtres Philoſophes, qu'il pourroit y avoir une cauſe méchanique de la Peſanteur, qui rende raiſon, non ſeulement de cette attraction mutuelle, mais encore de la diminution de la Peſanteur dans la proportion réciproque du quarré de la diſtance. Et cette cauſe eſt univerſelle pour le Soleil, la Lune, la Terre & tous les Aſtres: & la longueur du tems ne peut la détruire, ni le mouvement des corps céleſtes n'en peut empêcher l'effet.

Nous convenons M. *Newton* & moi, que la quantité de matiére qui eſt dans l'univers, ne remplit qu'une partie extrêmement petite de l'eſpace, de ſorte qu'il demeure non-ſeulement plus de vuide que de plein, mais encore incomparablement davantage. Il eſt vrai que l'explication de la lumiére, telle que M. *Huygens* la donne, ne s'y accorde pas tout-à-fait, à moins d'y faire une petite correction. Mais quoique cette théorie ſoit parfaitement belle & digne de ſon auteur, il y a des raiſons très fortes,

tes, tirées des proprietés de la lumiére & des couleurs, qui nous perſuadent que les raïons de lumiére ſont des corpuſcules qui viennent actuellement du Soleil & des étoiles juſqu'à nous.

La Rareté, que M. *Huygens* paroit avoir de la peine d'admettre dans le monde, eſt abſolument néceſſaire. Car ſi toutes les parties qui compoſent l'Ether ſe repoſoient, il eſt évident qu'elles feroient une extrême réſiſtance aux mouvemens des corps céleſtes, & que cette réſiſtance ſeroit plus grande, plus on ſuppoſeroit l'eſpace rempli de corpuſcules. Or j'ai une démonſtration exacte, que, ſi on fait ceſſer le repos de ces parties de l'Ether, & qu'on leur donne des mouvemens entremêlés, tels que l'on conçoit ceux des Fluides, la réſiſtance augmentera, & cela d'autant plus, qu'on donnera plus de rapidité à ces mouvemens. La viteſſe de la lumiére & des autres corps peut être auſſi grande que l'on veut dans un eſpace, que l'on ſuppoſe être preſqu'abſolument vuide.

Pag. 163. du Traité de M. *Huygens*. M. *Newton* eſt encore indéterminé entre ces deux ſentimens. Le premier, que la cauſe de la Peſanteur ſoit inhérente dans la matiére par une loi immédiate du Créateur de l'Univers: Et l'autre, que la Peſanteur ſoit produite par la cauſe méchanique que j'en ai trouvée, qui fait que toutes les parties de la matiére s'attirent mutuellement, excepté celles qui produiſent la Peſanteur même, & les autres qui pourroient être moins groſſiéres que celle-ci.

Pag. 164. M. *Newton* ſe rend à ce raiſonnement de M. *Huygens*.

Pag. 166. M. *Newton* eſt perſuadé que la Peſanteur vers la terre eſt moindre ſous l'équateur, non-ſeulement à cauſe du mouvement journalier de la terre, mais encore à cauſe de la diſtance de l'équateur au centre, qui eſt plus grande que celle du pole au centre.

Il n'eſt pas néceſſaire de joindre à la Peſanteur vers le Soleil un mouvement de la matiére qui l'environne, pour faciliter celui des Planètes, & la peſanteur n'eſt pas l'effet d'une force centrifuge. Il eſt indubitable que les queues des Comètes ſont des émiſſions réelles, & il ne faut que conſtruire quelques-uns de leurs orbes, pour voir que ces émiſſions ſont toujours ſituées dans le plan du mouvement des Comètes.

Il eſt vrai que M. *Newton* a fait des progrès extraordinaires ſur la Converſe des Tangentes; mais je ne penſe pas qu'il la puiſſe toujours reduire aux Quadratures.

Dans ma théorie de la Peſanteur, je ſuppoſe la Rareté des corps terreſtres preſqu'immenſe. Mais les derniéres parties dont ils ſont compoſés doivent être d'une même groſſeur. Si, par exemple, on donnoit aux derniéres parties d'un certain corps terreſtre la figure d'un Dodecahedre, je n'en voudrois conſerver que les arrêtes, qui auroient la figure d'un filet, & vuider tout le reſte de la figure; & ces arrêtes ou fibres ſeroient formées par des cylindres preſqu'infiniment déliés, mais de la même

 groſſeur,

groſſeur, c'eſt à dire, du même diamètre que toutes les autres fibres qui compoſent les autres corps terreſtres. Je ſuppoſe encore une matiére preſqu'infiniment rare, & extrêmement déliée, diſperſée par tout l'univers, & dont les parties ſoient mües chacune avec une viteſſe immenſe en ligne droite, mais l'une en un ſens, & l'autre en un autre: & je démontre que ces ſeules ſuppoſitions ſuffiſent pour expliquer exactement tous les phénomènes de la Peſanteur. Je ſais, Monſieur, que je ne dis rien que je ne puiſſe prouver. M. *Newton* convient de l'exactitude de mes démonſtrations, mais il m'a fallu beaucoup de tems pour en convaincre M. *Huygens*: Il avoit dans l'eſprit une objection qui m'a arrêté moi-même dans mes recherches pendant trois ans; car il ſemble que dans ma théorie la matiére ſe doit épaiſſir autour de la terre, parce que la Peſanteur reſulte de ce qu'une partie de la matiére, qui vient de toutes parts à la terre, s'en éloigne après avoir perdu tant ſoit peu de ſon mouvement. Mais cette objection s'évanouït entiérement quand on l'examine avec exactitude, & c'eſt de quoi M. *Huygens* eſt à préſent perſuadé. Il ſe paſſe ici quelque choſe d'admirable, qu'il faut avoir remarqué avant qu'on puiſſe voir que l'objection n'a rien de ſolide, quoiqu'elle paroiſſe d'abord avoir une force invincible. Pour produire toutes les Peſanteurs que nous connoiſſons dans le ſyſtème du Soleil & des Planètes, il ſuffit de ſi peu de matiére que l'on voudra, pourvu qu'elle ſoit ſuffiſamment diviſée, & qu'elle ſe meuve avec une aſſez grande rapidité. Ainſi il y a dans un ſeul grain de ſable plus de matiére qu'il n'en faut pour produire toutes ces peſanteurs; & à proportion il n'en faut pas davantage pour les autres parties du monde.

Je ne ſais, Monſieur, ſi cette réponſe ſatisfera M. *Leibniz*, qui auroit peut-être demandé un plus grand détail; mais il me ſemble que ce que j'ai dit doit ſuffire &c. *A Londres le* 30. *Mars* 1694.

N°. 3.

Ecrit de M. LEIBNIZ *à M.* DE BEYRIE, *pour le remettre à M.* NICOLAS FATIO.

J'ai lu la lettre de M. *Fatio* avec tout le plaiſir que les méditations d'un auſſi habile homme que lui, peuvent donner à une perſonne qui aime avec paſſion tout ce qui peut faire avancer nos connoiſſances. Il y traite du Vuide, ou de la Rareté, de l'Attraction ou de la Peſanteur, de la Lumiére, & du mouvement des Aſtres & des Comètes; & il donne quelques remarques courtes ſur ce que M. *Huygens* a objecté à Mr. *Newton*. Comme il n'a pas voulu entrer dans le détail, il doute ſi ſon diſcours me pourra ſatisfaire: Je trouve pourtant que ce qu'il en dit eſt aſſez

aſſez conſidérable ; & quoiqu'il ne ſeroit pas raiſonnable de lui demander ce détail, j'ai cru qu'il me ſeroit permis d'y faire quelques réflexions, ſauf à M. *Fatio* d'y avoir l'égard qu'il voudra.

Pour ce qui eſt du vuide, & de la rareté, je demeure d'accord qu'un grain de ſable peut donner plus de matiére qu'il ne faut, pour qu'elle ſe répande par tout l'eſpace du grand orbe, & au delà : & on peut dire que la moindre particule de la matiére, étendue en filets aſſez minces & aſſez roides, pourra embraſſer de telle ſorte un eſpace donné, quelque grand qu'il ſoit, qu'il n'y ait dans cet eſpace aucune partie d'une grandeur donnée, où quelqu'un de ces filets ne paſſe. Je conçois auſſi que par le moyen des corps ainſi diviſés, & percés à jour, pour ainſi dire, on fera à peu près l'effet des corps pleins: Ainſi on peut conſidérer cela comme une hypothèſe plauſible en phyſique, & ceux qui admettent les atomes & le vuide, n'ont aucun ſujet de la rejetter. Et quoique M. *Fatio* ne diſe point que ces filets, ou ces arrêtes, doivent être roides en atomes ; je crois pourtant que c'eſt ſon ſentiment. Mais je vois qu'il ne ſe contente point de donner cette doctrine du vuide pour une hypothèſe ; il la tient pour une vérité conſtante. Sa raiſon eſt, que ſi les parties de la matiére ou de l'Ether, qu'on fait remplir les eſpaces, repoſent, il eſt évident qu'elles réſiſteront extrêmement aux mouvemens des corps céleſtes: & ſi cet Ether a un mouvement entremêlé, tel qu'on le donne aux fluides, M. *Fatio* prétend démontrer, qu'il reſiſtera encore davantage, à meſure qu'on donnera plus de rapidité à ce mouvement. Je conçois en effet qu'un milieu plein qui repoſe, reſiſte au mouvement d'un corps, non pas par la raiſon que nous en donne *Deſcartes*, mais parce que ce corps n'y ſauroit être mû ſans donner quelque mouvement au milieu ambient, ce qu'il ne ſauroit faire ſans perdre du ſien ; & je ne ſuis pas éloigné de juger que l'ambient ayant déja un mouvement, reſiſtera encore davantage à un autre mouvement que le corps qui s'y doit mouvoir lui voudra donner. Mais cela ſe doit entendre des commencemens, car peu à peu le corps & l'ambient s'accommoderont enſemble, & c'eſt ce qu'il faudroit croire des aſtres & de l'éther ; comme en effet j'ai eu des méditations ſur cet accommodement de leurs mouvemens.

Quant à la Peſanteur, & l'attraction des corps, ſi chaque partie d'un corps attire chaque partie de l'autre corps, il faudra dire que c'eſt une qualité inhérente à la matiére, en vertu de la premiére loi du Créateur, ce que M. *Newton* ne croit pas être hors d'apparence : Mais pour en rendre une raiſon méchanique, comme fait M. *Fatio*, il ne faut l'entendre que des parties groſſiéres, en comparaiſon de celles qui font la Peſanteur. En effet, cette attraction mutuelle de Mr. *Newton* m'avoit paru aſſez bien imaginée ; mais j'avois cru que pour l'admettre, il faudroit l'expliquer méchaniquement, comme je vois que M. *Fatio* a entrepris de le faire.

Mais il faudroit ſe bien aſſurer du fait. Quant à la Peſanteur, ou attraction en général, j'ai témoigné autrefois, dans une diſpute que j'avois avec M. *Papin*, que j'étois encore en ſuſpens ſur la cauſe de la Peſanteur; & quoique ce que M. *Huygens* en dit, en employant la force centrifuge, ſoit extrêmement beau & plauſible, j'avois jugé, qu'en cas qu'on ne puiſſe point expliquer par-là la diminution en raiſon reciproque des quarrés des diſtances, vérifiée [ce ſemble] par les aſtres, il faudroit avoir recours à une cauſe ſemblable à la lumiére, qui obſerve cette raiſon reciproque. J'avois médité ſur l'un & ſur l'autre, & j'avois conçu une maniére de mouvement circulaire, qui ne manque pas de plauſibilité, dont la force centrifuge donneroit cette loi de la peſanteur. Cependant j'avois penſé encore à un mouvement rectilinéaire, en concevant une exploſion continuelle dans les corps qui attirent les autres, qui feroit naitre une attraction pour faire échange: Car l'exploſion d'une matiére denſe & déliée feroit naitre l'attraction de la matière rare & groſſiére qui eſt a l'entour [pourvu qu'on ſuppoſe l'eſpace occupé]; à peu près comme l'exploſion qui ſe remarque dans le feu, eſt accompagnée de l'attraction de l'air [quoiqu'il y entre d'autres cauſes]. Et la matiére groſſiére [non pas tout-à-fait, mais en comparaiſon de la déliée] étant attirée vers le centre, ſeroit briſée & rendue déliée, à peu près comme le feu conſume & diſſipe ce qu'il a attiré, pendant qu'en échange la matiére déliée & denſe qui eſt proche du centre, étant diſperſée vers la circonférence, deviendroit rare à ſon tour, & ſerviroit à la nourriture des corps groſſiers, pour entretenir cette belle circulation de la Nature. Or cette exploſion imitant les loix de la lumiére [qui peut-être encore n'eſt autre choſe elle-même qu'une telle exploſion] feroit une attraction, qui obſerveroit la raiſon réciproque des quarrés des diſtances. Peut-être encore que le mouvement circulaire & rectilinéaire concourent à un même effet; le ſtyle de la nature étant d'être abondante ſans ſuperfluité, dans les moyens qu'elle employe pour ſes fins. Mais comme M. *Fatio* a médité plus profondément ſur ces choſes, je me ferai toujours un plaiſir d'être inſtruit par lui, & je me ferai un honneur de l'avouer ſincérement.

Je finirai par les Aſtres & la lumiére. Et quant à la lumiére, la grande difficulté, à mon avis, eſt de rendre raiſon des couleurs, ſurtout de celles qu'on apelle fixes. J'ai du penchant à croire qu'elles ſont de la nature des couleurs apparentes, quoique feu M. *Mariotte* ait cru le contraire. Je ſouhaiterois de ſavoir le ſentiment de M. *Fatio*, & même celui de M. *Newton* ſur ce point, & ſur les raiſonnemens de M. *Mariotte*, oppoſés en partie à ceux de M. *Newton*; ſurtout lorſqu'en accordant la différente refrangibilité, il nie pourtant, que la couleur ne paroit que par une ſéparation des raïons colorés primitifs; croiant de pouvoir prouver que le même rayon change de couleur par la refraction. Deux choſes

ſes principalement me font encore pencher à croire un mouvement de l'éther, contribuant à celui des aſtres, & conſpirant avec lui: ſavoir, la correſpondance qu'il y a entre les planètes d'un même ſyſtème, & l'analogie du magnétiſme, qui fait que les grands corps répondent aux petits, & que les ſyſtèmes généraux répondent aux ſyſtèmes particuliers. Car l'aimant, ou la terre, attire & dirige les corps, qui ſont ſuſceptibles de ſon opération. Le Globe de la terre fait la fonction de l'aimant à l'égard des terrelles; & comme les obſervations nous font encore connoitre que la terre même, avec les autres planètes, a le même rapport envers le Soleil, que la terrelle a envers le globe de la terre; Puiſqu'on y obſerve encore, tant l'attraction, que la direction ou parallelifme de l'axe, on eſt fort tenté de croire, qu'il y a encore une analogie entre les cauſes, comme il y en a entre les phénomènes. J'avoue que ces phénomènes ſe peuvent expliquer dans les planètes, ſans y avoir recours; mais j'ai déja dit que la nature eſt abondante dans ſes moyens. Pour ſe mieux aſſurer de ſes fins, elle fait que tout conſpire à ſon deſſein; pour ſavoir ſi on a attrapé le fond de la choſe, il faudroit encore pouvoir expliquer la préceſſion des Equinoxes. Enfin puiſque M. *Fatio* nous aſſure, qu'il eſt indubitable que les queues des Comètes ſont des émiſſions réelles, il faut qu'il en ait des raiſons plus fortes que celle qu'il allégue ne me paroit être: Car que ces queues ſoient toujours dans le même plan du mouvement de la Comète, cela me paroit plutôt favorable à l'opinion de ceux qui les croyent emphatiques, d'autant que le Soleil étant toujours dans le même plan avec la ligne de trajection de la Comète, ces emphaſes ou phénomènes ne ſauroient manquer d'y tomber; au lieu que rien n'oblige les émiſſions réelles de ſe borner au plan commun de la ligne & du Soleil. *Hanover ce* 8. *May* 1694.

FINIS TOMI TERTII.

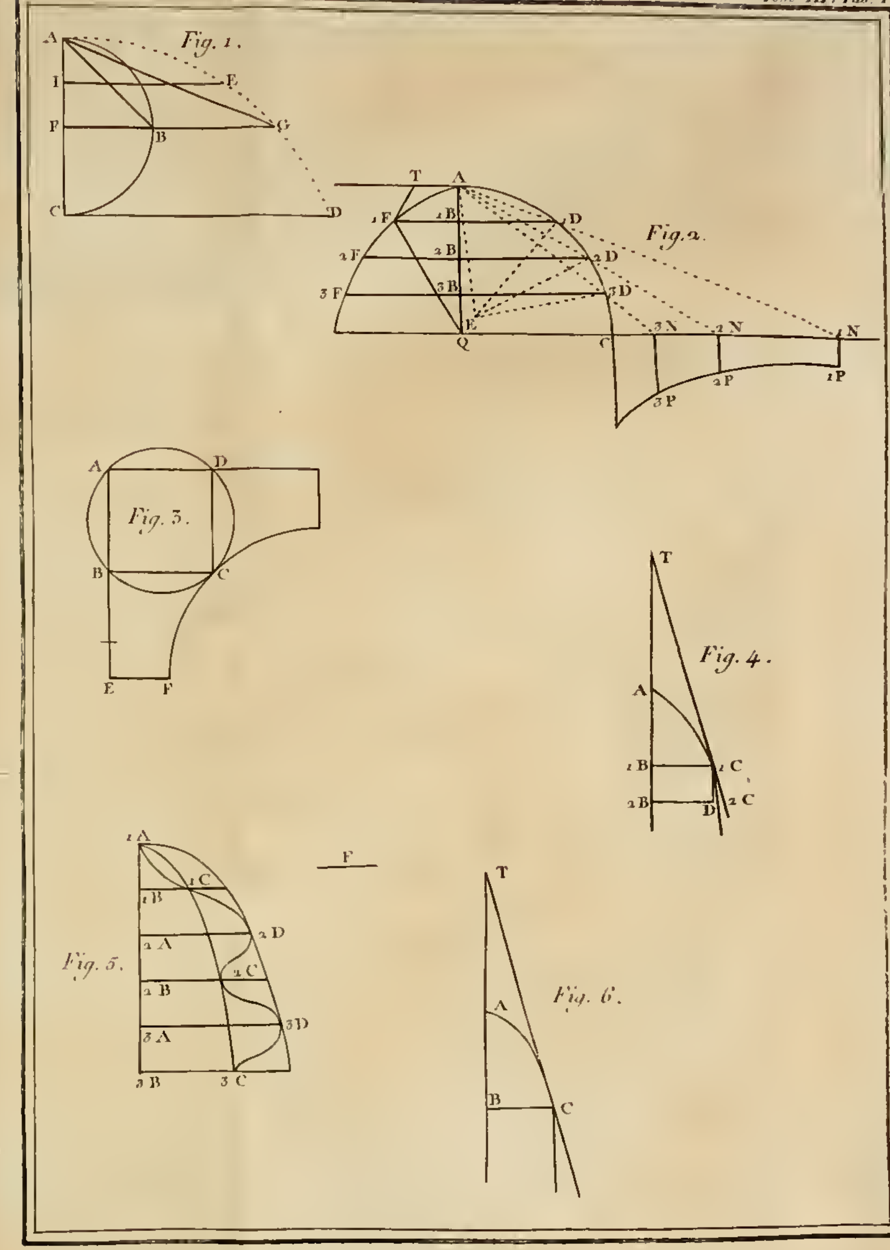
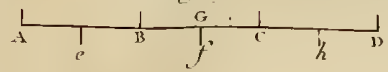

Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.

Fig. 7.



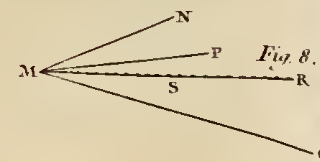
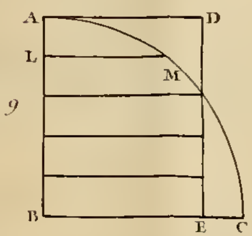


Fig. 8.

Fig. 9



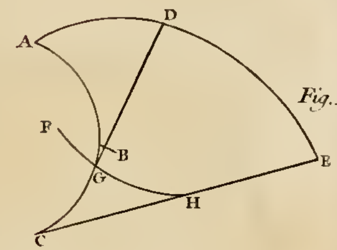


Fig. 10.

Fig. 11.

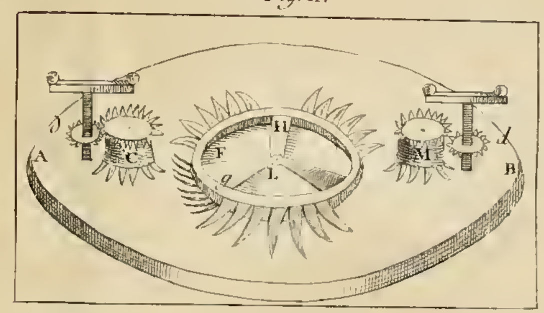
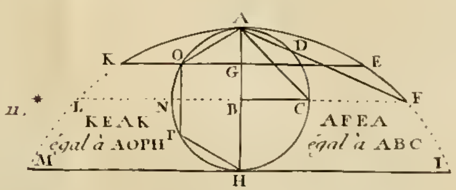
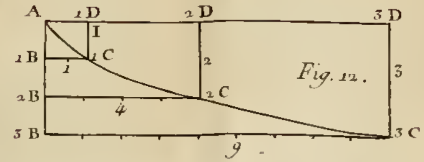
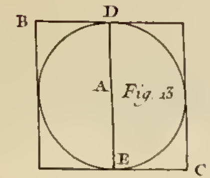
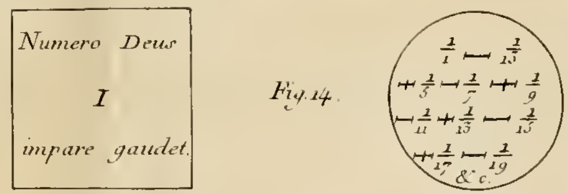


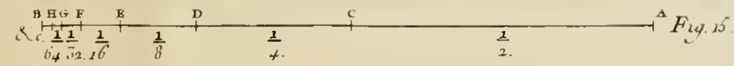
*Fig. 11.**




A
1 D
2 D
3 D
I
1 B
1 C
2 B
2 C
3 B
3 C
1
2
3
4
9
Fig. 12.


B
D
A
Fig. 13
E
C


Numero Deus
I
impare gaudet.
Fig. 14.
&c.


B H G F
E
D
C
A
Fig. 15.
&c.
64 32. 16
8
4.
2.

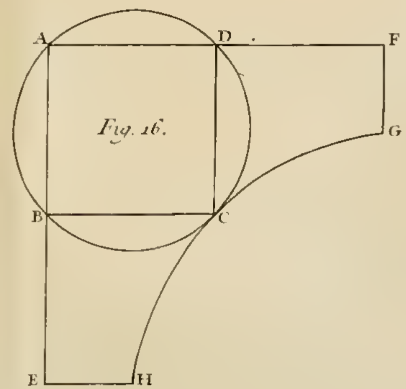

A
D
F
G
Fig. 16.
B
C
E
H

Fig. 17.

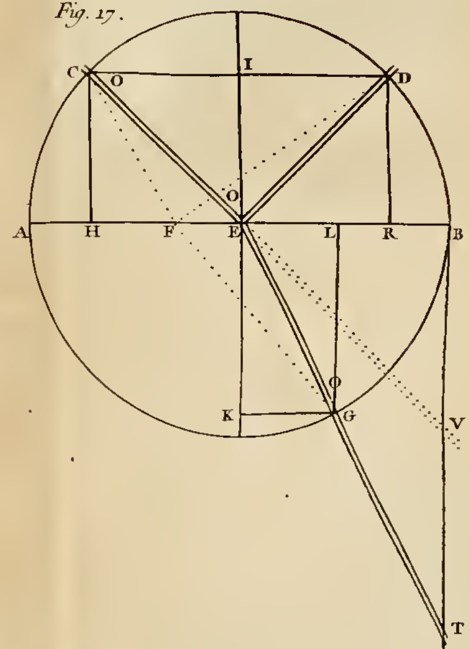


Fig. 18.

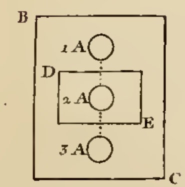


Fig. 19.

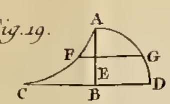
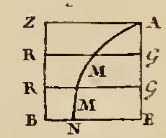
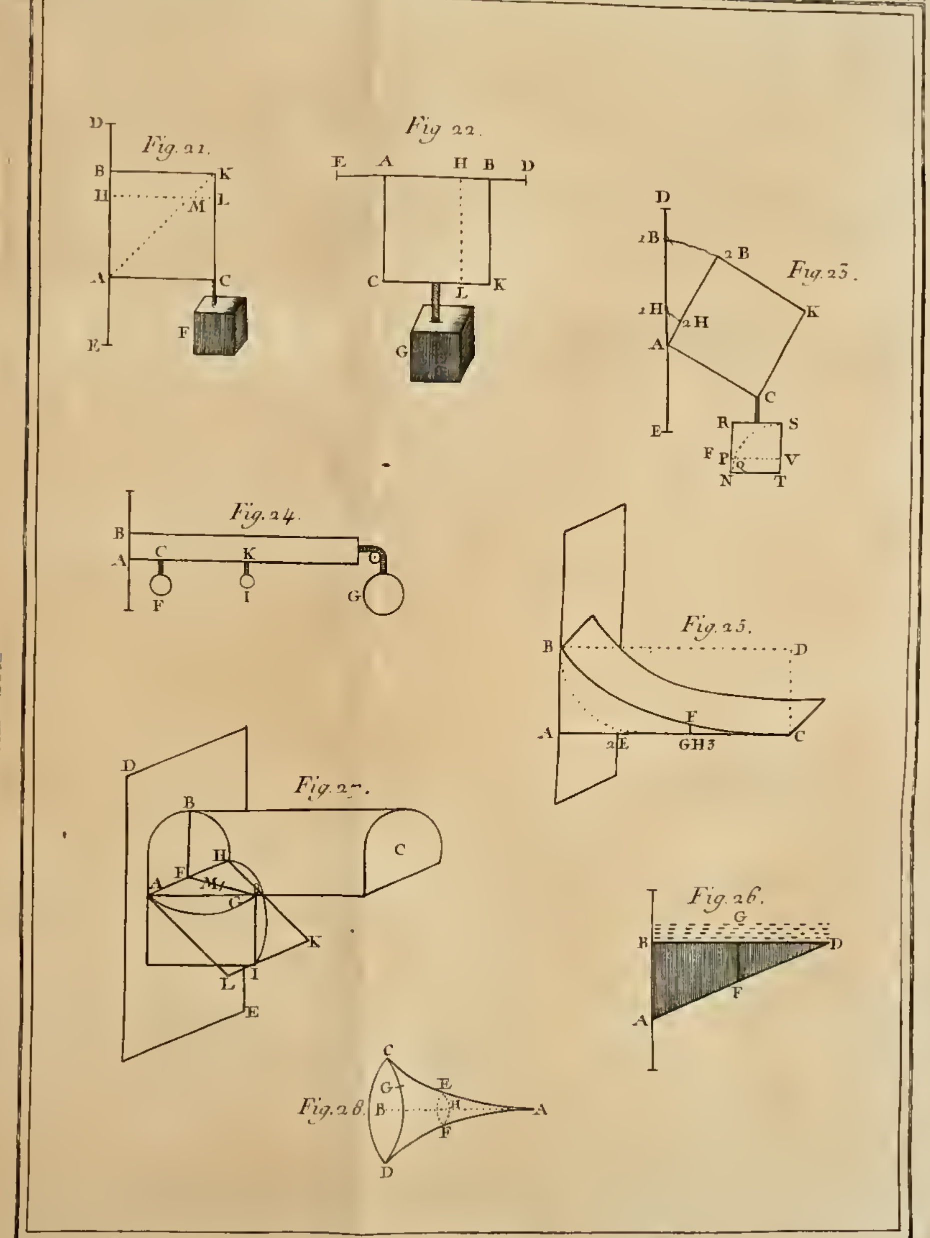
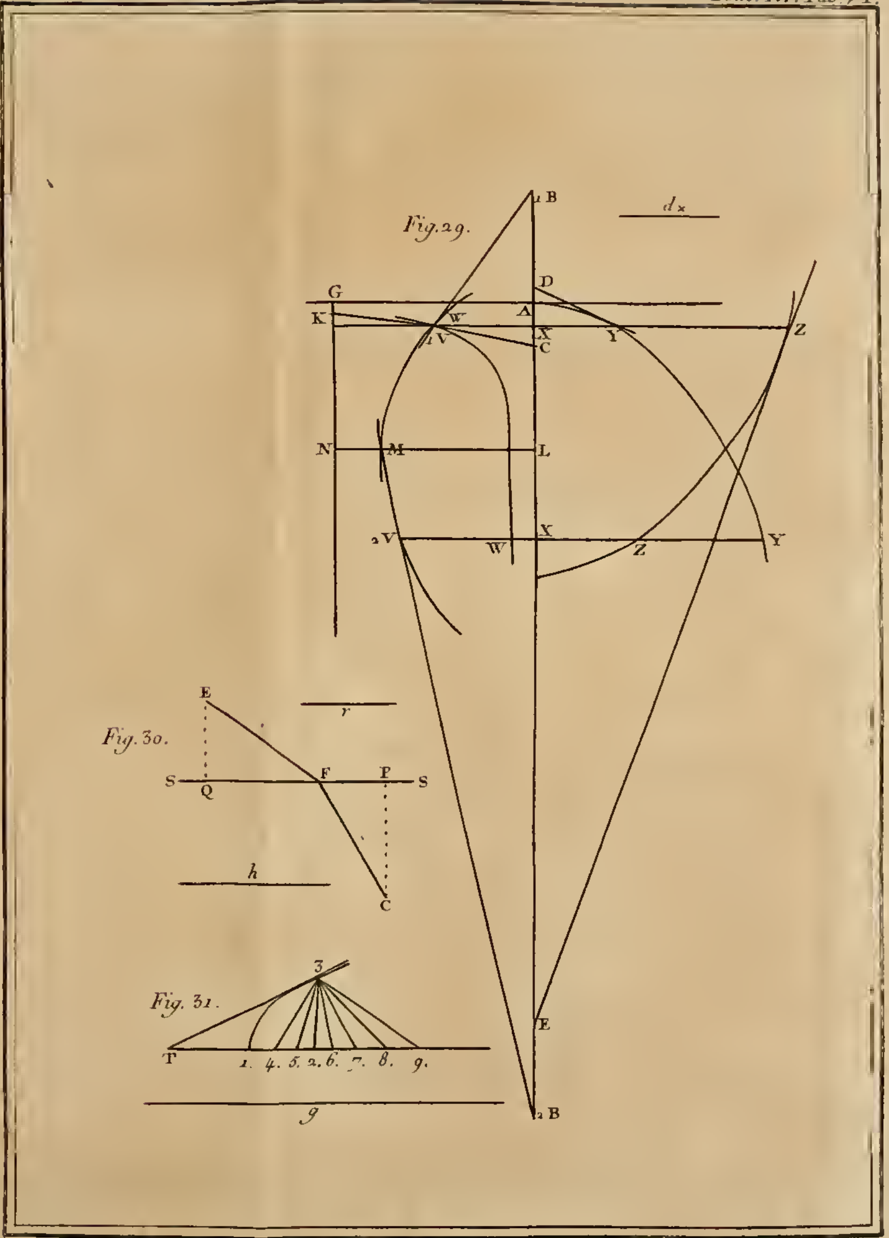


Fig. 20.




Fig. 21.
Fig. 22.
Fig. 23.
Fig. 24.
Fig. 25.
Fig. 26.
Fig. 27.
Fig. 28.


Fig. 29.
B
dx
D
G
A
K
W
X
Z
Y
1V
C
N
M
L
X
2V
W
Z
Y
Fig. 30.
E
r
S
Q
F
P
S
h
C
Fig. 31.
3
T
1. 4. 5. 2. 6. 7. 8. 9.
g
E
2B

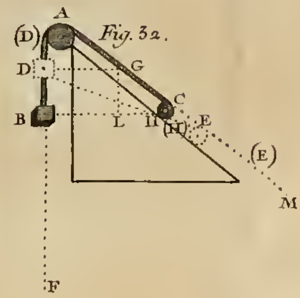


Fig. 32.

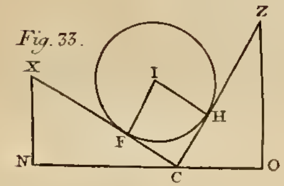


Fig. 33.

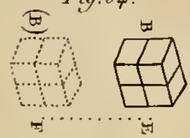


Fig. 34.

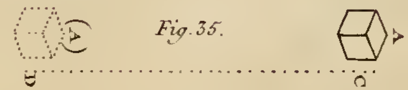


Fig. 35.

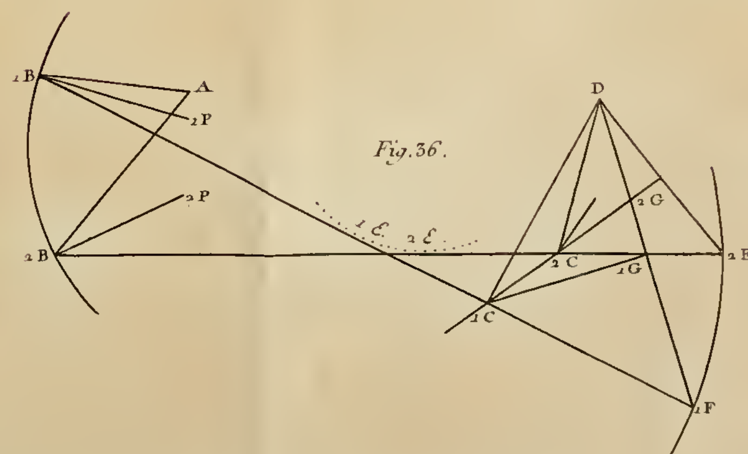


Fig. 36.

Fig. 37.

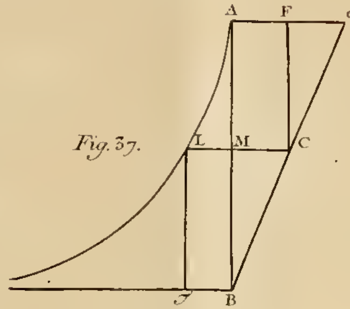


Fig. 38.

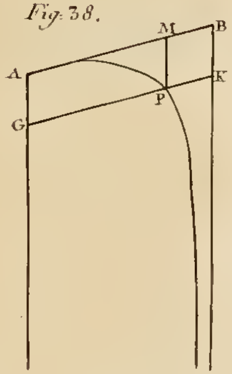


Fig. 39.

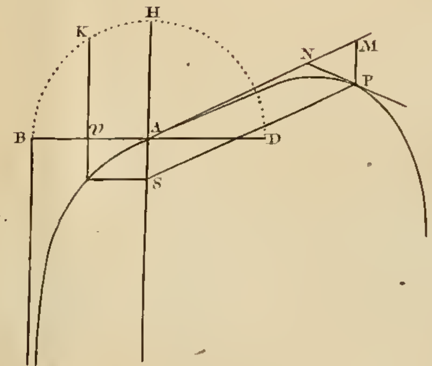


Fig. 40.

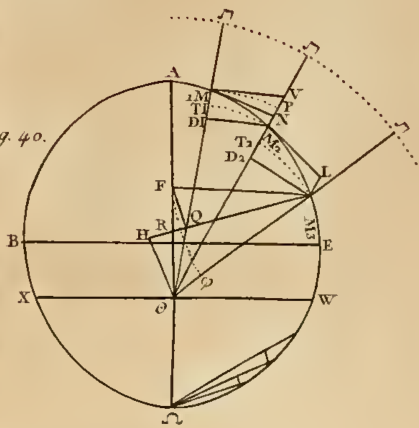


Fig. 42.

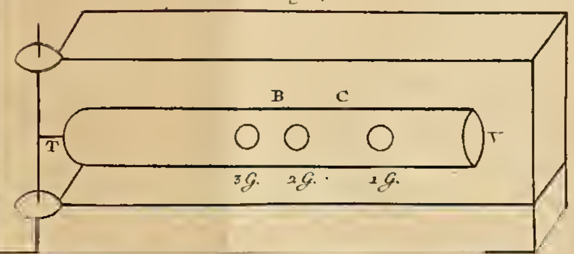
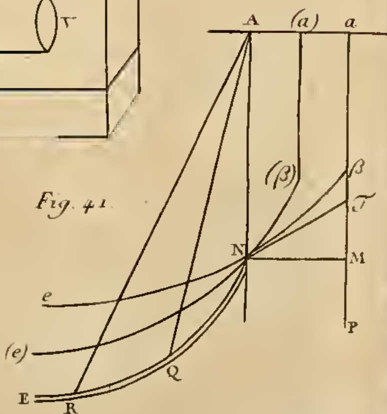


Fig. 41.



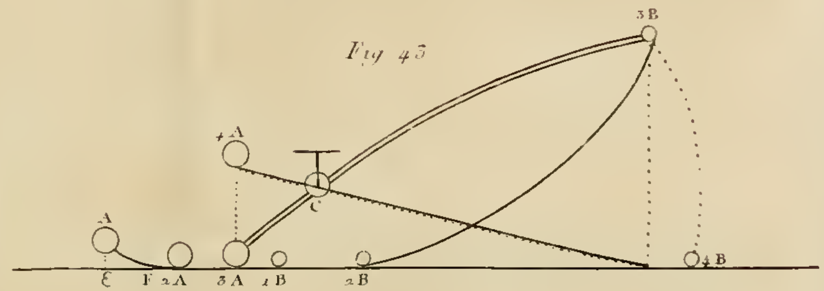


Fig. 43

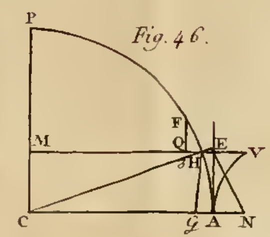


Fig. 46.

Quadratura Generalis Sectoris Conici ex Centro

Auctore G. G. L.

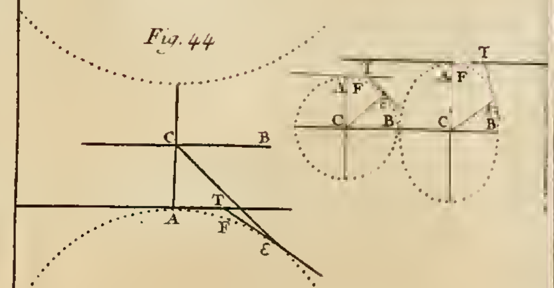


Fig. 44

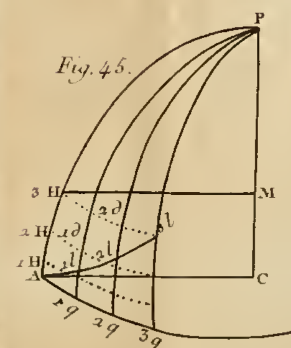


Fig. 45.

BC, s. AT, t.
Sector CATE æquatur rectangulo sub AC, et recta cujus Longitudo est.

$$\frac{t}{1} - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} - \frac{t^7}{7} + \frac{t^9}{9} \; \&c$$

G. G. L. De Linea Catenaria

$\odot B + AC$ *seu* $\odot R + AR$ *ut Numeri*; BC *ut Logarithmi* $AC = AR$ $\odot R = AR = N\xi$ $\odot R + AR = (N)(\xi)$ *Rectang.* $\odot AR =$ *spat* $A\odot NCA$ $\psi\omega = CA(C)$ G, P, Q; *centra grav.* $CA(C)$, AC, $A\odot NCA$ $\odot\theta + \odot B =$ *bis* $\odot G =$ *quatre* $\odot\beta$ $A\mathcal{E} = GP = \beta Q$ *Triang. sim.* $\odot AR$, CBT.

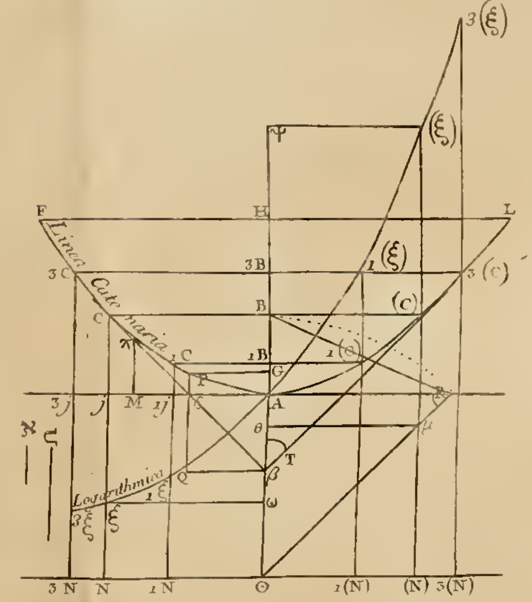


Fig. 48.

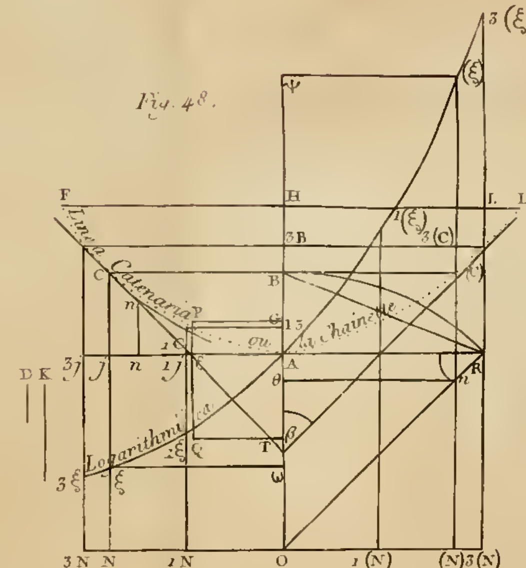


Fig. 49.



OR = OB OR − AR = N ξ OR : AR (N) (ξ) AR = AC

$\Psi\omega$ = CA (C) = *bis* AC *Rectang* RAO = *ſpat* AONCA.

Triang: OAR *et* CBT *ſunt ſimilia*

Sint GPQ *centra grav. ipſarum* CA (C), AC, AONCA, *fiet*

Oθ + OB = *bis* OG = *quater* Oβ, *et* Aε = GP = βQ.

Fig. 51.

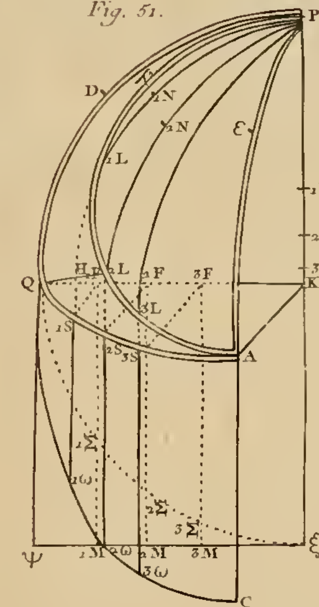


Fig. 50.

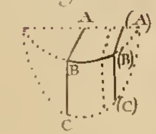


Fig. 52.

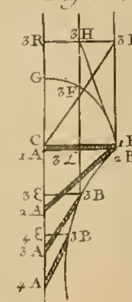


Fig. 54.

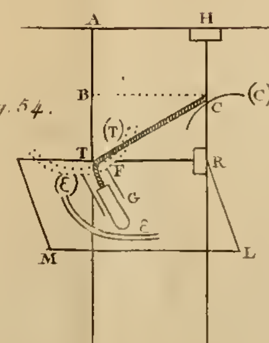
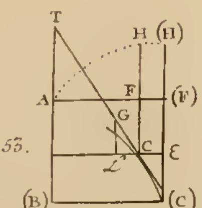


Fig. 53.



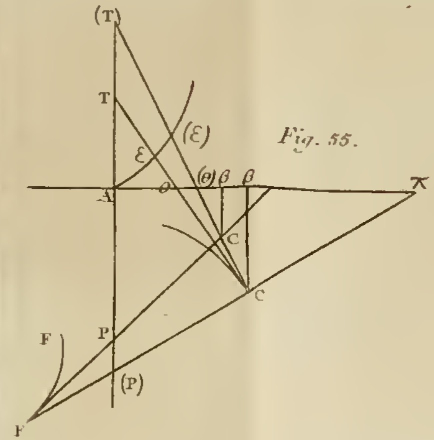


Fig. 55.

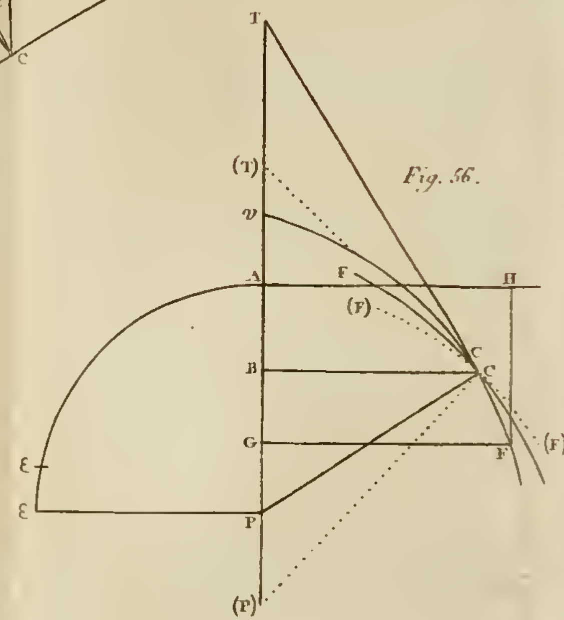


Fig. 56.

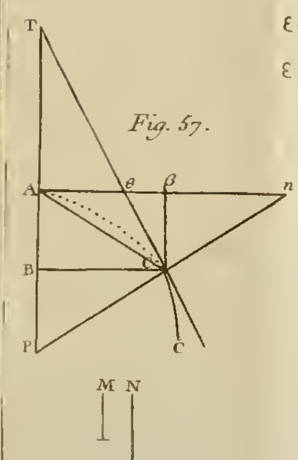
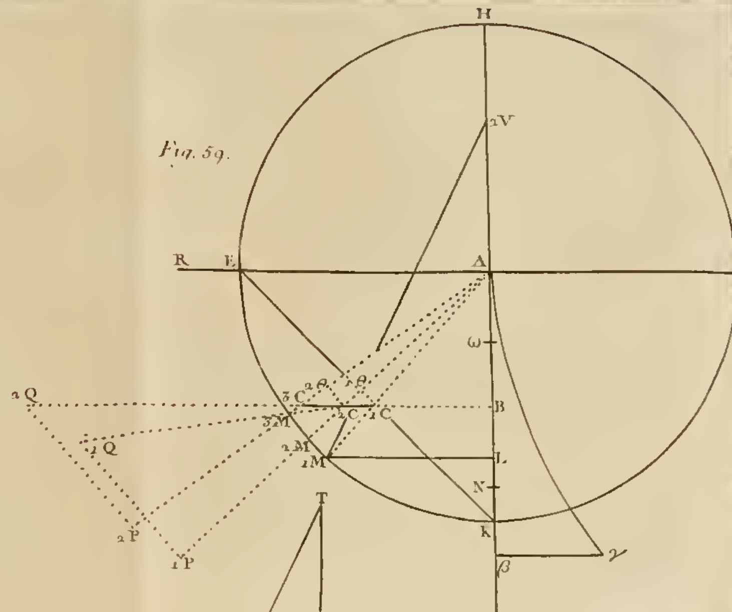


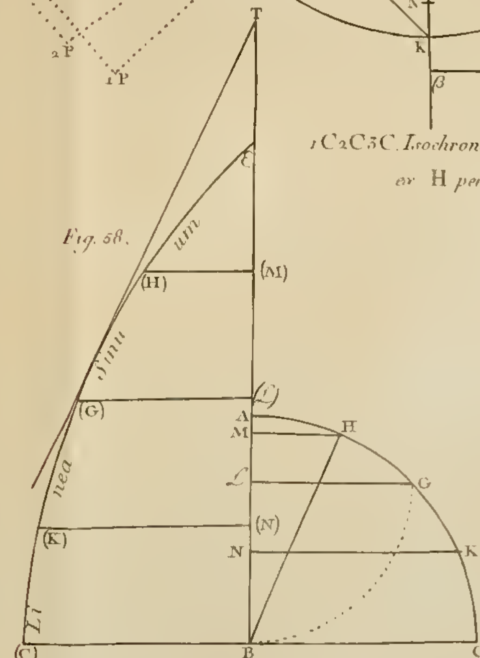
Fig. 57.

Fig. 59.

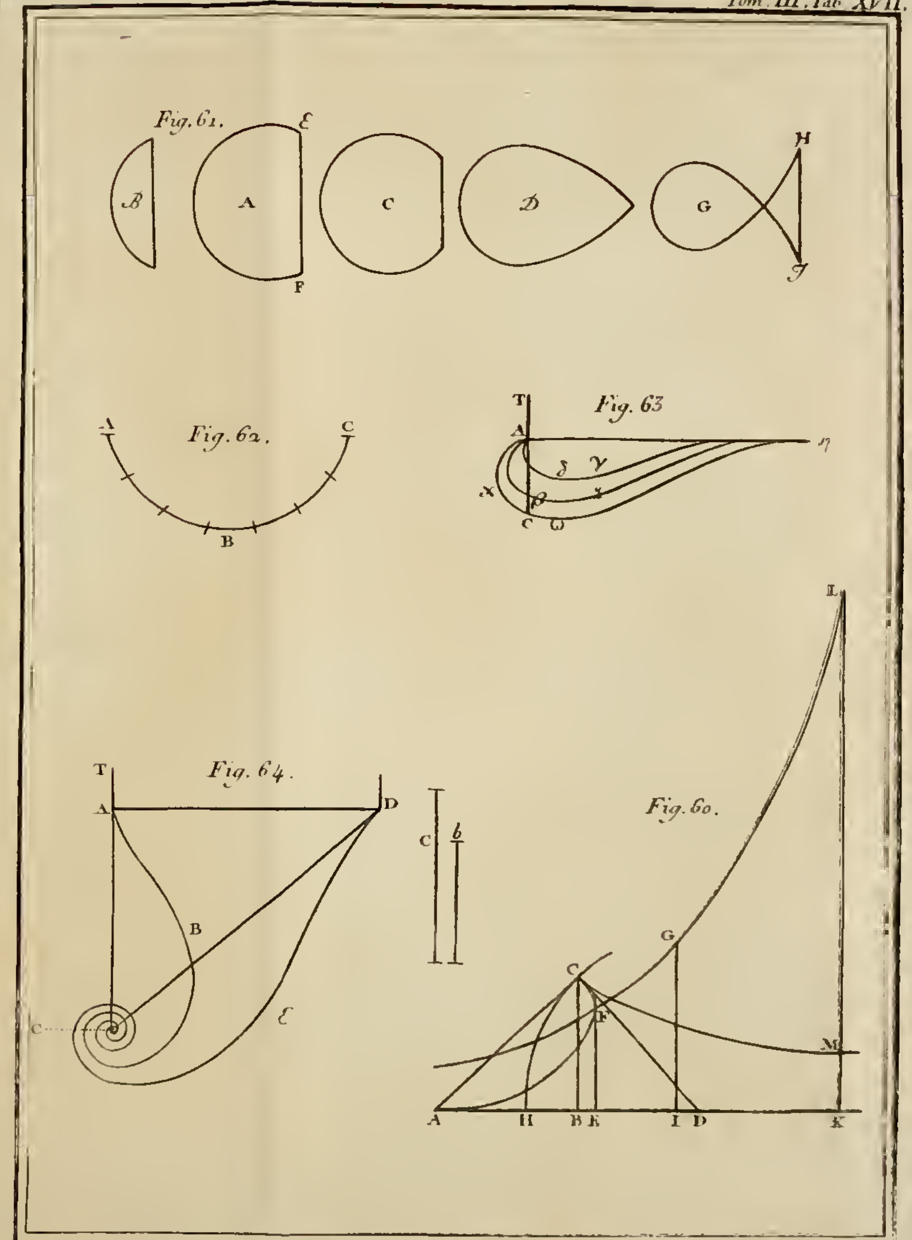


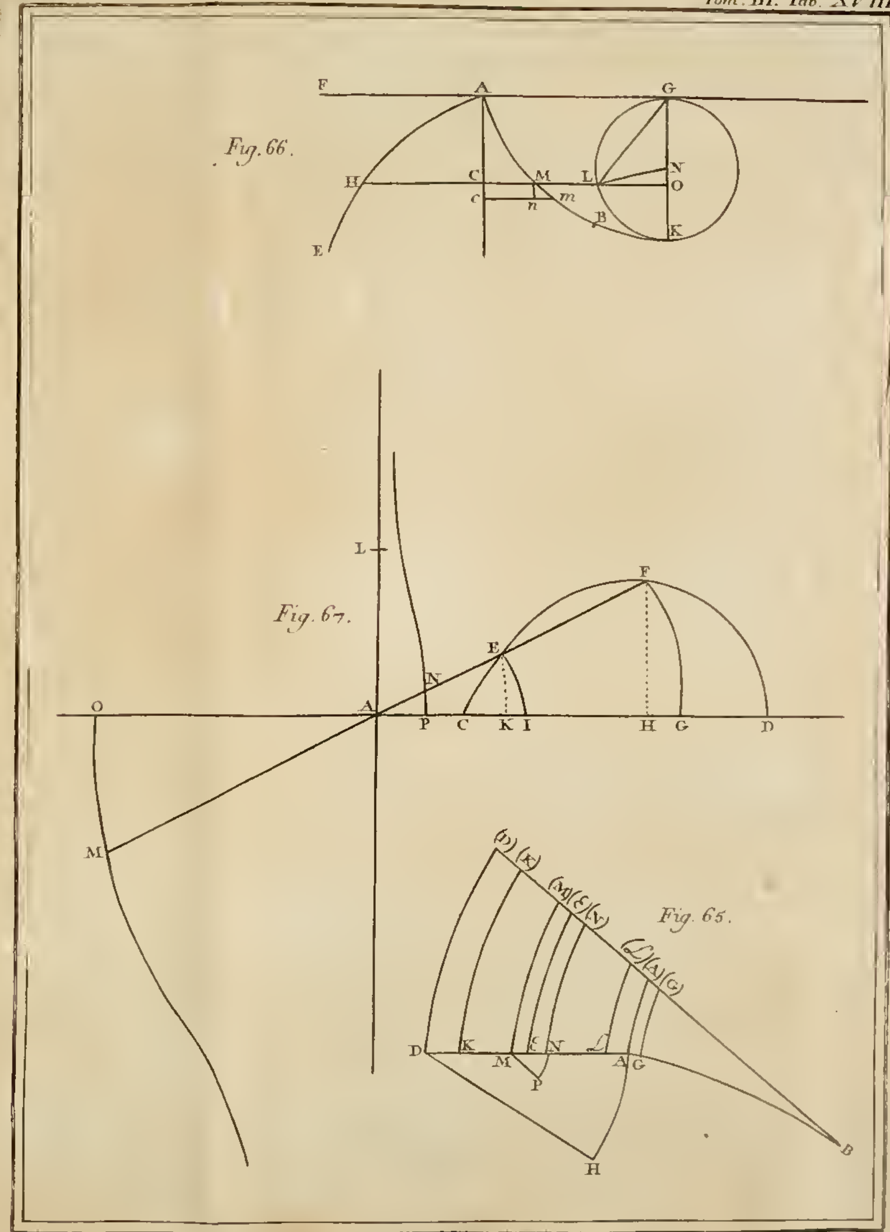
1C2C3C. Isochrona Para centrica ad A
ex H per datum 1 C.

Fig. 58.



MH = (M)(H) ℰ(M) ℰB : : ABH : ABC
AGC : AB : : ℰB : T(ℒ)


Fig. 61.
Fig. 62.
Fig. 63
Fig. 64.
Fig. 60.


Fig. 66.
F
A
G
H
C
M
L
N
O
c
n
m
B
K
E
Fig. 67.
L
F
E
N
O
A
P
C
K
I
H
G
D
M
Fig. 65.
D
K
M
N
A
G
P
H
B

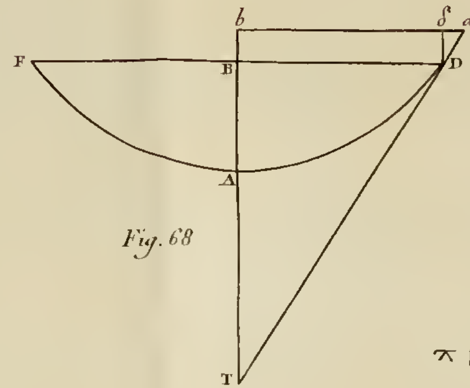


Fig. 68

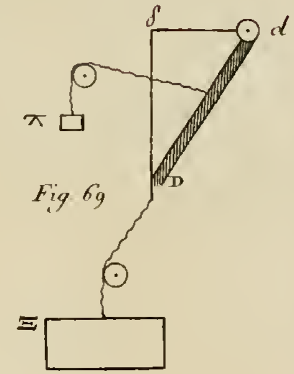


Fig. 69

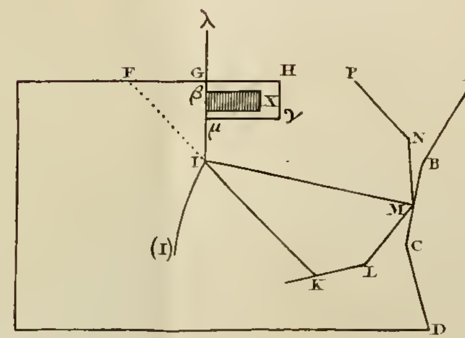


Fig. 70.

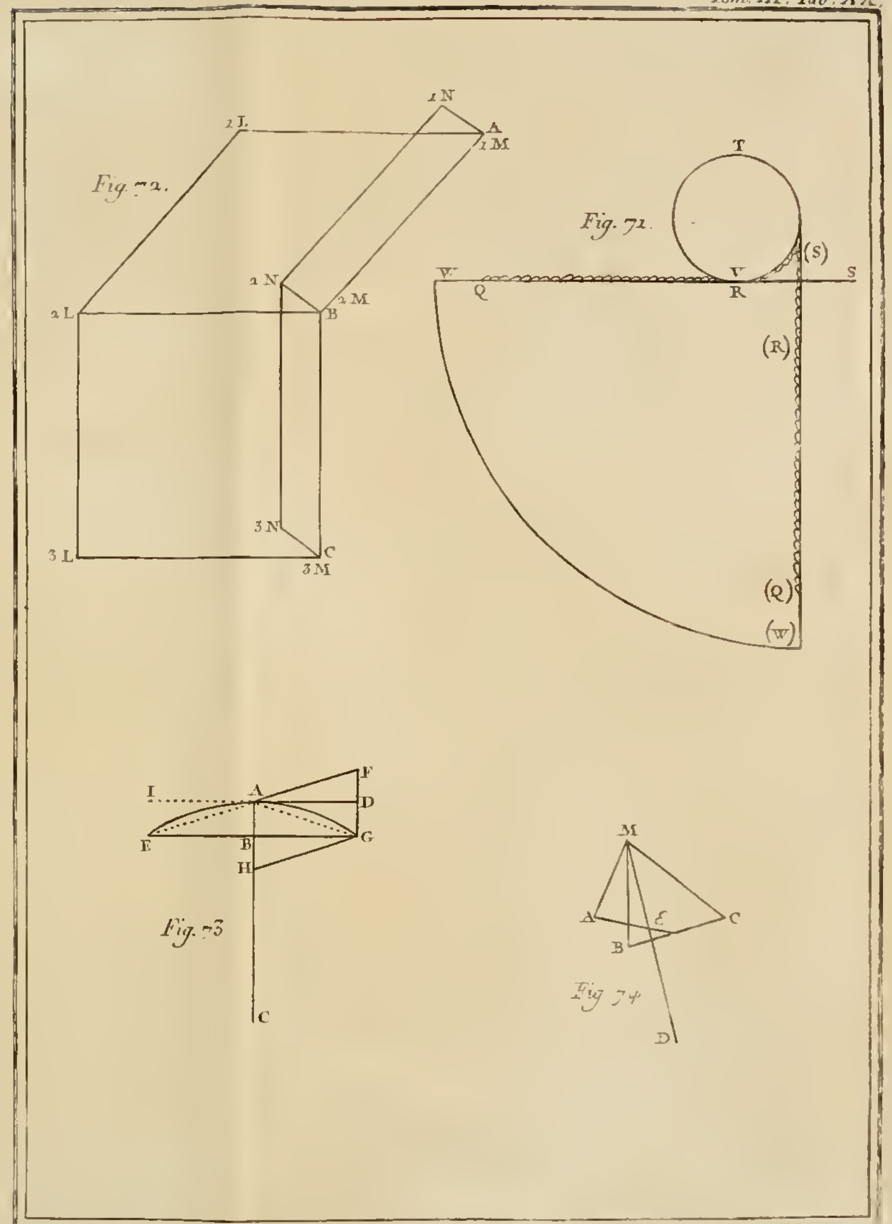


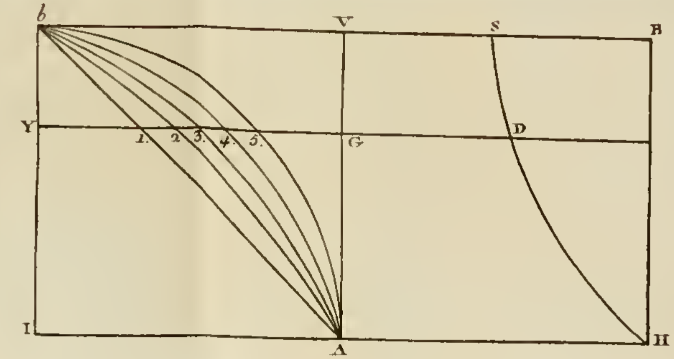
Fig. 72.

Fig. 71.

Fig. 73

Fig. 74

Fig. 75.



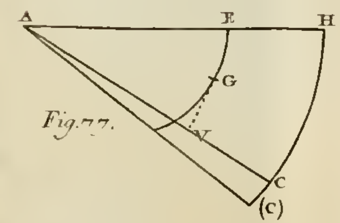


Fig. 77.

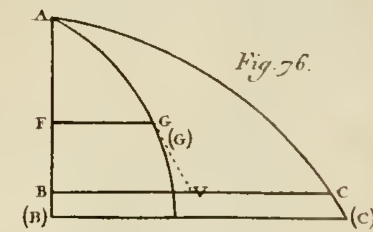


Fig. 76.

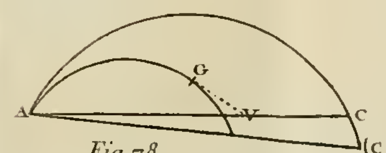


Fig. 78.

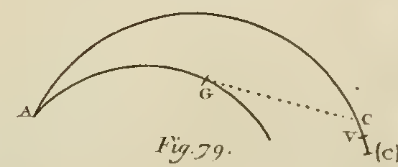


Fig. 79.

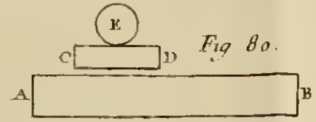


Fig. 80.

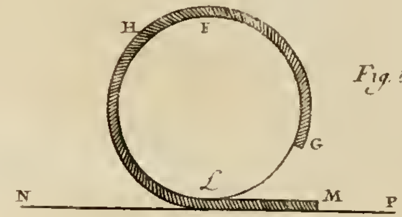


Fig. 81.

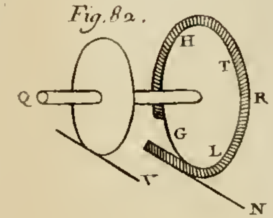


Fig. 82.

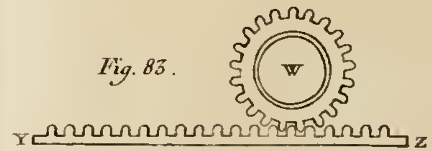


Fig. 83.

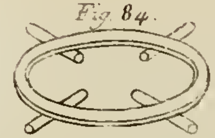


Fig. 84.

Fig. 85.

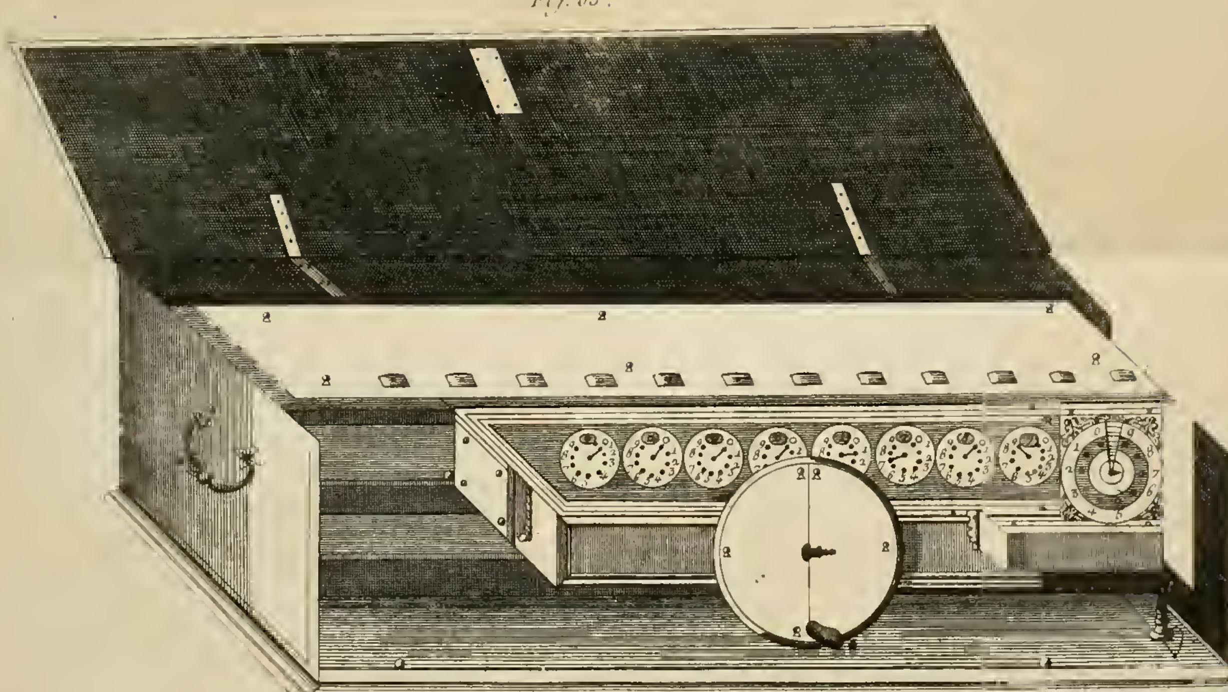


Fig. 86.

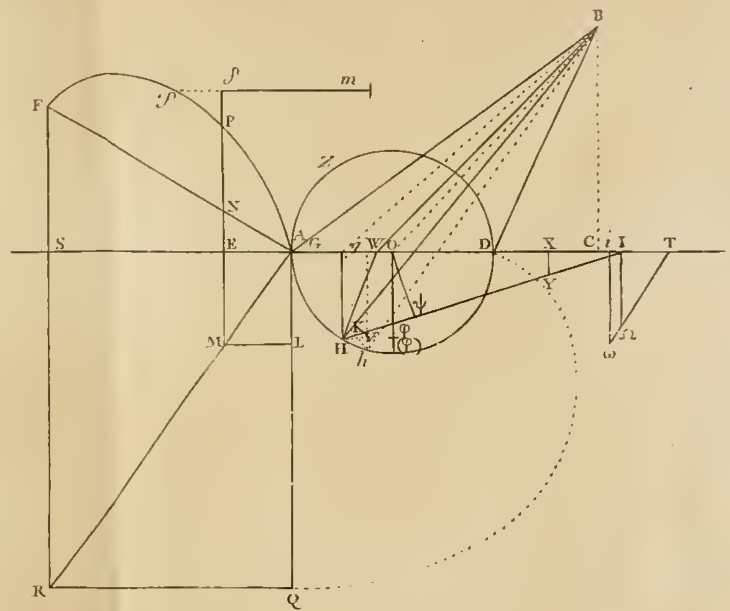


Fig. 87.

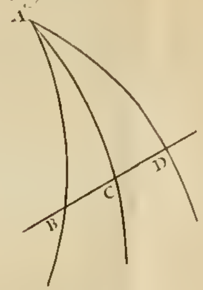


Fig. 89.

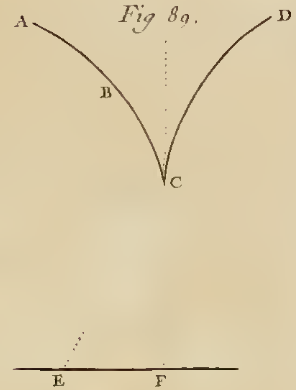


Fig. 88.

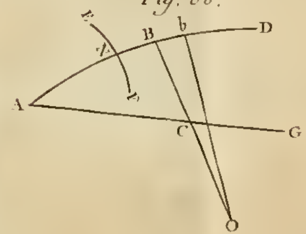


Fig. 90.

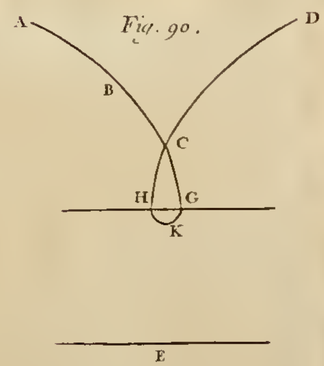
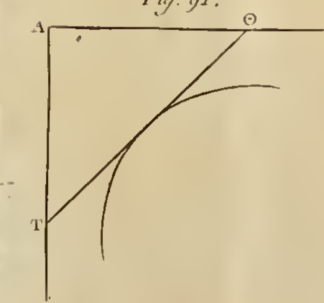


Fig. 91.



93-B10362

EYER